International Society for Rock Mechanics
Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2010 Konferencia, Budapest

VÉGES RUGALMAS ÉS KÉPLÉKENY DEFORMÁCIÓK LEÍRÁSA

Fülöp Tamás
KFKI, RMKI, ELMÉLETI FIZIKAI FŐOSZTÁLY, BUDAPEST
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Ván Péter
KFKI, RMKI, ELMÉLETI FIZIKAI FŐOSZTÁLY, BUDAPEST
BME, ENERGETIKAI GÉPEK ÉS RENDSZEREK TANSZÉK, BUDAPEST
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

A szilárd közegek véges rugalmas és képlékeny deformációinak máig ismert leírásai számos fizikai szempontból nem kielégítőek (sőt, nem elfogadhatóak). E tanulságokat leszűrve, jelen írás egy olyan tárgyalásmódot épít ki, amely mentes mindezektől a problémáktól.

1. ELŐSZÓ

A kontinuumfizika (termodinamikával egyesített kontinuummechanika) időderiváltakat is tartalmazó rugalmas és képlékenységi konstitúciós összefüggéseihez („anyagtörvényeihez") szükség van a rugalmas és a képlékeny alakváltozás *időbeliségének* kielégítő leírására. Ezek az időbeli folyamatok olyanok is lehetnek, melyek során véges (azaz nemkicsi[1]) alakváltozások lépnek föl. Emellett mind az idő-, mind a térderiváltas konstitúciós összefüggések igénylik az anyagi objektivitás elvének (a vonatkoztatási rendszertől, téridő-megfigyelőtől független leírás) biztosítását. Ezek a szempontok indokolják, hogy ebben az, idő- és térderiváltas anyagtörvényekről szóló kötetben egy kontinuumkinematikai írás is helyet kap: egy olyan írás, mely ezeket a szempontokat kívánja megvalósítani, biztosítani, és így alapul szolgálni az idő- és térderiváltakat tartalmazó konstitúciós összefüggések témakörének jövőbeli fejlődéséhez.

Az itt ismertetett megközelítés előfutára a [FÜLÖP (2008b)] munka, amely problémákat fogalmazott meg a közegkinematika szokásos leírásával kapcsolatban, lefektette

[1] nem „végtelen kicsi", nem „infinitezimálisnak tekinthető"

azokat az alapelveket, amelyek mentén ezek a problémák elkerülhetők, és ismertetett két olyan deformációtenzor-jelöltet, melyek eme elvek fényében különösen egyszerű definícióval rendelkeznek.

Az ott megkezdett munka folytatódik itt. A felállított alapelvek további elemzésével ugyanis az ott bemutatottakon is túlmenően, lényegében egyértelműre szűkíthető a rugalmas alak- és deformáltságtenzor definíciója. Emellett a képlékeny alakváltozások — mégpedig a véges, azaz nem feltétlenül kicsi képlékeny alakváltozások — minden ismert szempontnak megfelelő kinematikai tárgyalása is kiadódik, teljes szerves összhangban a rugalmas folyamatok kinematikai jellemzésével.

Az új eredmények egy része a 2009-es lisszaboni ESMC2009 konferencián (7. EUROMECH Szilárdtestmechanikai Konferencia) is bemutatásra került [FÜLÖP–VÁN (2009)], a többi — köztük a képlékenyedésre vonatkozó összes — itt mutatkozik be először.

2. BEVEZETÉS

A kontinuumok fizikai leírása a kontinuumok mozgásának leírásával, a kinematikával kezdődik. Ennek megfelelően a terület rengeteg művelője foglalkozott már a „véges" (azaz nem feltétlenül kicsi) alakváltozások mennyiségi jellemzésével, és számos javaslat született a rugalmas alakváltozási tenzor[2] és a deformációtenzor[3] definíciójára. Első látásra az a kérdés merül fel, hogy van-e még kutatnivaló ezen a területen, nem elegendő-e egyszerűen fellapozni az irodalmat.

Második ránézésre már kevésbé kielégítő a helyzet. A bőség zavarában találjuk magunkat: túl sok a definíció, és túl kevés hozzá az instrukció, hogy miért van ennyi, és hogy melyiket használjuk, vagy hogy melyiket mikor használjuk.

Még közelebbről szemlélve pedig problémákat is felfedezhetünk e definíciókkal kapcsolatban is, és a közegkinematika más pontjain is. Így például a képlékeny alakváltozások leírása a rugalmas esetnél is kevésbé kielégítőnek bizonyul. Kiderül tehát, hogy van még teendő — mégpedig nem bizonyos „akadémikus" szempontok miatt, hanem a közegek mozgásának és az ahhoz kapcsolódó dinamikai jelenségeknek a fizikai inkonzisztenciáktól mentes leírása érdekében. Annál is szükségesebb ez, mert ha a kinematika fizikai hibákat hordoz, akkor azok mind öröklődnek a kontinuumfizika összes többi részére, melyek mint felépítmények alapoznak a kinematikára.

[2] Ez alatt jelen írás olyan mennyiséget fog érteni, mely deformálatlan állapotban az egységtenzor. Angolul *deformation tensor*.
[3] mely deformálatlan állapotban nulla; angolul *strain tensor*

3. A közegkinematika szokásos tárgyalása

Hogy lássuk, mik azok a problémák és fizikai inkonzisztenciák, amik a közegkinematika tipikus tárgyalásában felmerülnek, tekintsük át a számos tankönyvben, szakkönyvben és enciklopédiában megtalálható szokásos megközelítést. (Bizonyos művek, pl. [Truesdell–Noll (1965)], [Haupt (2002)], tartalmaznak ehhez képest néhány előrelépést, de a problémák zöme ezeknél a tárgyalásoknál is fennmarad, illetve pusztán átfogalmazódik. Ezért az alábbiak nem térnek ki az összes ismeretes változatra.)

A szokásos tárgyalás szerint tehát nulladik lépésben választanak egy inerciális vonatkoztatási rendszert, egy időorigót, és az inerciarendszer terében egy térorigót. Ez a lépés azért nevezhető nulladiknak, mert általában hallgatólagosan történik, nem fogalmazzák meg expliciten. Ezután választanak egy t_0 referencia-időpontot, a közeg akkori állapotát nevezik ki referencia-állapotnak (referencia-konfigurációnak), és ezután minden egyes anyagi pontot azzal jellemeznek-indexelnek, hogy t_0-kor mely $\mathbf{X}$ helyvektorú helyen járt.

A t_0-kor $\mathbf{X}$-ben járt közegpont t-kor az

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{X}) \tag{1}$$

helyen jár, így

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{X}) = \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{X}) - \mathbf{X} \tag{2}$$

az elmozdulása t_0 óta. Sebességét

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{X}) = \dot{\boldsymbol{\chi}}\,(t, \mathbf{X}) = \dot{\mathbf{u}}\,(t, \mathbf{X}) \tag{3}$$

adja meg, ahol a felülpont a szubsztanciális időderiváltat jelenti, mely az $\mathbf{X}$ „anyagi helyváltozó” használata esetén egyszerűen a $\partial_t\big|_{\mathbf{X}}$ parciális időderivált.

Bevezetik ezután, a $\boldsymbol{\chi}$ mozgásfüggvény illetve az $\mathbf{u}$ elmozdulásfüggvény térderiváltjaként az

$$\mathbf{F} := \boldsymbol{\chi} \otimes \nabla_{\mathbf{X}} = \mathbf{I} + \mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{X}} \tag{4}$$

ún. mozgásgradienst vagy elmozdulásgradienst, melyre definíciója következményeként teljesül

$$\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathrm{x}} \qquad \text{és} \qquad (\mathbf{F} \otimes \nabla_{\mathbf{X}})^{\mathrm{A}_{2,3}} = \mathbf{0}\,; \tag{5}$$

itt $\nabla_{\mathbf{X}}$ a $\partial_{\mathbf{X}}$ anyagi térderiváltat, ∇_{x} pedig a ∂_{x} inerciális térderiváltat jelöli, melyek a helyes tenzoriális sorrend („indexsorrend”) érdekében kontextustól függően hatnak balra ($\overleftarrow{\nabla}$) illetve jobbra ($\overrightarrow{\nabla}$) [kérdéses esetekben a kontextust zárójelezés fogja egyértelműsíteni],

$\otimes$ a diadikus vagy tenzorszorzat jele[4], végül ${}^{\mathrm{A}}$ a tenzorok antiszimmetrikus részét jelöli [a szimmetrikus részt pedig ${}^{\mathrm{S}}$, továbbá ${}^{\mathrm{T}}$ a transzponálást; többindexes tenzornál pedig pl. ${}^{\mathrm{A}_{2,3}}$ a második és harmadik „indexben” vett antiszimmetrizáltat, mely indexesen pl. $\frac{1}{2}(C_{ijk} - C_{ikj})$].

A következő lépés az, hogy tekintik a — nemnulla determinánsú tenzorokra egyértelmű — bal ill. jobb CAUCHY-dekompozíciót (poláris felbontást):

$$\mathbf{F} = \mathbf{U}_{\mathrm{L}}\mathbf{O} = \mathbf{O}\mathbf{U}_{\mathrm{R}}, \tag{6}$$

ahol $\mathbf{O}$ ortogonális, $\mathbf{U}_{\mathrm{L}} := \sqrt{\mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}}$ és $\mathbf{U}_{\mathrm{R}} := \sqrt{\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}}$ pedig szimmetrikus, pozitív definit tenzorok[5].

Ezek segítségével definiálják, különböző valós n hatványkitevőkkel, a különböző (CAUCHY-GREEN, FINGER, ...) bal és jobb alakváltozási tenzorokat:

$$\mathbf{C}_{\mathrm{L}}^{(n)} := \left(\mathbf{U}_{\mathrm{L}}\right)^{n}, \qquad \mathbf{C}_{\mathrm{R}}^{(n)} := \left(\mathbf{U}_{\mathrm{R}}\right)^{n}. \tag{7}$$

Azokból pedig a különböző (GREEN-LAGRANGE, ST. VENANT, BIOT, ALMANSI, HENCKY, ...) deformációtenzorokat vezetik be:

$$\mathbf{E}_{\mathrm{L}}^{(n)} := \frac{1}{n}\left[\mathbf{C}_{\mathrm{L}}^{(n)} - \mathbf{I}\right] = \frac{1}{n}\left[\left(\mathbf{U}_{\mathrm{L}}\right)^{n} - \mathbf{I}\right], \qquad \mathbf{E}_{\mathrm{L}}^{(0)} := \ln \mathbf{U}_{\mathrm{L}}, \tag{8}$$

$$\mathbf{E}_{\mathrm{R}}^{(n)} := \frac{1}{n}\left[\mathbf{C}_{\mathrm{R}}^{(n)} - \mathbf{I}\right] = \frac{1}{n}\left[\left(\mathbf{U}_{\mathrm{R}}\right)^{n} - \mathbf{I}\right], \qquad \mathbf{E}_{\mathrm{R}}^{(0)} := \ln \mathbf{U}_{\mathrm{R}} \tag{9}$$

(az $n = 0$ eset, a HENCKY-féle vagy „természetes” deformációtenzor[6] az $n \neq 0$ esetek természetes folytatásaként, azaz $n \to 0$ határátmeneteként a L'HOSPITAL-szabállyal származtatható). A kis deformációkra használt CAUCHY-deformációtenzor pedig

$$\mathbf{E}^{\mathrm{CAUCHY}} := \mathbf{F}^{\mathrm{S}} - \mathbf{I} = \left(\mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{X}}\right)^{\mathrm{S}}. \tag{10}$$

Ennek a deformációtenzornak egyébként bevezethető az a változata is, amelyben az anyagi $\nabla_{\mathbf{X}}$ helyett az inerciális $\nabla_{\mathbf{x}}$ áll:

$$\mathbf{E}^{\mathrm{in.\,CAUCHY}} := \left(\mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{x}}\right)^{\mathrm{S}}. \tag{11}$$

A $\nabla_{\mathbf{X}}$ típusú és a $\nabla_{\mathbf{x}}$ típusú térderivált érték az $\mathbf{F}$ szorzóval számítható át egymásba, mely kis alakváltozások során körülbelül az $\mathbf{I}$ egységtenzor, ezért kis deformációkra e

[4] A magyar irodalomban szintén gyakori $\circ$ jelen írásban a függvénykompozíciót (összetett függvényt) kell jelölje.

[5] A bal és a jobb oldali felbontásban fellépő ortogonális tenzorok egyenlőnek bizonyulnak, ezért jelölhetjük őket a közös $\mathbf{O}$ módon. $\mathbf{U}_{\mathrm{L}}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$ illetve $\mathbf{U}_{\mathrm{R}}^2 = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}$ determinánsát véve könnyen belátható, hogy $\det \mathbf{U}_{\mathrm{L}} = \det \mathbf{U}_{\mathrm{R}} = \det \mathbf{F} = \det \mathbf{F}^{\mathrm{T}}$.

[6] Egy pozitív sajátértékekkel rendelkező szimmetrikus tenzor logaritmusa az a tenzor, melynek sajátvektorai megegyeznek az eredeti tenzoréval, a sajátértékei pedig az eredeti sajátértékek logaritmusai. Vagyis a főtengelyrendszerben a főátlóbeli elemeket a logaritmusukkal helyettesítjük.

két deformáció-változat vezető rendben megegyezik. Utóbbi azért viselheti az »inerciális CAUCHY« nevet, mert mindkét „tenzori indexében” (tenzori komponensében) inerciális vektori típusú, hiszen **v** is inerciális vektor, és ∇_x is inerciális vektori értékű derivált. $\mathbf{E}^{\mathrm{CAUCHY}}$ viszont olyan „hibrid”, amely részben inerciális, részben viszont anyagi vektori típusú. Emiatt az $\mathbf{E}^{\mathrm{in.\,CAUCHY}}$ változat konzisztensebbnek tűnik. (Ez a megítélés később fokozatosan egyre megalapozottabbá fog válni.) A CAUCHY-deformációtenzor (mindkettő) szimmetrikus, sajátirányai vannak, sajátértékei pedig e főirányokba történő relatív megnyúlásokat adják meg (amint az geometriailag megállapítható). A többi deformációtenzor pedig mind úgy van kialakítva, hogy szintén szimmetrikusak legyenek, és kis alakváltozásokra — amikor is $\mathbf{F} \approx \mathbf{I}$, — vezető rendben megegyezzenek a CAUCHY-deformációtenzorral (vagyis mindkét változattal).

4. A KÖZEGKINEMATIKA SZOKÁSOS TÁRGYALÁSÁNAK PROBLÉMÁI

4.1. TÚL SOK DEFORMÁCIÓ-JELÖLT

Láthatjuk tehát, hogy tulajdonképpen végtelen sok alakváltozás- és deformációtenzor kerül bevezetésre. Ráadásul, egy kis többlet fantáziával a

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_{\mathrm{L}}^{(n)} + \mathbf{E}_{\mathrm{L}}^{(-n)}\right), \qquad \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_{\mathrm{R}}^{(n)} + \mathbf{E}_{\mathrm{R}}^{(-n)}\right) \tag{12}$$

további jelöltek is természetesnek tűnnek. Megállapíthatjuk továbbá, hogy az $\mathbf{F} = \mathbf{U}_{\mathrm{L}}\mathbf{O}$ felbontás egy olyan jelentést hordoz, miszerint a közeg (egy kis helyi darabkája) először csak fordul (**O**), utána pedig csak tágul és torzul ($\mathbf{U}_{\mathrm{L}}$). A másik felbontás pedig a fordított értelmezés: először történik tágulás és torzulás ($\mathbf{U}_{\mathrm{R}}$), utána pedig csak elfordulás (**O**). Valójában azonban helyesebbnek tűnik az a felfogás, hogy a kettő egyszerre történik minden egyes pillanatban. Ezért nemcsak igazságosabbnak, de helyénvalóbbnak is tűnnek például az

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_{\mathrm{L}}^{(n)} + \mathbf{E}_{\mathrm{R}}^{(n)}\right) \tag{13}$$

jelöltek. Vagy, ha belátható lenne, hogy léteznek „közbülső” poláris dekompozíciók is, pl.

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{U}_1\mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_1\mathbf{U}_1\right), \qquad \sqrt{\mathbf{O}_2}\,\mathbf{U}_2\sqrt{\mathbf{O}_2} \qquad \text{vagy} \qquad \sqrt{\mathbf{U}_3}\,\mathbf{O}_3\sqrt{\mathbf{U}_3}, \tag{14}$$

akkor ezekre is támaszkodhatnánk.[7]

[7] Még igazságosabbnak tűnik a kicsiny időtartamok alatti kicsiny elfordulásokat valahogy felintegrálni. Látni fogjuk azonban, hogy az elfordulás általános közegmozgások esetén csak egy korlátozott mértékben értelmezhető, ezért ezt az elgondolást sem érdemes erőltetni.

Más szempontból viszont nem tűnik egyenértékűnek a bal és a jobb lehetőség. Egy egyszerű szemléltetésként, ha az egyszerű nyírás[8] speciális példáját tekintjük[9], akkor $\mathbf{U}_\mathrm{L}$ (és így a hatványai, és a belőle képezett bal deformációtenzorok) főirányai a szemléletesen várt irányba forognak, egyre lassuló módon; az egyik sajátirány a nyírás irányához tart, egyre növekvő, „nyúló” sajátértékkel, a másik pedig egyre kisebb, „rövidülő” sajátértékkel. A jobb tenzorok ($\mathbf{U}_\mathrm{R}$ és függvényei) sajátirányai viszont természetellenesen, visszafelé irányba forognak (szintén lassuló, és „nyúló/rövidülő” módon). A visszafele forgás azzal magyarázható, hogy a jobb tenzorok az anyaghoz rögzített irányokhoz viszonyítanak — míg a bal tenzorok az inerciális térirányokhoz —, és kiderül, hogy az anyaghoz rögzített irányok az inerciarendszerből nézve gyorsabban forognak, mint a főirányok, ezért látszik az anyagi irányokhoz képest visszafele forgás. (A főirányok forgása és nyúlása-rövidülése egyébként egyezőnek bizonyul egy anyagi gömböcskének a nyírás hatására ellipszoiddá való torzulását jellemző főtengely-forgással és -nyúlással-rövidüléssel.) Ez a példa tehát különbséget jelez a bal és a jobb tenzorok között: egyrészt hogy eltérő irányviszonyokhoz mérnek, másrészt hogy a bal tenzorok viselkedése szemléletesebb, könnyebben átlátható, mint a jobb tenzoroké. Ebből a szempontból viszont akkor hiba volna ezek valamilyen igazságos átlagát, köztes kompromisszumát keresni annak kifejezésére, hogy valójában egyszerre történik elfordulás és nyúlás+torzulás. No de akkor mitévők legyünk?

A végtelen sok deformációtenzor-jelölt láttán pedig joggal merül fel bennünk a kérdés: akkor melyiket rakjuk például egy rugalmasságtani konstitúciós összefüggésbe? (Pl. melyikben a leg-HOOKE-szerűbb egy anyag?[10]) Gyakorlati tapasztalatok is arra mutatnak, hogy ez a választás egy fontos kérdés: amikor például egy határozottan nemlineáris rugalmasságú közegre fölvett kísérleti adatokból a nemlineáris MURNAGHAN-modell szerinti anyagi együtthatókat kívánják meghatározni, az $\mathbf{E}_\mathrm{R}^{(2)}$ deformációtenzor feltételezése esetén irrealisztikus, és óriási hibával terhelt értékeket kapnak, míg az $\mathbf{E}_\mathrm{R}^{(0)}$ választás esetén sokkal megbízhatóbb eredmények adódnak [PLEŠEK–KRUISOVÁ (2006)], [KRUISOVÁ–PLEŠEK (2007)].

4.2. A szinguláris határesetek leírása

Furcsa továbbá, hogy a pozitív n-ű $\mathbf{E}_\mathrm{L}^{(n)}$, $\mathbf{E}_\mathrm{R}^{(n)}$-ek végtelenül összenyomott anyagra (azaz a $\det \mathbf{F} \to 0$ határesetben) véges értéket vesznek fel. A negatív n-űek ellenben a végtelen kitágultság ($\det \mathbf{F} \to \infty$) határesetében maradnak végesek. Kifejezőbbnek tűnik egy olyan geometriai mennyiség, amely mindkét ilyen szinguláris határesetben divergál. Az elvi kifejezőerő mellett az alkalmazásokban fontos numerikus stabilitás is az ilyen

[8] $v_x := cy,\ v_y := 0,\ v_z := 0$ alakban megadható sebességmező (inerciális helykoordinátákban)
[9] a számolási részleteket mellőzve
[10] Értsd: melyikben a leglineárisabb a rugalmasságtani konstitúciós összefüggés?

mennyiségektől várható. Ilyen szempontból az $n = 0$-jú deformációtenzorok tűnnek jó választásnak [de ilyen tulajdonságúak például a (12)-féle kombinációk is, tetszőleges n-re]. Az imént említett [PLEŠEK–KRUISOVÁ (2006)], [KRUISOVÁ–PLEŠEK (2007)] eredmények is rögtön illusztrálják ennek az aspektusnak a fontosságát, és hogy például az $n = 0$ választás valóban jobban teljesít ilyen szempontból.

Érdemes egyébként itt feltenni a következő kérdést is. A kis deformációkra használható CAUCHY-tenzor rendelkezik azzal a — fizikai értelmezéshez és alkalmazáshoz egyaránt értékes — tulajdonsággal, hogy a gömbi része írja le a deformálódás térfogatváltozási részét[11], a deviatorikus része pedig az állandó térfogatú részét. Ismeretes-e, vagy legalábbis létezhet-e olyan véges deformációs deformációtenzor-fajta, amely szintén ilyen tulajdonságú, tehát nem-kicsi deformációkra is egzaktul átörökíti ezt az értékes viselkedést? A válasz az, hogy igen, mégpedig az $n = 0$-jú, azaz HENCKY-féle deformációtenzorok ilyen tulajdonságúak. Ez a következőképpen mutatható meg.

Tekintsünk egy, pozitív λ_1, λ_2, λ_3 sajátértékekkel rendelkező szimmetrikus $\mathbf{\Lambda}$ tenzort. Ennek determinánsa a sajátértékek szorzata, melyre

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = e^{\ln(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)} = e^{\ln\lambda_1+\ln\lambda_2+\ln\lambda_3}, \tag{15}$$

tehát a 6. lábjegyzet fényében

$$\det\mathbf{\Lambda} = e^{\mathrm{tr}\ln\mathbf{\Lambda}}, \qquad \text{azaz átrendezett alakban} \qquad \mathrm{tr}\ln\mathbf{\Lambda} = \ln\det\mathbf{\Lambda}. \tag{16}$$

Mivel pedig a deformálódás térfogatváltozási része a mozgás mint transzformáció JACOBI-determinánsa,

$$\det\mathbf{F} = \det\mathbf{U}_{\mathrm{L}} = \det\mathbf{U}_{\mathrm{R}}, \tag{17}$$

így

$$\mathrm{tr}\ln\mathbf{U}_{\mathrm{L}} = \mathrm{tr}\ln\mathbf{U}_{\mathrm{R}} = \ln\det\mathbf{F}. \tag{18}$$

A HENCKY-tenzorok nyoma tehát pontosan akkor nulla, amikor a JACOBI-determináns 1, tehát amikor nincs térfogatváltozás.

4.3. AZ ELFORDULÁS JELLEMZÉSE

Visszatérve a gondok áttekintésére, dilemma lép fel az elfordulás jellemzésénél is. **O** merevtestszerű (távolságőrző) mozgás esetén valóban az elfordulást írja le, és általában is egy ortogonális tenzor, és így

$$\dot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^{-1} \tag{19}$$

[11] Ezért szokás a tenzorok gömbi részét térfogati résznek is nevezni.

is egy matematikailag kielégítőnek tűnő (mert antiszimmetrikus) szögsebesség-jelölt. Ha azonban veszünk t_0, t_1 és t_2 időpillanatokat, és az egyes időintervallumokhoz rendelhető $\mathbf{F}_{[t_0,t_1]}$, $\mathbf{F}_{[t_1,t_2]}$ és $\mathbf{F}_{[t_0,t_2]}$ mozgásgradienseket, akkor a hozzájuk tartozó $\mathbf{O}_{[t_0,t_1]}$, $\mathbf{O}_{[t_1,t_2]}$ és $\mathbf{O}_{[t_0,t_2]}$ ortogonális tenzorokra általában

$$\mathbf{O}_{[t_1,t_2]}\mathbf{O}_{[t_0,t_1]} \neq \mathbf{O}_{[t_0,t_2]}, \tag{20}$$

csak merevtestszerű mozgások esetén áll fenn egyenlőség, noha egy elfordulás-fogalomtól ezt általában is elvárnánk. Van emellett egy másik természetes lehetőség is a szögsebesség definiálására: $(\mathbf{v}\otimes\nabla)^{\mathrm{A}}$, mely általában nem egyezik meg az előbbivel:

$$\dot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^{-1} \neq (\mathbf{v}\otimes\nabla)^{\mathrm{A}}. \tag{21}$$

Mivel $\mathbf{v}\otimes\nabla$ írja le egy kicsiny Δt időtartam alatti elmozdulások helyi különbözőségét $[\,(\mathbf{v}\otimes\nabla)\,\Delta t\,]$, és ezen belül $(\mathbf{v}\otimes\nabla)^{\mathrm{S}}$ fejezi ki a pillanatnyi relatív tágulásokat és torzulásokat [Fülöp (2008b)], ezért hihetőnek tűnik, hogy $(\mathbf{v}\otimes\nabla)^{\mathrm{A}}$ jellemezze az elfordulást, ő jelentse a közeg szögsebességét. Sajnos, a $\mathbf{v}\otimes\nabla$ jellemezte változások során egy adott helyen a különböző irányú vektorok általában különböző módon fordulnak el, azaz irányfüggő a szögsebesség [Fülöp (2008b)]. Az viszont belátható, hogy a $(\mathbf{v}\otimes\nabla)^{\mathrm{S}}$ okozta (általában nemnulla és irányfüggő) elfordulás irányokra vett átlaga nulla [ld. ugyanott]. Ezért a maradék, $(\mathbf{v}\otimes\nabla)^{\mathrm{A}}$ jellemzi az elfordulást, legalábbis az irányokra vett átlag értelmében. Ez tehát a $(\mathbf{v}\otimes\nabla)^{\mathrm{A}}$ szögsebesség-jelöltet látszik támogatni, míg $\dot{\mathbf{O}}\mathbf{O}^{-1}$ nem látszik semmi kitüntetett szerepet játszani a pillanatnyi elfordulási sebességek szemszögéből nézve.

Mivel pedig a szögsebességhez is csatolódhatnak dinamikai jelenségek, ezért a közegkinematikában a szögsebesség dilemmáját is fontos feloldani. Sajnos, a jelenlegi tipikus gyakorlat az, hogy vagy csak az egyik, vagy csak a másik szögsebesség-jelöltről tesznek említést, és azt alkalmazzák pl. a közeggel együttforgó időderivált értelmezésére.

4.4. A referencia-időpont

Gond van aztán a t_0 referencia-időponttal is. Mint láthattuk, az alakváltozást jellemző tenzorok definiálásához szükséges volt egy ilyen időpillanatot választani. Elvi szempontból azonban nem jogos ez a lépés, mert az idő homogén, minden időpillanat egyenértékű, ezért egyikük sem játszhat kitüntetett szerepet a mozgásjellemzők leírásában.

A t_0 referencia-időpont azonban nemcsak az idő homogenitása miatt problémás, hanem a hozzá kapcsolt fizikai szerep szempontjából is. A szokásos kinematika-tárgyalás ugyanis a közeg t_0-kori állapotát egy referencia-állapotnak tekinti. A deformációtenzor t_0-kori értéke pedig definíció szerint nulla, legyen az a definíció a fenti végtelen sok lehetőség bármelyike, mert mindegyik a mozgásgradiens egységtenzortól vett eltérését méri valahogy, a mozgásgradiens pedig t_0-kor definíció szerint az egységtenzor. Márpedig a deformációtenzor nem azért kell nekünk, mert a mozgást szeretnénk jellemezni vele — arra a célra nem is lehetne kielégítő, mert egy tetszőleges merevtestszerű mozgáskor nulla kell legyen. Arra kívánjuk használni, hogy a szilárd közegekben ébredő rugalmas (és esetleges más) erőket leíró konstitúciós összefüggésekben szerepeljen, a közeg kinematikai állapotának jellemzésére. Egy tartósan magára hagyott, zavartalan, teljesen relaxált szilárd közeg ugyanis egy bizonyos meghatározott alakot vesz föl. Egy kristályos anyag például a szabályos kristályszerkezetet veszi föl, a hozzá tartozó szabályos rácstávolságokkal és szimmetriákkal. Ez a geometriai elrendeződés a szilárd közeg természetes, kitüntetett, ideális állapota. Ha ettől eltérő alakviszonyok közé kényszerítjük, rugalmas (és esetleg más) erők ébrednek benne, és a konstitúciós relációk feladata eme erők megadása az ideálistól eltérő geometriai állapot függvényében. A deformációtenzortól elvárt fizikai szerep tehát az, hogy a geometriai állapotnak az ideálistól, kitüntetettől, alapállapottól vett eltérését mérje. A szilárd közeg deformáltságát (tágultságát és torzultságát) kell mérje, mely természetesen az ideális alaki elrendeződéshez képest értendő.

Mit tesz ezzel szemben a szokásos deformációtenzor-definíciók mindegyike: a t_0-kori állapottól vett eltérést, az azóta bekövetkezett változást méri. Mikor esik egybe a deformáltság változása a deformáltsággal: ha t_0-kor a közeg deformálatlan volt. Ez azonban általában nem teljesül. Példaként, talaj- és kőzetmechanikai laboratóriumi próbatestekre többnyire teljesül. Mélyépítési szituációkban (alagútnyitás talajban, stb.) pedig általában nem, mert a talaj vagy kőzet egy, az önsúly és más földtani viszonyok által terhelt állapotból indul. Egy általánosan érvényes leírás tehát nem alapozhat egy referencia-időpontra.

Általánosan a helyzet az, hogy a közeg egy adott deformáltságú kezdeti feltételből indul, és további mozgása a deformáltság *időfejlődését* szabja meg.[12] A deformációtenzor definíciójának kérdése tehát az a kérdés kell legyen, hogy a deformáltság változási gyorsaságát hogyan szabja meg a közeg mozgása. A kezdeti feltételt pedig a gyakorlatban például az ismert kezdeti feszültségből (pl. önsúly által nyomott talaj, vagy *in situ* kimért kezdeti feszültségeloszlás) és a közeg ismert konstitúciós összefüggéséből határozhatjuk meg.

Hogy a deformáltság változási gyorsaságát mi szabja meg, arra a (hamarosan részletezésre kerülő inerciális követelményeket is kielégítő) $\mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{x}}$ ígérkezik ésszerű jelöltnek.[13]

A deformációtenzor fejlődési egyenlettel történő értelmezési módja egy egyszerű példán máris bemutatható: a CAUCHY-deformációtenzor a hagyományos (10) értelmezés,

[12] Ez a séma pedig ugyanaz, ami általában minden mező jellegű mennyiségre fenn szokott állni: az időbeli változást valamilyen fejlődési egyenlet határozza meg, és emellé kezdeti feltételt kell megadni.

[13] Ezen belül $\mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{x}}$ szimmetrikus és antiszimmetrikus része esetleg külön-külön is szerepet játszhat, mégpedig különbözőt — ilyenre mindjárt látni is fogunk példát.

megismételve az

$$\mathbf{E}^{\textsc{Cauchy}} := \left(\mathbf{u}\otimes\nabla_{\mathbf{X}}\right)^{\mathrm{S}} \tag{22}$$

definíció helyett ezentúl az

$$\dot{\mathbf{E}}^{\textsc{Cauchy}} = \left(\mathbf{v}\otimes\nabla_{\mathbf{X}}\right)^{\mathrm{S}} \tag{23}$$

időbeli fejlődési egyenlettel definiálandó, mely differenciálegyenletnek a megoldását egy

$$\mathbf{E}^{\textsc{Cauchy}}(t_0) = \mathbf{E}_0 \tag{24}$$

kezdeti feltétellel rögzíthetjük. A (11) inerciális változat fejlődési egyenlete pedig

$$\dot{\mathbf{E}}^{\text{in.}\,\textsc{Cauchy}} = (\mathbf{v}\otimes\nabla_{\mathbf{x}})^{\mathrm{S}}\,. \tag{25}$$

A fejlődési egyenletes felfogás egyébként rögtön új, természetes és egyszerű jelölteket is javasol a deformáció jellemzésére. Ezek egyike a

$$\overset{\circ}{\mathbf{E}}{}^{\text{co-rotating}} = (\mathbf{v}\otimes\nabla_{\mathbf{x}})^{\mathrm{S}} \tag{26}$$

fejlődési egyenletű deformációtenzor[14], ahol $\circ$ a $(\mathbf{v}\otimes\nabla_{\mathbf{x}})^{\mathrm{A}}$ szögsebesség-definíciót használó Jaumann-féle együttforgó időderiváltat, amelynek definíciója

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} := \dot{\mathbf{T}} - (\mathbf{v}\otimes\nabla_{\mathbf{x}})^{\mathrm{A}}\,\mathbf{T} + \mathbf{T}\,(\mathbf{v}\otimes\nabla_{\mathbf{x}})^{\mathrm{A}}\,. \tag{27}$$

Ezt az együttforgós deformáció-definíciót az az elgondolás veti föl, hogy egy merevtestszerű forgásnak nem szabad változtatnia a deformációt. Az $\mathbf{E}^{\text{co-rotating}}$ deformációtenzor tulajdonságairól részletesen lásd [Fülöp (2008b)].

Emellett érdemes kiszámolni a többi ismert deformációtenzor fejlődési egyenletét is. Technikai okokból (mivel egy tenzor általában nem cserélhető fel az időderiváltjával) bizonyos alakváltozási tenzorok, a bal és jobb Cauchy-Green-tenzorok időderiváltját sikerül kiszámolni:

$$\left(\mathbf{U}_{\mathrm{L}}^{2}\right)^{\bullet} = (\mathbf{v}\otimes\nabla_{\mathbf{x}})\,\mathbf{U}_{\mathrm{L}}^{2} + \mathbf{U}_{\mathrm{L}}^{2}\,(\mathbf{v}\otimes\nabla_{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}}\,, \tag{28}$$

mely egyenlet más alakban (észrevéve, hogy egy Jaumann-derivált is kialakítható):

$$\left(\mathbf{U}_{\mathrm{L}}^{2}\right)^{\circ} = (\mathbf{v}\otimes\nabla_{\mathbf{x}})^{\mathrm{S}}\,\mathbf{U}_{\mathrm{L}}^{2} + \mathbf{U}_{\mathrm{L}}^{2}\,(\mathbf{v}\otimes\nabla_{\mathbf{x}})^{\mathrm{S}}\,. \tag{29}$$

Másrészt

$$\left(\mathbf{U}_{\mathrm{R}}^{2}\right)^{\bullet} = 2\,\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\,(\mathbf{v}\otimes\nabla_{\mathbf{x}})^{\mathrm{S}}\,\mathbf{F}. \tag{30}$$

Ezeknek a fejlődési egyenleteknek a későbbiekben hasznát fogjuk látni.

[14] co-rotating = együttforgó (angol)

A referencia-időponthoz és referencia-konfigurációhoz kapcsolódik az a probléma is, hogy magát a közeget, az ún. anyagi sokaságot a szokásos leírásban a referencia-konfiguráció reprezentálja. (Fejlettebb tárgyalások, pl. [TRUESDELL–NOLL (1965)], [HAUPT (2002)] formilag valamennyire máshogy járnak el, de az elkövetett fizikai hibák lényegében ugyanazok.) Láttuk ugyanis, hogy általában nem létezik olyan időpont, amikor a közeg minden pontban az ideális, természetes, magára hagyott állapotában van (pl. önsúly és egyéb körülmények miatt), ezért egy referencia-időpontbeli állapot, elrendezés nem használható fel a közeg tulajdonságainak fizikailag helytálló jellemzésére. Mégpedig nemcsak a referencia-időpontbeli deformáltság nemnulla általában, hanem az akkori irányviszonyok sem a közeg természetes, zavartalan állapotbeli irányviszonyai. Ezért a vektorok, tenzorok referencia-irányviszonyok szerinti kifejtése sem hordoz semmi kitüntetett fizikai jelentést, sőt, épp félrevezető/téves lehet.

Egy szilárd közegnek létezik egy természetes, saját szerkezete: az az elrendeződés, azok a távolság- és irányviszonyok, amiket a természetes, teljesen zavartalan állapotában felvesz. Ahogy a közeg kirúgja magát, két különböző közegpont távolsága egy jól meghatározott érték lesz, ahogy az is meghatározott lesz, hogy mely közegpontok esnek egy egyenesbe, és hogy egy közegpontok alkotta háromszögnek mekkorák lesznek a szögei, stb. A szilárd közegnek ez a saját természetes szerkezete egy fontos tulajdonsága, ezért fontos, hogy hűen legyen leírva, nem pedig egy fizikailag általában nem helytálló módon (a referencia-konfigurációval történő reprezentálás pedig általában nem helytálló).

Ezzel ellentétben, folyadékoknál és gázoknál más a helyzet: náluk nem kapcsolódik fizika a deformációhoz mint tenzormennyiséghez. Folyadékoknál egy skalár mennyiséghez, a tágultsághoz tud kapcsolódni, ahol a tágultság az a mérőszám, hogy egy elemi anyagtartományocska pillanatnyi térfogata (V) mennyivel nagyobb a természetes, zavartalan, ideálisan békénhagyott állapotbeli térfogatánál (V_0), viszonyítva ehhez a nyugalmi térfogatértékhez ($\frac{V-V_0}{V_0}$). A tágultsághoz várhatóan rugalmas energia kötődik, mely az alapállapotban, azaz 0 tágultságérték esetén nulla, ettől bármelyik irányba kitérve a rugalmas energia — és így a visszatéríteni kívánó rugalmas feszültség nagysága — nő. Mi több, a nyugalmi térfogati állapot olyannyira kitüntetett, hogy a folyadékokat sokszor összenyomhatatlannak veszik. Torzulási szempontból viszont minden konfiguráció egyenértékű. Gázok esetén viszont a tágultságnak sincs értelme, mert egy gáz annyira tágul ki, amennyire csak hagyják, nincs egy nemnulla természetes anyagsűrűsége, amire beszabályozná magát (úgymond $V_0 = \infty$).

Hibája tehát a szokásos közegkinematikának az is, hogy nem tesz különbséget aszerint, hogy milyen típusú közegről beszél, miközben pedig függ ettől, hogy mik a releváns kinematikai jellemzői.

Tekintsünk most rá a képlékeny alakváltozással is járó kontinuumfolyamatok leírására. Itt az egyik szokásos megközelítés az, hogy egy össz-deformációt tekintenek, mint egy rugalmas deformáció és egy képlékeny deformáció összegét. A rugalmas tagot rugalmas konstitúciós összefüggés változójaként használják, a képlékeny deformáció értékét pedig szintén egy állapotjelzőnek tekintik, és szerepeltetik képlékeny és termodinamikai potenciálok változójaként.

Mint azt az imént már láttuk, a szokásosan értelmezett deformációtenzor-típusok nem állapotjelzők, nem a pillanatnyi *fizikai állapotot* jellemzik, hanem *változást* mérnek — a referencia-időpontbeli viszonyokhoz képest. A rugalmas deformáció fogalma azonban feljavítható volt a rugalmas deformáltság fogalmára, mely már *állapotot* jellemez: a pillanatnyi kitérést a szilárd közeg természetes sajátszerkezetéhez képest. Más viszont a helyzet a képlékeny deformációval.

Nézzünk egy egyszerű (sőt, leegyszerűsített, csak a számunkra lényeges momentumokat hangsúlyozó) példát. Az acélöntödében a csapolás után az acél megdermed. A kapott acéltömböt átvezetik egy hengerpár között, amellyel laposabbra nyújtják, azaz képlik. A hengerpár után megy tovább, (lényegében) békénhagyottan (csak görgőkön döcög tovább). Ezután átvezetik egy második, egymáshoz közelebbi hengerpár között, amellyel megint valamennyivel laposabbra alakítják. Ezután megint mehet tovább egy szakaszon békénhagyottan. Aztán megint továbblapítja egy hengerpár. És így tovább: a végén egy lapos acéllemez jön ki. Ezt teherautóra rakják, és elszállítják egy lemezfeldolgozó üzembe.

Kijelölhető-e fizikailag egy olyan természetes nullhelyzet, amitől vett eltérést fejezne ki a képlékeny deformáció? A mikori elrendezése lenne tekinthető az „igazi sajátelrendezésének”? A dermedés utáni? Az első hengerpár utáni? Az ötödik utáni? A lemezfeldolgozó üzembe érkező? (Vegyük észre, hogy a lemezfeldolgozóban dolgozó munkások számára az üzembe beérkezéskori állapot a „kezdeti”...) Az első hengerpár utáni és második előtti, lényegében békénhagyott szakaszon csak egy kicsike terhelés éri az acélt, ahogy a továbbító görgőkön zötyög és a saját súlya miatt egy kicsikét behorpad: ez rugalmas behorpadás, mely az első hengerpár után allandósult alapelrendeződésétől vett eltérés. Ha itt befejeznénk a folyamatot, ez az alapszerkezet maradna meg az acélnak. Ám jön a második hengerpár, elváltoztatja ezt az alapelrendeződést, átrendezi a közeget, aztán a következő hengerpárig ismét nincs változás az alapelrendeződésben, csak esetleg kicsike rugalmas kitérések a görgőkön az új, szintén állandósult alapelrendeződéshez képest. A második alapelrendeződés ugyanolyan legitim, mint az első, és minden további képlés utáni állapot úgyszintén. Egyikük sem kitüntetettebb a többinél. A képlékeny deformáció csakis változást tud mérni. Mégpedig mi olyat mérhetne, ami nem valami önkényes viszonyítási ponttól mért változás, hanem valami fizikai tartalmi dolog változása: *az alapszerkezet megváltozását* mérhetné. Az alapelrendeződés megváltozását egy t_1 és egy t_2 időpont között. Olyan mennyiség, ami nem két, hanem egy időpontra vonatkozik, az alapszerkezet változási gyorsasága, időderiváltja lehet. Ez a képlékenyedési sebesség már állapotjelzőnek tekinthető, és joggal szerepelhet konstitúciós összefüggésekben, termodinamikai potenciálokban. (Természetesen egyelőre még nem tudjuk, hogy az alapszerkezetet pontosan milyen matematikai módon lehetne megadni, így most még nem világos az sem, hogy ez a valami hogyan lenne deriválható idő szerint. A következő szakaszokban fog majd fény derülni a konkrét megvalósítás módjára.)

Megjegyzendő, hogy a képlékeny deformáció bevezetésére létezik egy másik megközelítés is, ahol a mozgásgradienst írják fel rugalmas és képlékeny mozgásgradiens szorzataként. Ez természetesen örökli a referencia-időponttal és -konfigurációval kapcsolatos ellenvetéseket, és szintén nem észleli a különbséget, hogy a rugalmas deformáltság állapot, míg a képlékeny alakváltozás változás. (További megjegyzéseket is lehetne tenni, de már az eddigiekből is látszik, hogy ez az út sem kielégítő a képlékeny kinematika megnyugtató megfogalmazásához.)

A helyzet jellemzéséül és következmények súlyosságáról érdemes megismételni BERTRAMnak az [ASSZONYI–VÁN–SZARKA (2007)] műben már felidézett sorait:

> „A *véges képlékenységelméletek* egyik alapvető problémája a belső változók definíciója, és különösen a képlékeny vagy inelasztikus alakváltozásé. Habár a *képlékeny deformáció* kifejezés meglehetősen szokásosnak tűnik a mérnöki irodalomban, kiderül, hogy nagy deformációk esetén meghatározása rendkívül bonyolult.” [BERTRAM (2005), 249. o., kiemelések a szerzőtől].

4.7. A TÉRIDŐ ÁLTAL KIRÓTT KÖVETELMÉNYEK

Az utolsó kritikai észrevételhez idézzük fel a 3. szakasz elején tett nulladik, implicit lépést. Ott tulajdonképpen egy szívességet tettünk a hagyományos tárgyalás számára, azzal, hogy megelőlegeztük, hogy a leírás egy *inerciális* vonatkoztatási rendszer szerint fog történni. Ez ugyanis — a nulladik lépés implicit, sőt, fel nem ismert volta miatt — a szokásos tárgyalásban egyáltalán nincs biztosítva, a formalizmus bármely nem-inerciális (hanem csak merev/távolságtartó, vagy akár még általánosabb) vonatkoztatási rendszer szerint zajlhat. Ezzel viszont a leírás nemcsak a közeg, hanem jókora mértékben eme tetszőleges megfigyelő viselkedését is tartalmazza, és ez a kettő alaposan össze van keveredve. Ez a probléma jó ideje felismerésre is került, és az anyagi objektivitás elvének nevezték el azt a törekvést, hogy a közeg viselkedése és a megfigyelő viselkedése szétválasztható legyen.

Ennek egy lehetséges megvalósításának tekintik az „anyagi sokaságon” dolgozást. Ez azon a felismerésen alapul, hogy a közeg maga is tekinthető egy megfigyelőnek, ezért ha őhozzá viszonyítunk, akkor nem kellett semmi külső, segéd-elemet felvenni, hanem a viszonyítás egy lényegi, fizikailag valóban kitüntetett szereplőhöz történik.

Sajnos ez a megoldás csak látszatmegoldás. A közeg ugyanis önmagához képest nyugszik (definíció szerint). Így tehát nem lehet leírni, hogy a közegpontok valójában általában távolodgatnak-közeledgetnek egymáshoz, pörögnek egymás körül stb., valamilyen gazdag időfüggő mintát kirajzolva. A közegmozgások leírásához ezért fel szokás venni a χ mozgásfüggvényt ill. az $\mathbf{F}$ mozgásgradienst, mint valamilyen anyagi mezőket az anyagi sokaságon — és az időn — értelmezve. Ezek a függvények azonban akkor milyen halmazban is veszik föl az értékeiket? Mihez is viszonyítanak? Továbbra is valamilyen külső viszonyítási alaphoz. Sehogy se lehet megtrükközni ezt a helyzetet, mindenképpen szükséges marad egy külső mérce, támpont, amihez képest a közeg mozgását kifejezik.

Ezenkívül a közegnek mint egésznek az általában neminerciális, gyorsuló és forgó mozgása még így is elsikkad a fizikai leírásból.[15] Ezek a nemtehetetlenségi mozgások pedig szintén fizikai hatásokkal járnak a közeg számára. Ezt már egyszerű hétköznapi tapasztalatok is mutatják: az ember egyensúlyszerve (és gyomra) megérzi, amikor az autóbusz, amin ül, gyorsít, fékez vagy kanyarodik, amikor a lift hirtelen elindul vele fölfelé vagy lefelé, és amikor a repülő hirtelen süllyedni kezd vele egy alacsonyabb nyomású levegőtartományba érve.

A közeghez mint megfigyelőhöz viszonyításnál tehát ilyen szempontból jobban járunk, ha egy tetszőleges, de inerciális megfigyelőhöz viszonyítunk, mert így kifejezhetjük a neminerciális közegmozgásokat. Tény, hogy viszont ekkor is van egy nem-lényegi tetszőlegesség leírásunkban: az önkényesen választott inerciarendszer. Ráadásul egy rendes kinematikában matematikai megfogalmazást, kritériumot kellene adni arra, hogy egy megfigyelő, egy vonatkoztatási rendszer inerciális-e.

Rejlik azonban itt egy olyan további probléma is, amelybe az inerciarendszerek használata esetén is beleütközünk: az abszolút tér, „a geometriai tér” problémája. Hétköznapi térélményeink zöme, „földhözragadt” — a Föld bolygó felszínéhez ragadt, ahhoz rögzített — tapasztalataink és látásmódunk ugyanis egy abszolút tér létezésének illúzióját építi fel bennünk. Akadnak azonban olykor olyan élményeink is, melyek megingatják ezt az illúziónkat. Vegyük példaként a következő, életből ellesett szituációt. András (A) és Bence (B) két különböző vonatban ül, melyek szomszédos vágányokon állnak egymás mellett. Kint sötét este van, külső fények nem látszanak, fülkéikben viszont ég a villany. A térélménye a saját fülkéje, B-é az övé. Meglátják egymást az ablakon keresztül (ugyebár ég a

[15] A mozgásgradiens ugyanis érzéketlen egy tetszőleges merevtestszerű mozgásra, így a tetszőleges időfüggésű forgó és gyorsuló mozgásra.

világítás mindkét fülkében). Néhány perc eltelik, aztán egyszercsak mindketten észreveszik, hogy egymáshoz képest mozogni kezdenek. Olyan finoman indulhatott el az egyik — vagy esetleg mindkét? — vonat, hogy semmit nem érzett sem A, sem B. Elbizonytalanodva néz mindkettő a másikra: melyikünk vonata indult el? A tere mozog B-éhez képest, B-é A-éhoz képest. Egyikük tere sem tűnik kitüntetettebbnek a másikéhoz képest.

A tudományos gondolkodásban a geocentrikus világkép helyett terjedni kezdő heliocentrikus felfogás világított rá arra, hogy a Föld pörögve és a Nap körül körbekeringve mozog, és a gravitációs hozzákötődés és súrlódással hozzá képest lefékeződés tünteti csak ki életünkben a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszert.[16]

Az inerciarendszerek fizikai egyenértékűségét pedig először GALILEI fogalmazta meg (remek hajós példabeszédét ld. [GALILEI (1632)], de elolvasható [FÜLÖP (2008a)]-ban is). Ez a GALILEI-féle relativitási elv képletileg azt mondja ki, hogy az inerciarendszerek közötti átjárás nemrelativisztikus jelenségkörben érvényes

$$t' = t, \qquad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t \tag{31}$$

formulájára, az ún. GALILEI-transzformációra (ahol $\mathbf{V}$ az inerciarendszerek relatív sebessége) minden fizikai képletnek invariánsnak kell lennie.

Namármost, erről a képletről leolvasható, hogy az idő abszolút, mert a transzformációs képlet $t' = f(t)$ alakú[17].

Hasonló szemmel ránézve, a második képletről pedig az olvasható le, hogy a tér nem abszolút, ugyanis a transzformációs képlet nem $\mathbf{r}' = g(\mathbf{r})$ alakú, hanem $\mathbf{r}' = g(\mathbf{r}, t)$ alakú.[18]

Az is látható, hogy a térbe belekeveredik az idő is. Ha a térvektorokból szeretnénk konstruálni valami abszolút mennyiséget (olyan mennyiséget, amelyek halmazából már nem visz ki a GALILEI-transzformáció), akkor az időt kell hozzákapcsolni valahogy. Ez megtehető úgy, ha a

$$\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{32}$$

négydimenziós vektort képezzük. Ilyen négyesvektor alakban a GALILEI-transzformáció

$$\begin{pmatrix} t' \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{V} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \tag{33}$$

[16] A nehézkedést már NEWTON előtt is magyarázták egyesek a Föld vonzásával [SIMONYI (1978), 218. o.].

[17] Sőt, az idő egydimenziós lévén, belátható, hogy ekkor szükségképpen $t' = t$.

[18] Az egy adott inerciarendszeren belüli térbeli forgatások $\mathbf{r}' = g(\mathbf{r})$ alakúak. Nem visznek ki tehát az összes helyvektorok halmazából. Ha csak rajtuk múlna, a tér abszolút lenne.

(blokkmátrix alakba írva), tehát a lehetséges négyesvektorok halmaza már abszolút: nem visz ki belőle a GALILEI-transzformáció.[19]

Abszolút téridő van tehát, és ezen belül létezik abszolút idő is[20], abszolút tér viszont nincs. Minden vonatkoztatási rendszer saját teret cipel magával, melyből még jobban látszik, hogy mennyi önkényességet jelent és mennyi nemkívánatos, zavaró nyűgöt jelent egy megfigyelőhöz viszonyítani — még egy inerciálishoz is. Mindezekből a gondokból igazából úgy tudnánk kikeveredni, ha rendelkeznénk egy olyan téridő- és mozgásleírással, amelyhez nem kell választani semmilyen segéd-elemet, referencia-akármit, vonatkoztatási bármit.

5. MÓDSZERTAN A PROBLÉMÁK MEGOLDÁSÁHOZ

A jó hír az, hogy rendelkezünk is ilyen leírással. Néhány évvel a speciális relativitáselmélet születése után WEYL ismerte föl először, hogy már a nemrelativisztikus fizikában is szükséges a téridő fogalma, és egyből egy olyan megfogalmazást adott rá, amely megfigyelő, vonatkoztatási rendszer nélkül beszél a téridőről és a benne játszódó mozgásokról, folyamatokról. Ezt a tárgyalást azóta többen gazdagították, például JAGLOM vizsgálta a geométer matematikus szemszögéből [JAGLOM (1969)], ARNOLD ismertette a mechanika művelőivel [ARNOLD (1974)], részletes elvi és gyakorlati kidolgozását pedig MATOLCSI adta meg [MATOLCSI (1984)], [MATOLCSI (1993)].

Ez a tárgyalásmód olyan, ahol a matematikai forma végre pontosan a fizikai tartalmat fejezi ki, nem mást, nem többet és nem kevesebbet. A téridőről a fizika története során kialakult összes tapasztalatunk és konzisztens elképzelésünk helyet kap benne, az így-úgy kialakult inkonzisztens beidegződések pedig nem. A leírás összes matematikai szereplője fizikai tartalommal bír, nincsenek pusztán technikai vagy kényelmi szempontból bevezetett segéd-elemek. Ezzel a látásmóddal a téridő pontosan annak látszik, amit a fizika valójában kiderített róla, és a benne élő szereplők sorsa is közvetlenül fogalmazódik meg és közvetlenül vizsgálható. Kritériummal rendelkezünk arról, hogy mely mozgások inerciálisak, és így tovább.

Hogy GALILEInek és kortársainak térről, időről és relativitásról tett felismerései miért évszázadokkal később nyertek csak korrekt megfogalmazást, arról vélhetőleg leginkább NEWTON tehet. Az ő tömegvonzási elmélete ugyanis pillanatszerű távolhatást tételez fel, és ehhez nem tudott más matematikai keretet elképzelni, mint egy abszolút tér feltételezését [SIMONYI (1978), 227. o.]. Ez a feltételezés pedig „szíven szúrja" a GALILEI-relativitási elvet. Ezt a problémát ő is látta, és LEIBNIZ is joggal bírálta emiatt, de az utókor

[19] A (32) alak a négyesvektornak egy inerciális koordinátarendszer szerinti alakja. Vonatkoztatásirendszer-mentes alakját ld. a következő szakaszban.

[20] Ne feledjük, most csak a nemrelativisztikus jelenségkörben mozgunk.

a newtoni fizika nagy sikerei miatt elfogadta az abszolút tér fogalmát is — jó részük talán az imént említett hétköznapi, Földhöz ragadt beidegződés miatt is —, a GALILEI-féle relativitási elv fontossága pedig csak az elektromágnesség és a speciális relativitáselmélet születése körül került ismét előtérbe.

Kétségtelen, hogy NEWTONt a korabeli matematika fejlettségi szintje akadályozta egy abszolút tértől mentes, a GALILEI-relativitási elvet megvalósító elmélet megadásában. A geometria fogalmának fejlődése egy nemtriviális folyamat volt [FÜLÖP (2008a)], mely szintén a speciális relativitáselmélet megszületése után és az euklideszi sík-/térgeometrián túli geometria megfelelő fejlettségi fokán tudott csak eljutni az olyan affin tér fogalmáig, amelyen nincs egy teljeskörű euklideszi szerkezet, csak egy részleges, van viszont rajta egyéb struktúra is. Ilyen ugyanis a nemrelativisztikus téridő szerkezete, és ilyenen lehetséges megfogalmazni a pillanatszerű távolhatást abszolút tér feltételezése nélkül.[21]

Az affin teres téridőleírás tehát olyan keret, amelyben a közegkinematika garantáltan megvalósítja az anyagi objektivitás elvét és az összes egyéb ismert fizikai kívánalmat is. Minden más ismert leírás pedig szenved a fent említett problémáktól, ezért egyetlen kitörési irány adódik: az affin teres téridő-megfogalmazásban adni meg a közegek mozgásának tárgyalását.

A feladat ekkor az, hogy ebben a téridő-formalizmusban értelmezzük az alakváltozási és deformációtenzort, a rugalmasság és a képlékenyedés kinematikai aspektusait, és még mindent, ami a kontinuumok dinamikájához majd szükséges lesz.

Jelen írás ezt az utat fogja választani. Láttuk, hogy a szokásos leíráshoz felvett segédelemek mennyire elhomályosítják a fizikai lényeget, jószerivel gúzsba kötik az embert, lépten-nyomon belezavarnak a fizikai tisztánlátásba. Ilyen elem a referencia-időpont, a referencia-konfiguráció, a vonatkoztatási rendszer, és ilyen indokolatlan következményük folyadékra és gázra az anyagi sokaság metrikus szerkezete. Ugyanilyen nem-lényegi tetszőlegességek lépnek fel mindig olyankor is, ha térpontokat vektorokkal (helyvektorokkal) reprezentálunk, vektorokat számhármasokkal reprezentálunk, de már az is, ha dimenziós mennyiségeket valós számokkal reprezentálunk, mértékegység-választás révén.

Igen, a mértékegység-választás is egy olyan segéd-mozzanat, ami nem lényegi, és emiatt olykor értelmetlen képletekre vezet. Ha ugyanis mértékegységeket választva, valós számokkal reprezentáljuk a távolságértékeket is és az időtartamokat is, akkor mi akadályoz meg bennünket abban, hogy összeadjunk egy távolágot egy időtartammal? Hiszen valós számok összege értelmezve van. Bizony, csak a fizikai józan ész akadályoz meg, mert tudjuk, hogy ezt azért mégsem helyes megtenni. Formalizmusunk azonban megengedi, és ismeretesek az irodalomban olyan képletek, sőt, nagyívű elméleti konstrukció is,

[21] Amire szükség van, az ugyanis egy picit kevesebb: az abszolút térszerűség fogalma {ld. a következő szakaszt}.

ahol ilyen meg nem engedett lépéseket követtek el. A fizikai józan ész nem kapcsolt be, annyira másra figyeltek az illetők. Az ilyen szarvashibák elkerülésére szintén az a biztos út, ha olyan a formalizmusunk, hogy egyszerűen nem enged meg ilyen hibákat, azaz száműzve van belőle minden segéd-elem, minden szereplő fizikai lényeggel rendelkezik.

A dimenziós mennyiségek kapcsán is, és általában is, nem helyes, ha mindennek a leírásához valós számokat, illetve valós számhármasokat használunk. Sokszor valamilyen hasonló, de kicsit más mennyiségtípusok lennének fizikailag adekvátabbak, például egy vektor, egy affin tér egy pontja, vagy egy sokaság egy pontja lenne a fizikai lényeghez illeszkedő matematikai modell. A valós számok (számhármasok, stb.) olyan tulajdonságokkal is rendelkeznek, amikkel a modellezni kívánt fizikai szereplő nem, és ilyen esetekben a többlet tulajdonságok útakadályként nehezítik a boldogulást.

Ugyanígy például ha azt állapítjuk meg, hogy a bal és a jobb deformációtenzorok fizikailag más jelentésűek — mert egyik fajta az anyaghoz rögzített távolság- és irányviszonyokhoz viszonyít, a másik az inerciális/téridő-viszonyokhoz, és emiatt fizikailag blőd lenne egy bal és egy jobb mennyiség átlagát venni [v.ö. (13)], akkor a bal és a jobb tenzorok legyenek különböző típusú matematikai mennyiségek, amelyekre nincs értelmezve az összeadás, és akkor garantáltan nem lehet az átlagukat venni, a formalizmus automatikusan meg fogja gátolni a fizikailag hibás konstrukciót.

Leírásunkhoz tehát olyan matematikai objektumokat keressünk, amik pont annyit fejeznek ki, ami fizikai tulajdonságokat velük épp ki szeretnénk fejezni: nem többet, nem kevesebbet, nem mást. Pontosabban — és itt egy fontos módszertani megállapítás következik: meg kell különböztetni elvi szerepű-tartalmú és technikai-alkalmazássegítő fogalmakat. Előbbieket a modellünk, a fizikai lényeg megfogalmazásához használjuk, utóbbiakat pedig egy-egy konkrét alkalmazásban, speciális elrendezésben a számolás, a kezelés minél praktikusabb leírásához.

Például a tömegpont-mechanika bolygómozgásos alkalmazásában hasznos speciális fogalom a pályaexcentricitás, általános tömegpont-mechanikai szerepe, jelentése azonban nincs. A kontinuumfizikában a referenciakonfiguráció hasznos technikai segédfogalom számos konkrét feladat analitikus[22] illetve numerikus (pl. végeselemes) megoldásához, elvi szerepe ellenben nincs. A henger-koordinátarendszer igen célszerű hengerszimmetrikus elrendezésekhez, gömbszimmetrikus szituációkban viszont alkalmasabb a gömbi koordinátarendszer, általános elvi tárgyaláshoz pedig a koordinátarendszer-mentes leírás a legjobb.[23]

[22] ld. pl. [Fülöp–Béda (2009)], [Asszonyi–Szarka–Béda (2009)]

[23] Az a felosztás is csak nagyjából igaz, hogy az alkalmazás-oldalon valós számokat, számhármasokat stb. használunk, elvi célokra pedig vektorokat, affin tér elemeit, sokaság pontjait stb. A fizikai mérések például nem mindig számokat adnak eredményül: az iránytű például egy irányt magát mér. Bizonyos számítógépes programok pedig képesek kezelni a dimenziós mennyiségeket is, nem kell mértékegység-választás révén számmal reprezentálni őket.

Az alkalmazások természetesen fontosak, azonban nem az egyedül fontosak: az elmélet megalkotásában nem jó, ha kizárólag az vezérel bennünket, hogy hogyan fogjuk majd tudni alkalmazni. Például ha EINSTEINt az vezette volna az általános relativitáselmélet megalkotása során, hogy hogyan lehet majd elméletét alkalmazni, konkrét szituációkban megoldani, akkor az általános relativitáselmélet — mely alkalmazásokban egy, tíz ismeretlen négyváltozós függvényre vonatkozó, csatolt nemlineáris másodrendű parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldását kívánja meg — bizonyára sohasem született volna meg. Szerencsére EINSTEINt néhány egyszerű fizikai elvárás és észrevétel vezérelte, a megszületett EINSTEIN-egyenlet pedig az alkalmazhatóság terén is kiemelkedően sikeres lett: a fizika máig ismert legnagyobb kísérleti pontossággal igazolt egyenletének bizonyult.[24]

Ezen a ponton arra is érdemes kitérni, hogy egy tudományos elméletnek két fontos szerepe van: a magyarázó erő és a jóserő. Az első az, hogy szeretnénk megérteni az adott szituációt minél jobban. (Ez egyrészt valószínűleg egy általános intellektuális igénye az emberiségnek. Emellett konkrét konstruktív haszna is van: ezáltal tudunk egy elméletet a többihez viszonyítani, kapcsolni, és új elméleteket kidolgozni.) A második pedig az, hogy az elméletet alkalmazni tudjuk tudományos jóslatok kimondására. Mindkét feladatban szempontjából szerepet játszik az elmélet elvi-lényegi alakja is és az alkalmazásai is, de az alkalmazások elsősorban a jóserő kapcsán játszanak nagy szerepet, a magyarázó erőhöz kisebb súllyal járulnak hozzá, mint az elvi-lényegi rész.

Namármost, az elvi oldalon olyan matematikai megfogalmazást alkossunk, aminek lehetőleg minden tulajdonsága megfelel fizikai jelentésnek (mármint közelítőleg, hiszen azt azért ne várjuk, hogy tökéletesen pontos lesz egy modell a valóságra, illetve annak egy szeletére). Ugyanígy a már meglévő elvi munkák is feldolgozandók az irodalomban: ha valaminek nincs elvi szerepe, és ha nélküle is boldogulunk[25], akkor mellőzzük.

Minden elméletről szóló írásnak: cikknek, könyvnek, tankönyvnek helyes lenne feltüntetnie ezt a megkülönböztetést elvi és alkalmazássegítő fogalmak között. Sajnos még az olyan igényességre törekvő művek, mint [TRUESDELL–NOLL (1965)] és [HAUPT (2002)] is keverik a kétfajta fogalmakat, amelynek meg is issza a levét közegkinematikájuk (és bizonyára közegdinamikájuk is). Pedig segítene is az adott terület megértésében és előrehaladásában, ha ezt a megkülönböztetést mindig megadnák, mert így rögtön látnák, hogy hol vannak olyan pontok, ahol egy technikai segéd-elem szerepel, amelyet az elvi

[24] A kettőscsillagok egymás körüli keringési idejének megjósolt — gravitációs hullámokkal kisugárzott energiaveszteség miatti — apró, 10^{-12} nagyságrendű relatív csökkenése 10^{-2} relatív hibával nyert kísérleti megerősítést [FIZIKAI NOBEL-DÍJ SAJTÓKÖZLEMÉNY (1993)]. A keringési idő értelmezésének eme 10^{-14} relatív hibájú pontossága máig lekörözi a részecskefizikában elért eddigi legnagyobb pontosságokat is.

[25] hiszen azért nem mindig olyan kiforrott fizikailag vagy matematikailag kezelhető a helyzet, hogy boldoguljunk bármi technikai segéd-elem nélkül

tárgyalásból el kellene távolítani: megoldandó elvi tennivalókra mutatna rá, orientálná a kutatást.

Jelen írás például a továbbiakban csak az elvi oldallal fog foglalkozni. De csak terjedelmi okokból: folytatásaként egy következő írásműben be kell majd mutatni az itt felállított tárgyalás speciális esetekben egyszerűbb, alkalmazássegítő alakokra átfordítását is.

Ami pedig a fogalmak megadását illeti, az érdemi előrehaladáshoz ajánlatos eltávolítani belőlük minden hallgatólagos feltételezést, magától értetődőnek tartott és ezért ki nem mondott mozzanatot, de a kifelejtett elemeket is fel kell tárni. Ennek az ismert legkonstruktívabb módszertana, melyet többek között MATOLCSI képvisel teljes következetességgel[26], az, hogy az elvi alapvetésben (is) minden fogalom teljesen matematikai legyen, definíciója csupa olyan objektumra hivatkozzon, amely már matematikai definíciót kapott. Így például „A távolságértékek halmazának egy $\mathbb{L}$ egydimenziós valós irányított vektorteret nevezünk.”, vagy „Nemrelativisztikus téridőnek egy $(M, \mathbb{T}, \boldsymbol{\tau}, \mathbb{L}, \boldsymbol{h})$ fogalomötöst nevezünk, ahol M egy négydimenziós valós irányított affin tér, $\mathbb{T}$ az időtartamok egydimenziós valós irányított vektortere, stb.”. A gyakorlatban ez többnyire úgy szokott kinézni, hogy minden fogalom vagy egy halmaz, vagy egy halmazból egy halmazba képező függvény.[27]

Ezért tulajdonképpen könnyű megállapítani, hogy egy — akár rengeteg matematikát használó — írásmű eleget tesz-e ennek a tudománymódszertani kritériumnak. Ha minden fogalma (mármint annak matematikai modellje) egy matematikai definíció, melyben semmi definiálatlan fogalom nincs, az eleget tesz neki. Azonban valóban semmi definiálatlan fogalom ne szerepeljen a definícióban. A már többször említett [TRUESDELL–NOLL (1965)] és [HAUPT (2002)] művekben például definiálatlanok maradnak többek között olyan fogalmak, mint idő, tér, fizikai megfigyelő (így a megkülönböztetés is inerciális és neminerciális megfigyelő között).

Nem valamiféle „rendmániáról”, formális és öncélú igényeskedésről van itt szó. A hétköznapi mondás is azt tartja [BLOCH (1985)]: ha már minden próbálkozás csődöt mondott, olvasd el a használati utasítást! Vagy ahogy POPPER meséli [POPPER (1995)], amikor egy hosszú külföldi tanulmányúton szerzett tapasztalatairól próbált könyvet írni: „Neki is fogtam a könyv megírásának, de rövidesen elakadtam. Hamisnak éreztem azt, ami a papírra került. Bánatomat elkeseregtem egy muzsikus barátomnak, aki elgondolkozott, majd azt mondta: – Tudod, én is jártam már úgy, hogy készültem egy darabra, és nem szólalt meg bennem. Én ilyenkor nekiállok »technikázni«: tökéletesen kigyakorolom a

[26] ld. pl. [MATOLCSI (1984)], [MATOLCSI (1986)], [MATOLCSI (1993)]

[27] A fizikai érzék természetesen szintén fontos szerepet játszik: ott, hogy milyen tulajdonságú matematikai objektumot választunk az adott fizikai objektum modellezésére. Az alábbiak ezt részletesebben is hangsúlyozni fogják.

darabot. És nemegyszer azt tapasztaltam, hogy munka közben életre kelt, amit csináltam, és bennem is megtörtént az, ami a hangszeren.” Ugyanígy, ha egy tudományterület már régóta meg van akadva egy fogalommal vagy problémával, előbb-utóbb nem marad más út: neki kell látni és kitechnikázni az adott dolgot: pontos matematikai megfogalmazást próbálni adni neki.

Nem csak akkor érdemes azonban rendet rakni, amikor már sehogy se boldogulunk a rendrakás nélkül, hanem jó, ha általában is állandó, folyamatos munkastílusunkká válik, hogy mindig mindent rendes matematikával fogalmazunk meg. A tapasztalat ugyanis azt mutatja, hogy amikor a fizikában valamit nem sikerül matematikailag pontosan megfogalmazni, akkor azt fizikailag sem értjük. Ezért egy produktív állandó önellenőrzési módszer az, ha mindig minden fogalmat pontos matematikával sikerül megadni.

Ez a tapasztalat, mely egy érdekes megfigyelés, tulajdonképpen viszonylag érthető is. A matematika ugyanis nem más, mint az emberiség eddig ismert legalaposabb, legszisztematikusabb gondolkodási formája. Ha valamit nem sikerül ebbe a keretbe beilleszteni, arról valószínűleg még nem vagyunk képesek elég konzisztensen gondolkodni.

Egy fizikai elmélet pontos matematikai megfogalmazása emellett azért is praktikus, mert onnantól kezdve tudjuk, hogy konkrét feladatok megoldására milyen (egzakt és közelítő) módszereket használhatunk, a matematika eszköztárában mikhez nyúlhatunk. Egy matematikai tételre úgyis csak akkor támaszkodhatunk, ha a tételhez felsorolt feltételek biztosítva vannak. Természetesen felmerülhetnek olyan nehéz matematikai problémák, amikre még nem ismeretes megoldás, amikor az általunk bevezetett, céljainkra alkalmasnak talált matematikai fogalmak tulajdonságairól még nem rendelkezünk elegendő tudással. Ilyenkor jogunk van sejtéseket megfogalmazni, és azokkal haladni tovább. Ilyen esetekben azonban végeredményeinknél fel kell tüntetni, hogy azok is csak sejtések, és hogy mely feltételezéseink teljesülése igazolná őket.

A teljes — esetleg csillogó — matematikai megfogalmazás azonban önmagában kevés. Az is szükséges, hogy az általa megfogalmazott fizikai tartalom fizikailag helytálló legyen (legalábbis modellünk érvényességi körén belül, egy elfogadható pontosságú közelítés erejéig). Rossz fizikai tartalmon annak pedáns matematikai megfogalmazása nem javít. Léteznek olyan szerzők és olyan írásművek, akik ill. amelyek a ló túlsó oldalára esnek-csúsznak át: formalizmusuk precíz, ám a fizikai tartalom kérdéses, vagy explicite hibás. A matematikai modellezésnek két oldala van: a valóság és a matematika. Tiszteljük a valóságot, annak minél hűbb figyelembe vételére törekedjünk. Másrészt, a valósághoz rendelt — annak egy részéhez rendelt, egy adott pontosságig elfogadható — modellünk teljesen matematikai módon legyen megfogalmazva. A ló hátán, középen üljünk, nem pedig az egyik, és nem a másik oldalára lecsúszva.

Egy mérnök, egy tudós annak a felelősségének is tudatában kell legyen, hogy munkáján emberi életek és rengeteg emberi erőfeszítés értelme múlik. Csak egyetlen példát említve: 2009 júliusában szinte teljesen leállt a 300 kilométeres német S-Bahn gyorsvasúthálózat [INDEX.HU (2009-10)]. Az egyik szerelvény kerekén ugyanis törést észleltek, majd ezt követően elrendelték az összes vonat valamennyi kerekének ellenőrzését. A vizsgálat során bebizonyosodott, hogy a kocsik kétharmadát ki kell vonni a forgalomból és a kerekeket biztonsági okokból sürgősen ki kell cserélni. Várhatóan legalább másfél évig nem áll helyre a menetrend, az okozott közlekedési káosz legalább egymillió embert érint naponta, és csupán az utasok kártalanítása több, mint százmillió euróba kerül. A kerekek törékenységének valószínű oka pedig az, hogy készítési eljárásuk egy újfajta — és a jelek szerint hibás — képlékenységi elméleten alapult [MEZEI (2008)]. Ezt a felelősséget észben tartva kell arra törekednünk, hogy az elméletek az adott szituáció összes releváns fizikai aspektusát lefedjék, és teljesen következetes, szisztematikus gondolati konstrukciók legyenek.

6. A SZÜKSÉGES ESZKÖZÖK, ÉS AMIKHEZ SZÜKSÉGESEK

Tekintsük most át azokat a matematikai eszközöket, amelyekre szükségünk lesz a közegkinematikához az imént megfogalmazott módszertannak megfelelően, és egyből lássuk is fizikai alkalmazásuka: hogy melyik milyen célra is kell majd. Az itt célirányosan összefoglaltakon túli részleteket például a 26. lábjegyzetben hivatkozott művekben találhatjuk meg.

6.1. VEKTORTEREK ÉS ALKALMAZÁSAIK

Első hasznos eszközünk a vektortér lesz (nevezik lineáris térnek is). Egy valós vektortér olyan halmaz, melynek elemeire értelmezve van az összeadás és a valós számmal való szorzás, és ezek a műveletek eleget tesznek bizonyos kellemes műveleti tulajdonságoknak[28]. Egy véges m dimenziós vektortéren kiválasztható[29] m darab lineárisan független nemnulla vektor, ezek bázist alkotnak, azaz a vektortér bármely eleme előáll ezek egy bizonyos lineárkombinációjaként. A bázisok sodrásirány szerint kétfélék lehetnek, ha egyiket kiválasztottuk pozitív sodrásiránynak, akkor irányítottá tettük a vektorteret. Egy egydimenziós vektortéren — mely szemléletesen egy „origóval ellátott egyenes”, és melyen egy bázis egyetlen nemnulla vektort jelent —, az irányítás megadása arra egyszerűsödik, hogy a vektortér egyik felét nevezzük ki pozitívnak, tehát az egyik „félegyenes” elemeit nevezzük ki a pozitívaknak, -1-szereseik lesznek a negatív elemek.

Egy m dimenziós $\boldsymbol{U}$ és egy n dimenziós $\boldsymbol{V}$ vektortér diadikus vagy tenzorszorzata, $\boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{V}$ egy mn dimenziós vektortér. Rajta az $\boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{v}_j$ vektorok

[28] ld. asszociativitás, disztributivitás, kommutativitás
[29] messze nem egyértelmű módon: folytonosan végtelen sok lehetőség van

$(i = 1, 2, \dots m;\ j = 1, 2, \dots n)$ egy bázist adnak meg, ha $\boldsymbol{u}_i$-k egy bázis $\boldsymbol{U}$-n és $\boldsymbol{v}_j$-k egy bázis $\boldsymbol{V}$-n. Egy m dimenziós $\boldsymbol{U}$ és egy egydimenziós $\boldsymbol{W}$ vektortér diadikus vagy tenzoriális hányadosa, $\boldsymbol{U} /\!\!/ \boldsymbol{W}$ egy m dimenziós vektortér. Rajta az $\boldsymbol{u}_i /\!\!/ \boldsymbol{w}$ vektorok $(i = 1, 2, \dots m)$ egy bázist adnak meg, ha $\boldsymbol{u}_i$-k egy bázis $\boldsymbol{U}$-n és $\boldsymbol{w}$ egy bázis $\boldsymbol{W}$-n. Ez a tenzoriális osztás a vektorok valós számokkal osztásának értelemszerű kiterjesztése.[30] Az egydimenziós vektorterekkel vett tenzorszorzás kommutatív: $\boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{W} = \boldsymbol{W} \otimes \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{u}$. Mivel az irányított egydimenziós vektorterek ugyanúgy viselkednek a tenzorszorzásra és -osztásra vonatkozóan, mint a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza, a továbbiakban a valós számok halmazához hasonlóan üreges betűs jelölést kapnak, pl. $\mathbb{W}$, és röviden mértékegyeneseknek is fogjuk hívni őket[31].

Értelemszerű módon definiálható mértékegyenesek tenzoriális hatványa, pl. $\mathbb{W}^{(2)} := \mathbb{W} \otimes \mathbb{W}$, ám nemcsak pozitív egész, hanem tetszőleges valós kitevőre is, így a tenzoriális gyökvonások is értelmesek. Az egydimenziós $\mathbb{W}$ p-edik tenzoriális hatványa, $\mathbb{W}^{(p)}$ egydimenziós, és elemei rendelkeznek az elvárt $(\lambda \boldsymbol{w})^{(p)} = \lambda^p \boldsymbol{w}^{(p)}$ tulajdonsággal, minden λ pozitív valós számra. Kiderül, hogy $\mathbb{W}^{(-1)} = \mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{W} = \mathbb{W}^*$ (itt * a duális vektorteret jelöli, definícióját ld. hamarosan).

Ha $\boldsymbol{A}$ egy $\boldsymbol{U}$-ból $\boldsymbol{V}$-be ható lineáris leképezés, jelöléssel $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{V}$, akkor természetes, kitüntetett, egyértelmű módon tartozik hozzá egy $\boldsymbol{U} \otimes \mathbb{W} \to \boldsymbol{V} \otimes \mathbb{W}$ lineáris leképezés (ugyanis ha $\boldsymbol{A}$ egy $\boldsymbol{u}$-t $\boldsymbol{v}$-be visz, jelöléssel $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{v}$, akkor ehhez az $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{w} \mapsto \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$ leképezés tartozik), mely leképezést jelölhetünk szintén $\boldsymbol{A}$-val. Így természetesen minden p-vel is mondható, hogy $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{U} \otimes \mathbb{W}^{(p)} \to \boldsymbol{V} \otimes \mathbb{W}^{(p)}$.

A véges m dimenziós $\boldsymbol{U}$ vektortér kovektorainak a $\boldsymbol{k} : \boldsymbol{U} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezéseket nevezzük. $\boldsymbol{U}$ összes lehetséges kovektorának halmaza egy szintén m dimenziós vektorteret alkot, jele $\boldsymbol{U}^*$, neve $\boldsymbol{U}$ duálisa. Egy $\boldsymbol{U}$-beli $\boldsymbol{u}_i$ $(i = 1, 2, \dots m)$ vektorok alkotta bázis duális bázisa az az egyértelmű módon létező, $\boldsymbol{k}^j$ $(j = 1, 2, \dots m)$ vektorok alkotta bázis $\boldsymbol{U}^*$-ban, melyre $\boldsymbol{k}^j(\boldsymbol{u}_i) = \delta_i^j$, ahol δ_i^j a KRONECKER-delta. A lineáris leképezések hatása a továbbiakban zárójel nélkül lesz jelölve („szorzat jelölés”), tehát pl. $\boldsymbol{k}^j \boldsymbol{u}_i = \delta_i^j$.

$\boldsymbol{U}$ duálisának duálisa természetes módon azonosítható az eredeti $\boldsymbol{U}$-val, tehát mondhatjuk, hogy $(\boldsymbol{U}^*)^* = \boldsymbol{U}$, mert minden $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$ egyben $\boldsymbol{U}^*$ egy kovektora is, $\boldsymbol{uk} := \boldsymbol{ku}$ módon hatva minden $\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{U}^*$-ra, és $\boldsymbol{U}^*$ minden kovektora egy $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$. Egy $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{V}$ lineáris leképezéshez egyértelmű, kitüntetett módon tartozik egyrészt egy bilineáris $\boldsymbol{V}^* \times \boldsymbol{U} \to \mathbb{R}$ leképezés[32], másrészt $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{U}^*$ egy eleme. Mindkettejüket szintén egyszerűen $\boldsymbol{A}$-nak jelölhetjük. Ezek a megfeleltetések, azonosítások könnyen szemléltethetőek azzal, hogy egy mátrixra is három módon nézhetünk rá. Egyrészt egy kétváltozós függvényként

[30] Megjegyzés: a tenzoriális hányadosnak nincs köze ahhoz, amikor egy vektorteret egy alterével faktorizálunk, noha a két művelet jelölése hasonló.

[31] Az elnevezés eredete az a fizikai alkalmazásuk, mely hamarosan bemutatásra kerül.

[32] $\times$ itt a halmazok DESCARTES-szorzatának a jele.

— balról egy sor-, jobbról egy oszlopmátrixszal szorozva. Másrészt egy vektorból vektort készítő függvényként — jobbról egy oszlopmátrixszal szorozva egy oszlopmátrixot kapunk. Harmadrészt egy diadikus/tenzori szorzatként — egy oszlopmátrix és egy sormátrix diadikus szorzataként (vagy több ilyen összegeként).

Az $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{V}$ lineáris leképezés duális transzponáltja az az $\boldsymbol{A}^* : \boldsymbol{V}^* \to \boldsymbol{U}^*$ lineáris leképezés, mely $\boldsymbol{\ell} \mapsto \boldsymbol{\ell} \circ \boldsymbol{A}.$ A kompozíció (összetett függvény) $\circ$ jele lineáris leképezések kompozíciója esetén a továbbiakban el lesz hagyva (szintén „szorzat jelölés"). Tehát $\boldsymbol{A}^* : \boldsymbol{\ell} \mapsto \boldsymbol{\ell A},$ azaz $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\ell} : \boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{\ell A u} \in \mathbb{R}.$ Leképezések szorzatának (vagyis igazából kompozíciójának) a duálisa a duálisok fordított sorrendű szorzata (kompozíciója): $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*.$

Ha egy $\boldsymbol{C}$ lineáris leképezés $\boldsymbol{U}$-ból $\boldsymbol{U}^*$-ba hat, akkor $\boldsymbol{C}^* : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{U}^*,$ és ilyenkor értelmezhető $\boldsymbol{C}$ szimmetrikus része, $\boldsymbol{C}^{\mathrm{S}} := \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}^*),$ és antiszimmetrikus része, $\boldsymbol{C}^{\mathrm{A}} := \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}^*).$ Egy ilyen $\boldsymbol{C}$ szimmetrikus, ha antiszimmetrikus része nulla, és antiszimmetrikus, ha szimmetrikus része nulla. $\boldsymbol{U}$-ból $\boldsymbol{U}$-ba ható lineáris leképezésnek *nem értelmezhető* a szimmetrikus és antiszimmetrikus része, szimmetrikussága, antiszimmetrikussága. A tr leképezés ellenben $\boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{U}^*$ és $\boldsymbol{U}^* \otimes \boldsymbol{U}$, azaz $\boldsymbol{U} \to \boldsymbol{U}$ és $\boldsymbol{U}^* \to \boldsymbol{U}^*$ típusú tenzorokra értelmes, és speciálisan $\mathrm{tr}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{k}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{ku} = \boldsymbol{uk}.$

Egy $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^*$ szimmetrikus lineáris leképezés skalárszorzat (más néven: metrika) $\boldsymbol{E}$-n, ha minden nemnulla $\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{E}$-re $(\boldsymbol{Ge})\boldsymbol{e} > \boldsymbol{0}.$ Ilyenkor $\boldsymbol{E}$-t euklideszi térnek nevezzük, $\boldsymbol{G}$-re vonatkozóan. Egy skalárszorzat invertálható, és inverze, $\boldsymbol{G}^{-1} : \boldsymbol{E}^* \to \boldsymbol{E}$ egy skalárszorzat $\boldsymbol{E}^*$-n. A fentebbiek értelmében $\boldsymbol{G}$ felfogható egy bilineáris $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}$ leképezésként és $\boldsymbol{E}^* \otimes \boldsymbol{E}^*$ egy elemeként is, $\boldsymbol{G}^{-1}$ pedig egy bilineáris $\boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{E}^* \to \mathbb{R}$ leképezésként és $\boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{E}$ egy elemeként is.

A $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^*$ skalárszorzat egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít $\boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{E}^*$ elemei között. Ezért nem szokás egy euklideszi tér kovektorairól beszélni: mert a skalárszorzat révén azonosítani szokták a vektoraival. Mi most ne kövessük ezt a gyakorlatot, mert a következő szakaszokban olyan vektorterekkel lesz dolgunk, melyeken egyetlen skalárszorzat helyett két különböző skalárszorzat is fel fog bukkanni, melyek különböző módon fognak megfeleltetést jelenteni $\boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{E}^*$ elemei között — és akkor inkább már egyiket se válasszuk.

Egy $\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{E}$ vektornak a $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}$ skalárszorzat szerinti hossza az $\|\boldsymbol{e}\|_{\boldsymbol{G}} := \\ = \sqrt{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e})} \in \mathbb{R}_0^+$ (itt $\mathbb{R}_0^+$ a nemnegatív valós számokat jelöli). A $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^*$ alakkal megadva ugyanez az $\|\boldsymbol{e}\|_{\boldsymbol{G}} := \sqrt{(\boldsymbol{Ge})\boldsymbol{e}} \in \mathbb{R}_0^+$ módon írható. Az $\boldsymbol{e}$ és $\boldsymbol{f}$ által bezárt szög:

$$\varphi := \arccos \frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})}{\|\boldsymbol{e}\|_{\boldsymbol{G}} \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{G}}}, \tag{34}$$

és speciálisan $\boldsymbol{e}$ és $\boldsymbol{f}$ merőlegesek, ha $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}) = 0.$ Szemléletformáló az az észrevétel, hogy ha egy vektortéren nincs skalárszorzat megadva, akkor nem beszélhetünk vektorok merőlegességéről. Két vektor lehet lineárisan független egymástól, de a lineárisan független helyzetek között nincs egy kitüntetett, merőleges helyzet. Két vektor bezárt szöge sem értelmezhető skalárszorzat nélkül. Ugyanígy nincs vektoroknak hossza sem, mindössze olyan vektorok „hosszarányáról” tudunk beszélni, melyek egymás számszorosai.

Mint az elhangzott, egy $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ lineáris leképezésnek nem létezik szimmetrikus és antiszimmetrikus része. Egy $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^*$ skalárszorzat segítségével azonban értelmezhető az $\boldsymbol{A}^+ := \boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{G} : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ metrikus adjungáltja, és az ezzel definiált metrikusan szimmetrikus és antiszimmetrikus rész. Láthatjuk tehát, hogy amikor egy euklideszi téren egyszerűen „transzponáltról” beszélnek, amögött két dolog is lehet: a duális transzponált (mely nem támaszkodik a vektortér skalárszorzat szerkezetére), és a metrikus adjungált (amely támaszkodik). Ha az $\boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{E}^*$ közötti azonosítást feloldjuk, az addig egyféle $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ lineáris leképezések (tenzorok) négy különböző fajtájú mennyiségnek bizonyulhatnak: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^*$, $\boldsymbol{E}^* \to \boldsymbol{E}$ vagy $\boldsymbol{E}^* \to \boldsymbol{E}^*$ típusú mennyiségnek. Ezek közül az elsőnek és a negyediknek nem beszélhetünk szimmetrikusságáról, antiszimmetrikusságáról, csak metrikus szimmetrikusságáról, metrikus antiszimmetrikusságáról. Amivel nincs is baj, ha van egy kitüntetett skalárszorzatunk erre a célra. Ha viszont két különböző skalárszorzatunk is mutatkozik, akkor már el kell gondolkoznunk, hogy mit is akarunk csinálni. Sajátérték-problémája ellenben csak $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{E}^* \to \boldsymbol{E}^*$ leképezéseknek van — mert a sajátvektor valahányszorosát kell visszakapnom, tehát ugyanabba a vektortérbe kell visszaérkezzek.

Az $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}$ bilineáris, szimmetrikus, pozitív definit leképezések általánosításaként az $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \to \mathbb{W}^{(2)}$ bilineáris, szimmetrikus, pozitív definit leképezések is skalárszorzatok, ahol $\mathbb{W}$ egy mértékegyenes. A fentiek értelmében ezek egyben $(\boldsymbol{E}/\!\!/\mathbb{W}) \times$ $\times\, (\boldsymbol{E}/\!\!/\mathbb{W}) \to \mathbb{R}$ leképezések is, és így $\boldsymbol{E}/\!\!/\mathbb{W} \to (\boldsymbol{E}/\!\!/\mathbb{W})^*$ leképezések is és $(\boldsymbol{E}/\!\!/\mathbb{W})^*$ $*\otimes (\boldsymbol{E}/\!\!/\mathbb{W})^*$ -beli elemek is. Egy $\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{E}$ vektornak a $\boldsymbol{H} : \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \to \mathbb{W}^{(2)}$ skalárszorzat szerinti hossza az $\|\boldsymbol{e}\|_{\boldsymbol{H}} := \sqrt{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{e})} \in \mathbb{W}_0^+$, azaz nemnegatív $\mathbb{W}$ értékű mennyiség. A $\boldsymbol{H} : \boldsymbol{E}/\!\!/\mathbb{W} \to (\boldsymbol{E}/\!\!/\mathbb{W})^*$ alakkal megadva ugyanez az $\|\boldsymbol{e}\|_{\boldsymbol{H}} := \sqrt{(\boldsymbol{H}\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}} \in \mathbb{W}_0^+$ módon írható.

Az eddig elhangzottak első alkalmazásaként a dimenziós fizikai mennyiségek matematikai modelljét adhatjuk meg. Vegyük példaként a távolságértékek halmazát. Ha az erdőben vagy parkban sétálva találunk egy botot, ennek a botnak a hossza önmagában egy fizikai realitás. Van értelme két bot hosszának az összegének: egymás mögé, egymás meghosszabbításaiként egy egyenesbe teszük őket. Van értelme egy bothossz egész számú többszörösének és törtrészének, és ésszerű absztrakcióval — és jóformán tetszés szerinti pontosságú gyakorlati eljárással — származtatva egy hossz tetszőleges valós számszorosának. Választhatunk egy hosszat egységként, ekkor bármely hossz megadható azzal a valós számmal, ahányszorosa egységünknek. Egységnek választhatjuk például egy uralkodó alkarhosszát, bolygónk Egyenlítőjének valahanyadrészét, vagy egy előírt számú szilíciumatom alkotta egykristály gömb sugarát, de ezek egyike se univerzálisan kitüntetett másikukhoz képest.

A fentiek fényében ésszerű a távolságértékek halmazát egy $\mathbb{L}$ egydimenziós valós irányított vektortérrel, rövidebb nevén mértékegyenessel modellezni. (A mértékegyenes elnevezés eredete tehát az, hogy egy ilyen halmaz célszerűen használható fizikai mennyiségek, mérési értékek matematikai modelljeként.) A mértékegység-választást egy bázisvektor választása modellezi, a mértékegységváltást egy bázisváltás. Az időtartamokat modellezze egy másik, $\mathbb{T}$ mértékegyenes. Ekkor nincs értelmezve — fizikailag helyesen — egy $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{L}$ és egy $\boldsymbol{t} \in \mathbb{T}$ érték összege, értelmezve van viszont — fizikailag szintén helyesen — szorzatuk, $\boldsymbol{\ell} \otimes \boldsymbol{t}$ és hányadosuk, $\boldsymbol{\ell} /\!\!/ \boldsymbol{t}$. Ez a szorzat és hányados teljesíti a fizikai érzék szerint elvárt műveleti szabályokat, pl. $(\boldsymbol{\ell}_1 + \boldsymbol{\ell}_2) /\!\!/ \boldsymbol{t} = \boldsymbol{\ell}_1 /\!\!/ \boldsymbol{t} + \boldsymbol{\ell}_2 /\!\!/ \boldsymbol{t}$, $(\alpha \boldsymbol{\ell}) /\!\!/ (\beta \boldsymbol{t}) = (\alpha / \beta) (\boldsymbol{\ell} /\!\!/ \boldsymbol{t})$.

A mértékegyenes változójú, és a mértékegyenes értékű függvények analízise (folytonosság, deriválás, integrálás, műveleti szabályaik) ugyanúgy zajlik, mint az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeké. Automatikusan teljesül minden olyan elvárásunk, hogy például egy $\mathbb{T} \to \mathbb{L}$ függvény —pl. egy távolság az eltelt idő függvényében — deriváltja $\mathbb{L} /\!\!/ \mathbb{T}$ értékű, tehát sebesség dimenziójú.

6.2. Affin terek és alkalmazásaik

Ahogyan egy vektortér szemléletesen egy origóval ellátott egyenes (origóval ellátott sík, origóval ellátott tér, stb.), úgy az affin tér az origóválasztás nélküli, „szűz” egyenes (sík, tér, stb.) fogalma.[33] Maga a színtiszta egyenletesség.

Minden affin tér egy vektortér segítségével definiálódik, egy vektortér tartozik hozzá. Ezt a vektorteret az affin tér alulfekvő vektorterének is nevezik. Szemléletesen szólva, egy affin tér bármely két eleme (pontja) közé behúzható egy vektor, az alulfekvő vektortér egy egyértelműen meghatározott eleme. Ugyanezt egy kicsit máshogy nézve, ha az affin térnek bármelyik pontját megragadjuk, onnan mint origóból nézve egy vektortérnek néz ki — mégpedig ugyanannak a vektortérnek, az alulfekvő vektorterének fog kinézni. Ez után a barátkozó bevezető után lásuk a pontos definíciót is: affin térnek nevezünk egy $(U, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{d})$ fogalomhármast, ahol U egy nemüres halmaz, $\boldsymbol{U}$ egy vektortér, $\boldsymbol{d}$ pedig egy

[33] Annyira vigyázzunk csak ezeknél az egyébként kiváló szemléltetéseknél, hogy az origóval ellátott papírlapunk síkján, az origóból húzott irányított szakaszainknak fizikailag van merőlegességük, bezárt szögük és hosszuk, míg a vektorterek közül ezek csak az euklideszi vektorterekre léteznek. Az egyéb vektorterek szemléltetéséhez el kell feledkeznünk papírlapunk euklideszi tulajdonságairól. Ugyanígy affin térből is van euklideszi is és euklideszi szerkezet nélküli is, mint azt mindjárt látni fogjuk.

$U \times U \to \boldsymbol{U}$ leképezés, melyre

$$\boldsymbol{d}(p,q) + \boldsymbol{d}(q,r) = \boldsymbol{d}(p,r) \tag{35}$$

minden $p, q, r \in U$-ra, továbbá minden $p \in U$-ra a $q \mapsto \boldsymbol{d}(p,q)$ leképezés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés U és $\boldsymbol{U}$ között.

$\boldsymbol{U}$ tehát az alulfekvő vektortér, és $\boldsymbol{d}$ húzza be a vektort (különbségvektort) az affin tér két pontja közé. A rövidség kedvéért U-t magát szokás az affin térnek hívni, de persze mindig ott kell legyen hozzá az $\boldsymbol{U}$ alulfekvő vektortér és a $\boldsymbol{d}$ „vektorbehúzó leképezés" is.

Az U affin tér dimenziója definíció szerint $\boldsymbol{U}$ dimenziója. Ha $\boldsymbol{U}$ irányított, akkor U-t is irányítottnak nevezzük. Hasonlóan, U euklideszi affin tér, ha $\boldsymbol{U}$ euklideszi vektortér. Ha nem, nem.[34] Minden $\boldsymbol{U}$ vektortér egyben egy affin tér is önmaga mint alulfekvő vektortér fölött, a $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) := \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}$ vektorkivonással mint vektorbehúzó leképezéssel. Úgymond úgy lesz egy vektortér affin tér, hogy eldobjuk belőle az origó kitüntetett voltát. (Persze az igazán izgalmas affin terek azok, melyek nem vektorterek.)

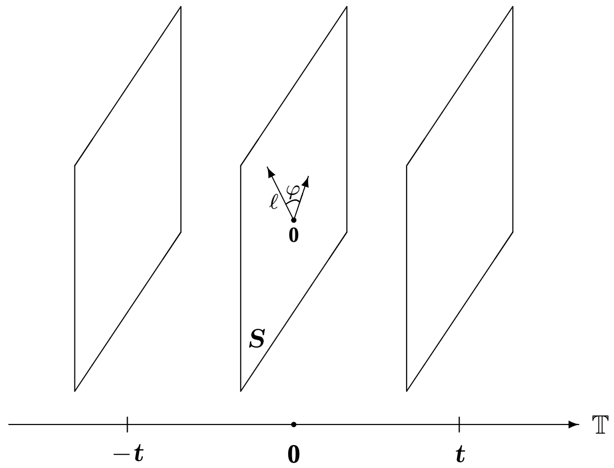
Az affin tér fogalma azért szükséges jelen céljainkhoz, mert segítségével adható meg a nemrelativisztikus téridőmodell. A nemrelativisztikus téridő tulajdonságairól [Fülöp (2008a)] adott egy ismertetőt, ott egy inerciális koordinátarendszer szerinti koordinátákkal szemlélve. Most a vonatkoztatásirendszer-mentes tárgyalás következik. Nemrelativisztikus téridőmodellnek nevezünk egy $(M, \mathbb{T}, \boldsymbol{\tau}, \mathbb{L}, \boldsymbol{h})$ fogalomötöst, ahol M egy négydimenziós valós irányított affin tér egy $\boldsymbol{M}$ vektortér fölött, $\mathbb{T}$ az időtartamok mértékegyenese, $\boldsymbol{\tau}$ egy $\boldsymbol{M} \to \mathbb{T}$ nemelfajuló lineáris leképezés, $\boldsymbol{S}$ jelöli $\boldsymbol{M}$-nek azt a háromdimenziós alterét, melyen $\boldsymbol{\tau}$ a nulla értéket veszi föl, $\mathbb{L}$ a távolságértékek mértékegyenese, $\boldsymbol{h}$ pedig egy $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S} \to \mathbb{L}^{(2)}$, azaz $\boldsymbol{S}/\!\!/\mathbb{L} \to (\boldsymbol{S}/\!\!/\mathbb{L})^*$ skalárszorzat.

Értelmezve mindazt, ami itt elhangzott: M elemei a téridőpontok, hely- és időszempontból pontszerű „lehetőségek arra, hogy valami itt és ekkor történjen".[35] Két ilyen közé lehet behúzni egy téridővektort. $\boldsymbol{\tau}$ minden téridővektorhoz egy időtartamot rendel, úgymond minden téridővektornak megmondja az „idő szempontú tulajdonságát" — ez nem valamifajta merőleges vetület ($\boldsymbol{M}$ nem egy euklideszi tér! nincs rajta egy négydimenziós skalárszorzat!), hanem csak egy valamifajta aspektusa, egydimenziós jellemzője a téridővektoroknak: az idő szempontú aspektusa. A nulla idő aspektusú téridővektorok neve térszerű vektor, a többiek az időszerű vektorok (jövőszerűek ill. múltszerűek, az idő aspektus előjelétől függően). Csak a térszerű vektorok $\boldsymbol{S}$ halmazán van egy euklideszi szerkezet, $\boldsymbol{h}$, mely távolságnégyzet dimenziójú, tehát minden térszerű vektorhoz egy távolság dimenziójú hosszot rendel. Bármely $\boldsymbol{t}$-re az $\boldsymbol{t}$ időtartamú téridővektorok egy affin

[34] És akkor itt tekintsünk vissza az előző, 33. lábjegyzetre.

[35] A téridő nem események, történések halmaza, hanem csak a történések színtere, kerete, egyfajta háttérszerkezet. A vászon, amire a festmény készülhet.

hipersíkot alkotnak $\boldsymbol{M}$-ben, minden ilyen affin hipersík egy háromdimenziós euklideszi affin tér az $\boldsymbol{S}$ alulfekvő vektortérrel és annak $\boldsymbol{h}$ skalárszorzatával. $\mathbb{T}$ tehát nem egy egydimenziós altere $\boldsymbol{S}$-nek, hanem $\boldsymbol{\tau}$ úgymond felszeleteli $\boldsymbol{M}$-et párhuzamos szeletekre, egy csíkozást fest rá, $\mathbb{T}$ pedig ennek a csíkozásnak a színskálája (képzeljük el, hogy minden csík a szivárvány színspektrumának egy-egy különböző színét kapja).

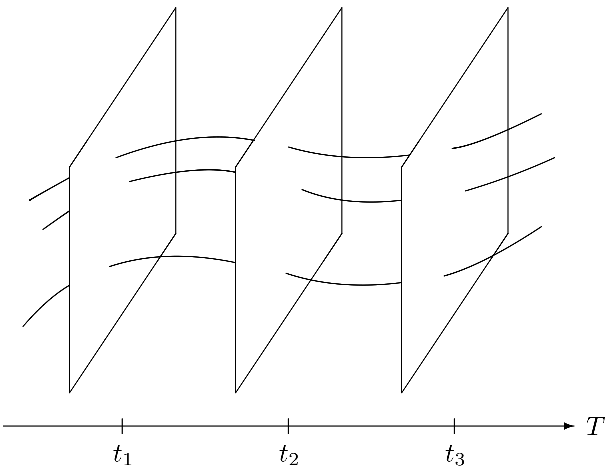


1. ábra. A nemrelativisztikus téridővektorok halmazának ($\boldsymbol{M}$) szemléltetése

$\boldsymbol{M}$ duálisa, $\boldsymbol{M}^*$ nem azonosítható $\boldsymbol{M}$-el, mert $\boldsymbol{M}$-en nincs egy négydimenziós euklideszi szerkezetünk. Egy $\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{M}^*$ téridő-kovektor ugyebár definíció szerint $\boldsymbol{M} \to \mathbb{R}$, mely függvénynek a megszorítása az $\boldsymbol{M}$-nek az $\boldsymbol{S}$ részhalmazára $\boldsymbol{S} \to \mathbb{R}$, azaz eleme $\boldsymbol{S}^*$-nak. Jelölje $\boldsymbol{\eta}$ ezt a megszorítást, azaz azt az $\boldsymbol{M}^* \to \boldsymbol{S}^*$ lineáris leképezést, mely minden téridő-kovektorhoz az $\boldsymbol{S}$-re megszorítottját rendeli. Így $\boldsymbol{\eta}^* : \boldsymbol{S} \to \boldsymbol{M}$, mely nem más, mint az a triviális leképezés, ami minden térszerű vektorhoz megmondja, hogy ő melyik $\boldsymbol{M}$-beli vektor (azaz önmaga), tehát $\boldsymbol{M}$ identitás-leképezésének $\boldsymbol{S}$-re vett megszorítása.

$\boldsymbol{M}$ szerkezete öröklődik M-re. Két téridőpontot egyidejűnek hívunk, ha térszerű vektor köti őket össze. Az egymással egyidejű téridőpontok háromdimenziós euklideszi affin altereket rajzolnak ki M-ben az $\boldsymbol{S}$ alulfekvő euklideszi vektortér fölött. A „felszeletelés, csíkozás” tehát öröklődik M-re. Egy ilyen térszerű affin alteret nevezünk egy időpontnak. Az időpontok halmazát — tehát ezeknek az affin altereknek, szeleteknek a halmazát — T-vel jelöljük, mely egy egydimenziós irányított affin tér $\mathbb{T}$ fölött. Az időpillanatok tehát nem valami elemi, „pici” objektumok, hanem térszerű irányban nagyon is kiterjedt objektumok: mindazon téridőpontok, melyek egymással egyidejűek.

Egy pontszerűnek tekinthető fizikai objektum mozgását, helyesebben téridőben való létezését egy világvonal modellezi: egy világvonal egy jövőszerű folytonos és kellően sokszor differenciálható görbe a téridőn (jövőszerű: minden érintővektora jövőszerű). A világvonal tehát egy pontszerű létező sorsát, annak téridő-lenyomatát modellezi (ki milyen „csíkot húz” a téridőn, élete folyamán).



2. ábra. Az M nemrelativisztikus téridő, az időpontok, és a világvonalak

A világvonalak kitüntetett és kényelmes módon paraméterezhetőek a T idővel: az így paraméterezett világvonalakat világvonalfüggvényeknek hívjuk, melyek tehát $T \to M$ függvények. Mégpedig nem is akármilyenek: minden pontban az érintővektoruk, melyet abszolút sebességnek vagy négyessebességnek nevezünk, olyan, hogy a $\boldsymbol{\tau}$ leképezés (mely $\boldsymbol{M} \to \mathbb{T}$, ezért egyben ugye $\boldsymbol{M} /\!\!/ \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ is,) az 1 értéket adja rájuk. A négyessebességek tehát olyan elemei $\boldsymbol{M} /\!\!/ \mathbb{T}$-nek, amelyek nemcsak hogy jövőszerűek, de 1 $\boldsymbol{\tau}$-júak. Az ilyen vektorok halmazát $V(1)$-nek fogjuk jelölni, mely egy háromdimenziós euklideszi affin tér $\boldsymbol{S} /\!\!/ \mathbb{T}$ fölött.

Egy kiterjedt anyagi objektum, egy folytonos anyagi közeg sok anyagi pontból áll, melyek teljesen sűrűen helyezkednek el egymás mellett. Ennek modellje az lesz, hogy úgymond teljesen sűrűn egymás mellé pakolunk egymást nem metsző világvonalakat. Egy ilyen világvonalmezőnek tekinthetjük az érintővektorait, azaz minden téridőponthoz hozzárendeljük azt a négyessebesség-értéket, amennyi az adott téridőponton áthaladó világvonal ottani érintő négyessebessége. Egy $M \to V(1)$ négyessebesség-mező rajzolódik tehát ki.[36] Fordítva is eljárhatunk: veszünk egy kellően sokszor differenciálható négyessebesség-mezőt a téridőn, és tekintjük ennek integrálgörbéit, azaz azon világvonalak seregét, mely világvonalfüggvények érintő négyessebességei az ott előírt négyessebesség-értéket. A két út ekvivalens, és utóbbi matematikailag kényelmesebb és egyszerűbb megfogalmazás, ezért egy folytonos közeg sorsának modelljét egy téridőn vett négyessebesség-mezővel fogjuk megadni.

[36] Ha közegünk nem tölti ki az egész téridőt, akkor a négyessebesség-mező is csak egy összefüggő részhalmaza M-nek.

Minden vonatkoztatási rendszer, (téridő-)megfigyelő is egy ilyen anyagi közeg valójában. Ha a valóságban nem is töltjük ki az egész téridőt sűrűn anyagi referencia-objektumokkal, azért rendelkezünk olyan eljárással, amellyel ezt ki tudjuk pótolni, meg tudjuk szerezni azokat az adatokat, amiket a hiányzó anyagi referencia-objektumok észlelnének és ahogy észlelnék. Működő illúziót tudunk felépíteni, mert különben nem tudna vonatkoztatni rendszerünk, nem tudna megfigyelni megfigyelőnk. A megfigyelő matematikai modellje tehát joggal egy sűrű, sima világvonalsereg, illetve választott matematikai megfogalmazásunkkal egy négyessebesség-mező. Ennek integrálgörbéit a megfigyelő térpontjainak nevezzük. A megfigyelő minden térpontja egy-egy anyagi referenciapontot modellez. Szemléletesen szólva, minden egyes térpont egy icipici törpe, mely rendelkezik egy órával, és mindig feljegyzi, ha valamikor valami őnála járt. (A modellben: mikor metszette világvonalát egy megfigyelendő anyagi pontot modellező világvonal.) Minden törpe a téridő egy fonalát figyeli meg, ebből áll össze a törperendszer mint megfigyelő számára az összkép. A megfigyelő[37] úgy figyel meg tehát egy világvonalat, hogy „törpéinek jelentése alapján” felállít egy függvényt: hogy melyik időpillanatban a megfigyelő melyik térpontjában járt a világvonal.[38] Ennek a függvénynek az idő szerinti deriváltja a megfigyelő szerinti relatív sebesség.

A megfigyelők közül kitüntetettek a merev (szabatosabb szóval: távolságőrző) megfigyelők, ahol bármely két térpont pillanatnyi távolsága állandó időben. Itt a pillanatnyi távolság úgy értendő, hogy a t időpillanatot mint háromdimenziós euklideszi affin teret elmetszi a két térpont mint világvonal, és a két metszéspontot összekötő térszerű vektor hosszáról beszélünk.

A távolságőrző megfigyelők közül pedig még speciálisabbak az inerciális avagy tehetetlenségi megfigyelők, melyeknél a négyessebességmező minden téridőpontban ugyanazt a négyessebesség-értéket veszi föl. A megfelelő világvonalak egymással párhuzamos egyenesek a téridőben. A téridő időszerű egyeneseit azért hívjuk inerciálisnak/tehetetlenséginek, mert ezek modellezik az egyenes vonalú egyenletes mozgásokat, amikkel a magukra hagyott testek mozognak (tehetetlenségi sajátmozgás). Galilei relativitási elve valósítódik abban, hogy modellünkben minden tehetetlenségi világvonalat egyenértékű, nincs olyan, hogy „egyik áll, a többi mozog”, hanem mindet egy-egy $V(1)$-elem jellemez, mely elemek egyike sincs kitüntetve a többihez képest, és az általuk veze-

[37] amit az általános relativitáselméletben sokszor megfigyelőmezőnek hívnak

[38] A téridő nemrelativisztikus modelljében létezik egy módszer, ahogyan az egyes térpontokban telő idő (a törpék órái) összehangolhatóak, szinkronizálhatóak. A legnagyobb ismert jelterjedési sebesség, a vákuumbeli fénysebesség véges volta miatt a valóságban ilyen szinkronizálás nem lehetséges, nulla idejű jelküldés nem lehetséges. A speciális relativisztikus tapasztalatok alapján kiderült, hogy általában egy megfigyelő számára nem létezik értelemszerű, kielégítő szinkronizálás, mert úgymond helyfüggően telik az idő a megfigyelő különböző térpontjaiban. A helyfüggő idő alól csak az inerciális/tehetetlenségi megfigyelők, és a nemtehetetlenségi megfigyelők egy szűk köre kivétel csak. Gravitáció görbítette téridőn pedig már ők sem.

tett egyenes világvonalak is mind egyenértékűek (mind valamilyen időszerű irányba halad a téridőben).

Az inerciális, és általánosabban a távolságőrző megfigyelők tere egy háromdimenziós euklideszi affin térnek bizonyul, mely tér (világvonalrendszer) neminerciális esetben gyorsul és/vagy forog/csavarodik a téridőben, míg az inerciális megfigyelőké eltolásszerűen egyenletesen halad. A nem-távolságőrző megfigyelők tere csupán egy háromdimenziós sokaság (a sokaságok fogalmát hamarosan szintén áttekintjük), de még csak nem is euklideszi sokaság (más néven RIEMANN-sokaság): ami metrikus szerkezet definiálható rajta, az időfüggő.

A téridőn értelmezett függvények analízise hasonló a vektortéren értelmezettekéhez (az pedig az $\mathbb{R}^n$-en értelmezettekéhez), bár vannak bizonyos tartalmi különbségek, amik abból fakadnak, hogy $\mathbb{R}^n$ egy euklideszi vektortér, az M alatt fekvő $\boldsymbol{M}$-en viszont a ravaszabb $\boldsymbol{\tau}$ és $\boldsymbol{h}$ struktúrák vannak. Egy téridőn értelmezett, valós értékű skalárfüggvény (skalármező), $f : M \to \mathbb{R}$ téridő-deriváltja, $f \otimes \boldsymbol{D}$ (ld. 39. lábjegyzet) minden egyes téridőpontban egy $\boldsymbol{M}^*$ értéket vesz föl. Egy dimenziós skalár mennyiség értékű, azaz egy $\mathbb{W}$ mértékegyenes értékű skalárfüggvény téridő-deriváltja pedig $\boldsymbol{M}^* \otimes \mathbb{W} = \mathbb{W} \otimes \boldsymbol{M}^*$ értékű. Az $f \otimes \boldsymbol{D}$ téridő-derivált azt mondja meg, hogy f mennyit változik helyileg a egy téridő-irányban. Megszorítottja, az $\boldsymbol{\eta}(f \otimes \boldsymbol{D}) = (f \otimes \boldsymbol{D})\boldsymbol{\eta}^*$ módon[40] definiált $f \otimes \nabla$ pedig azt, hogy mennyit változik térszerű irányokban. ∇ tehát a térderiválás, mely tehát érdekes módon egy abszolút, azaz megfigyelőfüggetlen operáció, annak ellenére, hogy nincs abszolút tér, hanem minden megfigyelőnek saját különböző tere van. Abszolút térszerűség ugyanis van, és a térderiváláshoz ez elég.

∇ skalárfüggvényekre a gradiens, illetve vektorfüggvényekre a tenzori gradiens (ld. deriválttenzor). Egy $\boldsymbol{f} : M \to \boldsymbol{S}$ térszerű vektormező térderiváltja $\boldsymbol{S} \otimes \boldsymbol{S}^*$ értékű, ezért értelmes rá a tr leképezés, és ennek eredménye a (hármas) divergencia vagy térdivergencia, jelölésben $\nabla \cdot$ avagy $\cdot \nabla$.[41] Egy $\boldsymbol{S}^*$ értékű, azaz térszerű kovektormező térderiváltja viszont $\boldsymbol{S}^* \otimes \boldsymbol{S}^*$ értékű, ennek antiszimmetrikus részével definiálható a rotáció, jelölésben $\nabla \times$. $\boldsymbol{S}$ értékű mező rotációja és $\boldsymbol{S}^*$ értékű mező divergenciája csak áttételesen, $\boldsymbol{S} /\!\!/ \mathbb{L}$ és $(\boldsymbol{S} /\!\!/ \mathbb{L})^*$ azonosítása után értelmezhető, mely azonosítás a $\boldsymbol{h}$ skalárszorzat révén hajtható végre.

Hasonló megállapítások tehetők arra a számunkra fontos esetre, amikor egy négyessebesség-mezőt deriválunk: egy $\boldsymbol{v} : M \to V(1)$, azaz $\boldsymbol{v} : M \to \boldsymbol{M} /\!\!/ \mathbb{T}$ derivált-

[39] Skalárfüggvényekre írhatnánk egyszerűen $\boldsymbol{D}f$-ként is, de az $f \otimes \boldsymbol{D}$ írásmód, amilyen konvenció a korábbi szakaszokban is szerepelt (pl. $\mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathrm{x}}$), vektori és tenzori értékű függvényekre a tenzoriális sorrendet is helyesen tükrözi.

[40] $\boldsymbol{\eta}$ definícióját ld. a 126. oldalon.

[41] Létezik a négyes vagy téridő-divergencia is: egy $\boldsymbol{M}$ négyesvektormező $\boldsymbol{D}$ téridő-deriváltjának nyoma.

ja minden téridőpontban $\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}^*/\!\!/\mathbb{T}$ értékű.[42] Ennél azonban több is mondható, mivel $V(1)$-beli elemek különbsége $\boldsymbol{S}/\!\!/\mathbb{T}$-beli: $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\in V(1)\subset\boldsymbol{M}/\!\!/\mathbb{T}$ esetén $\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{v}_2=$ $=1$, ezért $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)=0$. Emiatt egy sebességmező téridő-deriváltja $\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{M}^*/\!\!/\mathbb{T}$ értékű. Térderiváltja pedig $\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{S}^*/\!\!/\mathbb{T}$ értékű. Automatikusan értelmes tehát egy négyessebességmező térdivergenciája, rotációja viszont csak a $\boldsymbol{h}$ térszerű euklideszi szerkezetre támaszkodó azonosítás után. Ugyanígy a (25) egyenletben használt $(\mathbf{v}\otimes\nabla_{\mathrm{x}})^{\mathrm{S}}$-nek is csak $\boldsymbol{h}$ bevonásával van értelme, célszerűen az

$$\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{v}\otimes\nabla+\boldsymbol{h}^{-1}\left(\boldsymbol{v}\otimes\nabla\right)^*\boldsymbol{h}\right]=\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{v}\otimes\nabla+\boldsymbol{h}^{-1}\left(\nabla\otimes\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{h}\right]\tag{36}$$

módon. Az inerciális CAUCHY-deformáció így a

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{\text{in. CAUCHY}}=\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{v}\otimes\nabla+\boldsymbol{h}^{-1}\left(\nabla\otimes\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{h}\right]\tag{37}$$

fejlődési egyenletes definícióval válik téridő-kompatibilissé, ahol a felülponttal jelzett szubsztanciális derivált téridőn értelmezett mennyiségekre (pl. az EULER-leírással megadott kontinuumfizikai mezőkre)

$$\dot{\boldsymbol{T}}=(\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{D})\boldsymbol{v}\,,\tag{38}$$

egy adott négyessebességmezőre vonatkozóan. (48) előtt azért áll a „célszerűen” szó, mert így $\boldsymbol{E}^{\text{in. CAUCHY}}$ $\boldsymbol{S}/\!\!/\mathbb{L}\to\boldsymbol{S}/\!\!/\mathbb{L}$ (azaz $\boldsymbol{S}\to\boldsymbol{S}$) típusú tenzornak definiálódik. Ez azért a számunkra fizikailag érdekes eset, mert az ilyen tenzornak értelmes a sajátérték-problémája, ráadásul sajátvektorai $\boldsymbol{S}$ típusúak, azaz a téridő térszerű irányvektorai közé tartoznak. Így pedig téridő-kompatibilis módon fenn tudjuk tartani azt az értelmezést, hogy a deformációtenzor sajátvektorai térszerű megnyúlás-főirányok (v.ö. 103. oldal). Lenne három más lehetőségünk is, mert $\boldsymbol{h}$ teljes átjárást biztosít $\boldsymbol{S}/\!\!/\mathbb{L}$ és $(\boldsymbol{S}/\!\!/\mathbb{L})^*$ között, tehát a már értelmesre kialakított (48) kombinációt beszorozhatjuk balról $\boldsymbol{h}$-val, jobbról $\boldsymbol{h}^{-1}$-el, vagy mindkettővel. Ennek a három másik lehetőségnek azonban egyike sem rendelkezne térszerű sajátvektorokkal.

6.3. SOKASÁGOK ÉS ALKALMAZÁSAIK

Át kell még tekintenünk a sokaságok számunkra fontos jellemzőit és alkalmazásait. Az itt következő összefoglaló nem fog minden pontos részletre kitérni, csak a tájékozódás szempontjából fontosabb jellegzetességekre.

Egy m dimenziós sima sokaság olyan halmaz (topologikus tér[43]), amelynek környezetei kölcsönösen egyértelmű és sima (végtelen sokszor deriválható) kapcsolatban vannak

[42] A speciális relativitáselméletben a négyessebességekre az $\boldsymbol{u}$ jelölés a szokásos, a kontinuumkinematikában azonban keverhető lenne az $\mathbf{u}$ elmozdulásfüggvénnyel, emellett a $\boldsymbol{v}$ jelölés azt is sugallja, hogy ez a szokásos, inerciális megfigyelő szerinti $\mathbf{v}$ relatív sebesség megfigyelőmentes négyes megfelelője.

[43] Az itt következő állítások egy része azt is megkövetelheti majd, hogy legyen HAUSDORFF-féle, második megszámlálható, esetleg egyszeresen összefüggő is. Ezek nem „vészes” igények.

egy m dimenziós affin tér alkalmas környezeteivel.[44] Egy $\mathbb{R}^m$, egy vektortér, egy affin tér tehát sokaság, de ezeken a „lineárisan feszes, sík” eseteken túl sokaság például egy affin tér (vektortér, $\mathbb{R}^n$) egy kellően sima, m dimenziós részhalmaza is, mint például egy kétdimenziós gömbfelület egy háromdimenziós euklideszi affin térben. Helyi koordinátázásnak hívjuk, amikor a sokaság egy környezetét $\mathbb{R}^m$ egy környezetével hozzuk kölcsönösen egyértelmű kapcsolatba. Ekkor a környezeten belül minden sokaságpontot m darab valós koordinátával láttuk el.

Egy m dimenziós $\mathcal{U}$ sokaságnak minden p pontjában létezik egy úgynevezett érintőtere, jelölésben $T_p(\mathcal{U})$, mely egy m dimenziós vektortér. Euklideszi (ld. alább) sokaság esetén — amilyen például a gömbfelület, — ez felfogható úgy, mint a sokaság p körüli környezetének a „kisimítása”, sík közelítése. Létezik azonban euklideszi szerkezet nélkül is, mint a p-beli összes lehetséges iránymenti deriválás halmaza. Affin tér érintőtere minden pontban ugyanaz a vektortér, mégpedig a saját alulfekvő vektortere. Általában azonban minden pontban más és más az érintőtér.

Egy $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ sokaságból sokaságba képező függvény $p \in \mathcal{U}$ pontbeli deriváltja, $(f \otimes \boldsymbol{D})(p)$ egy $T_p(\mathcal{U}) \to T_{f(p)}(\mathcal{V})$ lineáris leképezés (már persze ha f deriválható). Láthatóan a sokaságból és/vagy sokaságba képező függvények analízise cirkalmasabb az affin tér eseténél, mert p-függő a derivált értelmezési tartománya és értékkészlete.[45] Vektormezőnek nevezünk egy olyan sima függvényt, amely a sokaság minden p pontjához hozzárendeli a $T_p(\mathcal{U})$ érintőtér egy elemét, azaz egy ottani érintővektort. Ugyanígy egy tenzormező a $T_p(\mathcal{U}) \otimes T_p(\mathcal{U})$ egy elemét rendeli hozzá p-hez, egy kovektormező $T_p(\mathcal{U})^*$ -nek, az érintőtér duálisának vagy koérintőtérnek egy elemét, egy kotenzormező pedig $T_p(\mathcal{U})^* \otimes T_p(\mathcal{U})^*$ egy elemét.

Az eddigiek alkalmazásaként emlékezzünk vissza a folytonos közegeknél mint téridőmegfigyelőknél elhangzott megjegyzésre, hogy általában egy megfigyelő tere — világvonalainak halmaza — csupán egy háromdimenziós sokaság szerkezetet kap a téridőtől, csak a megfigyelők egy speciális szűkebb körének tere nyer egy euklideszi affin tér szerkezetet. Azt a lépést viszont ne tegyük meg, hogy minden anyagi pontot a téridőben húzott világvonalával modellezünk. Egy világvonal csak egy lenyomata, aspektusa az anyagi pont életének, de azon kívül, hogy e pont a téridőben valahogy létezik, számos más dolog is történhet még vele fizikailag (egyéb mennyiségei változnak, például a nála észlelhető hőmérséklet változik, vagy bármi egyéb történés is zajlhat). Ezért vezessünk inkább be egy $\mathcal{C}$ háromdimenziós sokaságot maga a folytonos közeg mint fizikai realitás matematikai modelljeként.[46] A $\mathcal{C}$ anyagi sokaság pontjaival sokminden történhet, ezek egyike az

[44] Sima: mindenhol, ahol környezetek egymással átfednek, az egyik kapcsolat a másikhoz képest legyen sima.

[45] Emiatt az $f \otimes \boldsymbol{D}$ jelölés is leegyszerűsítő: a pontos részletekről ld. pl. [O’Neill (1983)].

[46] Hiszen legyen három koordinátával paraméterezhető, mégpedig folytonosan, ugyanis a közegek fizikailag közel ilyenek. Például érintsünk egy fürdőszivacsot egyik lapjával piros festék felszínéhez:

a kötelező „feladatuk”, hogy valahogyan létezniük kell a téridőben, ezt egy leképezéssel adjuk meg, mely minden $p \in \mathcal{C}$ közegponthoz egy világvonalat, egy $r(p)$ világvonalfüggvényt rendel, sima módon. Minden $r(p)$ világvonalfüggvény ugyebár egy $t \to M$ függvény, bizonyos célszerűségi okokból a t időpontban felvett értéke $r_t(p)$ módon lesz jelölve. Az $r_t : p \to r_t(p),\ \mathcal{C} \to t$ leképezésről[47] fel fogjuk tenni, hogy kölcsönösen egyértelmű, amivel fizikailag azt mondjuk, hogy a közeg, áramlása során nem esik össze végtelen kicsire és nem tágul ki végtelen nagyra. $r_t \otimes \boldsymbol{D}$ nem más, mint a mozgásgradiens megfigyelőmentes, abszolút alakja. Hogy közegkinematikai formuláink kellemesebbek, beszédesebbek, jobban átláthatóak legyenek, érdemes lesz bevezetnünk azt a konvenciót, hogy az anyagi irányviszonyok szerinti mennyiségek, tehát a $T_p(\mathcal{C})$ értékű vektormezők, $T_p(\mathcal{C}) \otimes T_p(\mathcal{C})$ értékű tenzormezők stb. felülhullámos ($\tilde{\ }$) jelölést kapnak, és az anyagi sokaságon vett deriváltat (az anyagi térderiváltat) is $\boldsymbol{D}$ helyett $\tilde{\nabla}$-nak írjuk, tehát pl. az abszolút mozgásgradiens (létezésgradiens) $r_t \otimes \tilde{\nabla}$. A hullámtalan mennyiségek pedig a téridő-irányviszonyok szerintiek ($\boldsymbol{M},\ \boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}$ stb. értékűek), illetve speciálisan a térszerű irányviszonyok szerintiek ($\boldsymbol{S},\ \boldsymbol{S} \otimes \boldsymbol{S}$ stb. értékűek) lesznek, pl. $\boldsymbol{h}$.

Most már minden hozzávalónak birtokában vagyunk, hogy megítéljük azt az anyagi objektivitás biztosítására tett kísérletet, amikor a téridőt az anyagi sokaságon keresztül próbálják meg leírni. Sokkal határozottabban látszik, hogy az anyagi sokaság és az idő DESCARTES-szorzata egy igencsak tökéletlen, fizikailag problémás téridő-pótlék. Általa egy nemtehetetlenségi ide-oda tekergő világvonalrendszeren keresztül nézik a világot, melyben pedig fizikailag oly kitüntetettek a tehetetlenségi mozgásformák. Ráadásul, sommásan szólva, fizikailag a közeg mozog — fejlődik, létezik — a téridőben, nem a téridő mozog — fejlődik, létezik — a közegben.[48] (Nem beszélve arról, amikor egynél több közeg van jelen egyszerre a téridőben, egymáson esetleg át is fedve — lásd többkomponensű közegek.)

Visszatérve az eszköztár ismertetéséhez, euklideszi vagy RIEMANN-sokaságnak nevezünk egy sokaságot, ha meg van adva rajta egy — euklideszi szerkezetnek vagy metrikának nevezett — pozitív definit és szimmetrikus kotenzormező, azaz minden p sokaságpontban egy skalárszorzat a p-beli érintőtéren (mely simán változik, ahogy p változik). Lehet ez a skalárszorzat valós szám értékű is, de lehet általánosabban $\mathbb{W}^{(2)}$ értékű is, ahol $\mathbb{W}$ egy mértékegyenes. A metrikát legtöbbször abban az alakjában lesz célszerű használnunk, amikor ő minden p pontban egy $\boldsymbol{g} : T_p(\mathcal{U}) /\!\!/ \mathbb{W} \to [T_p(\mathcal{U}) /\!\!/ \mathbb{W}]^*$ leképezés.

a festék felszívódik, magasságfüggő sűrűségeloszlással. Ezután elfordítva egy másik lapját érintsük sárga, majd harmadik oldalát kék festékhez. Így minden közegpont különböző „RGB” (RYB — Red-Yellow-Blue)-koordinátázást kapott, és közeli közegpontok közeli koordinátaértékeket.

[47] Sose feledjük, t a téridő egy szelete, mely egy háromdimenziós euklideszi affin tér. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy minden pontján halad át közegvilágvonal, azaz a közeg kitölti az egész téridőt. Ha nem tölti ki, akkor sokaság helyett peremes sokaságként modellezendő.

[48] Egy hétköznapi közegkinematikai példával: a takarító is a felmosóvizet löttyinti ki az udvarra, nem az udvart a felmosóvízre.

A metrika egy adott pontban az ottani érintőtéren definiál távolság- és szögviszonyokat, az egész metrika mező pedig a sokaságon magán is, már amennyire ezek a fogalmak „begörbíthetőek” (hiszen egy RIEMANN-sokaság általában „görbül”). Így például értelmezhető a sokaságban haladó görbék ívhossza: egy görbének véve egy tetszőleges $s : [a_1, a_2] \to \mathcal{U}$ valós paraméterezését, az $s'(a)$ derivált egy $s(a)$ sokaságpont-beli érintővektor, melynek hossza $\|s'(a)\|_{\boldsymbol{g}[s(a)]}$. Ennek a szerint a_1-től a_2-ig vett integrálja függetlennek bizonyul a paraméterezés módjától, és ez az integrál a görbe ívhossza. Két sokaságpontot (pl. p-t és q-t) sok módon lehet görbékkel összekötni, ezek közül a legkisebb görbehosszot nevezzük a két pont távolságának, jelölésben $d(p, q)$. Egymást metsző görbék metszéspontbeli szöge pedig a metszéspontbeli érintővektoraik által bezárt szög.

A szemlélet számára kézzelfoghatóbb a távolság és szög, mint az euklideszi skalárszorzat. Ha a d kétváltozós távolságfüggvényt ismerjük, abból a metrikát is rekonstruálhatjuk, a távolságfüggvényt második változójában kétszer deriválva, és a két pontot egybeejtve, azaz jelöléssel

$$\boldsymbol{g}(p) = \frac{1}{2}\Big\{ \big[q \mapsto d^2(p, q)\big] \otimes \boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{D} \Big\}(p)\,, \tag{39}$$

vagy egy nagyon más jelölésvilág szerint is megadva,

$$\boldsymbol{g}(p) = \frac{1}{2}\, \partial_q^2\, d^2(p, q)\Big|_{q=p}\,. \tag{40}$$

A távolságfüggvény és a metrika tehát ekvivalens egymással. A továbbiakban az utóbbit lesz érdemes használnunk, mert nem két-, hanem csak egyváltozós, tehát lokális mennyiség.

A metrika egyébként, az általa definiált távolságviszonyok alapján érthető módon, egy térfogatfogalmat is bevezet-kitüntet a sokaságon, ez a $\sqrt{|\boldsymbol{g}|}$ módon jelölt térfogati mérték $\mathbb{W}^{(\!(m)\!)}$ értékű (ahol m a sokaság dimenziója).

Amint az már elhangzott, egyelőre heurisztikus megjegyzésként, egy RIEMANN-sokaság általában nem „sík”, hanem „görbült”, a görbülése azonban pontosan és mennyiségileg értelmezhető is, a metrika helyfüggéséből leolvasható módon. Ez egy $T_p(\mathcal{U}) \otimes T_p(\mathcal{U})^* \otimes T_p(\mathcal{U})^* \otimes T_p(\mathcal{U})^*$ típusú vegyes $\boldsymbol{R}^{\text{RIEMANN}}$ tenzormezővel tehető meg, melynek neve görbületi vagy RIEMANN-tenzor. Láthatóan a RIEMANN-tenzor egy meglehetősen bonyolult objektum, létezik szerencsére egy vele ekvivalens jellemzése a görbületnek, a kétdimenziós vagy síkgörbület, amely érintősíkokhoz rendel skalárt. Másrészt, a RIEMANN-tenzorból származtatható egy következménye, az első és negyedik tenzori komponense egybeejtésével (nyomával) kapott $\boldsymbol{R}^{\text{RICCI}}$ RICCI-tenzor. $m \leq 3$ dimenziós RIEMANN-sokaságon ez az egyszerűbb, „kétindexes”, azaz $T_p(\mathcal{U})^* \otimes T_p(\mathcal{U})^*$ típusú szimmetrikus RICCI-tenzor is egyértelműen meghatározza a síkgörbületet, és így a RIEMANN-tenzort [O'NEILL (1983), 88. o.][49].

[49] Az oldal legfölső képletét mint m darab egyenlet alkotta lineáris egyenletrendszert $m \leq 3$ ese-

A $\boldsymbol{g}_{\mathcal{U}}(p) : T_p(\mathcal{U}) \,/\!\!/\, \mathbb{W} \to [T_p(\mathcal{U}) \,/\!\!/\, \mathbb{W}]^*$ metrikájú $\mathcal{U}$ RIEMANN-sokaságot a $\boldsymbol{g}_{\mathcal{V}}(q) :$ $: T_q(\mathcal{V}) \,/\!\!/\, \mathbb{W} \to [T_q(\mathcal{V}) \,/\!\!/\, \mathbb{W}]^*$ metrikájú $\mathcal{V}$ RIEMANN-sokasággal összekötő $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ kölcsönösen egyértelmű, sima leképezést izometriának hívják, ha úgymond a metrikát is átszállítja, azaz minden p-re

$$\boldsymbol{g}_{\mathcal{U}}(p) = [(f \otimes \boldsymbol{D})(p)]^* \, \boldsymbol{g}_{\mathcal{V}}\big(f(p)\big) \, (f \otimes \boldsymbol{D})(p) \,, \tag{41}$$

azaz

$$\boldsymbol{g}_{\mathcal{U}} = (f \otimes \boldsymbol{D})^* \, (\boldsymbol{g}_{\mathcal{V}} \circ f) \, (f \otimes \boldsymbol{D}) \,. \tag{42}$$

A továbbiakban átláthatóbbá fogja tenni képleteinket, ha az összetett függvény jelölését elhagyjuk, amikor ez nem okoz zavart, azaz amikor a változók könnyen kitalálhatóak, tehát például azt írjuk, hogy

$$\boldsymbol{g}_{\mathcal{U}} = (f \otimes \boldsymbol{D})^* \boldsymbol{g}_{\mathcal{V}} \, (f \otimes \boldsymbol{D}) \,. \tag{43}$$

Belátható, hogy az izometriák átszállítják a RIEMANN-tenzort, a síkgörbületet és a RICCI-tenzort is (ezek átszállításai is hasonló, értelemszerű, lineáris műveletek). Az is teljesül, hogy izometriák kompozíciója is izometria.

A nulla görbületi tenzorú RIEMANN-sokaságokat sík sokaságnak nevezik. Ilyenek például az euklideszi affin terek. Egy tétel szerint [DIEUDONNÉ (1976), 408. o., 20.23.5 tétel] pontosan azok a RIEMANN-sokaságok izometrikusak sík RIEMANN-sokasággal, amelyek síkgörbülete nulla (így RIEMANN-tenzora is nulla). A fentiek alapján $m \leq 3$ dimenzióban ugyanez a RICCI-tenzorral is igaz: pontosan a nulla RICCI-tenzorúak izometrikusak síkkal.

A hamarosan következő alkalmazásainkra kikacsintva, nevezzünk metrikus segédpotenciálnak egy olyan izometriát, mely egy sík $\mathcal{U}$ RIEMANN-sokasághoz egy E euklideszi affin teret társít. Rögzített $\mathcal{U}$ és E esetén ez az izometria E távolságtartó transzformációi (az eltolások és forgatások) erejéig határozatlan — ugyanis pontosan ezek E önmagával vett izometriái, márpedig bármely két (azonos dimenziójú) euklideszi affin tér izometrikus egymással, lévén nulla görbületűek (és izometriák kompozíciója ugyebár szintén izometria).

Az izometriákkal történő átszállítás egy gyors és fontos közegkinematikai alkalmazása a következő. Ahogy a közegpontok mozognak (léteznek) a téridőben, a p és q közegpontok t időpillanatbeli távolsága a téridőben

$$d_t(p, q) = \|r_t(q) - r_t(p)\|_{\boldsymbol{h}} \,. \tag{44}$$

tén meg lehet oldani a bázisvektor-párok kijelölte $m(m-1)/2$ érintősíkhoz tartozó síkgörbület-értékekre.

Ehhez a távolságfüggvényhez a (39) módon rendelhető $\mathcal{C}$-n egy metrika, jelöljük ezt $\widetilde{\boldsymbol{h}}_{r_t}$-ként. $\widetilde{\boldsymbol{h}}_{r_t}$ tehát nem más, mint a közeg r mozgása során a t pillanatban a téridőben realizálódott távolság- és szögviszonyok. Ha megvizsgáljuk ezt a $\mathcal{C}$-n levő metrikát, definíciója alapján azt találjuk, hogy a 132. oldalon bevezetett r_t leképezés izometriaként kapcsolja őt össze a t-n élő $\boldsymbol{h}$ metrikával:

$$\widetilde{\boldsymbol{h}}_{r_t} = \left(r_t \otimes \widetilde{\nabla}\right)^* \boldsymbol{h} \left(r_t \otimes \widetilde{\nabla}\right) \tag{45}$$

[v.ö. (43)], mely egy p közegpontban $T_p(\mathcal{C}) /\!\!/ \mathbb{L} \to [T_p(\mathcal{C}) /\!\!/ \mathbb{L}]^*$ leképezés. Tulajdonképpen természetes is, amit kaptunk: a pillanatnyi távolságokat $\boldsymbol{h}$ adja meg, a téridőn — annak pillanatnyi szeletén — közvetlenül, az anyagi irányviszonyokra átszámítva pedig a létezésgradiens révén (45)-tel, vagy ami ugyanaz kell legyen: a mozgás (téridő-létezés) ismeretében (44)-gyel. A továbbiakban nevezzük $\widetilde{\boldsymbol{h}}_{r_t}$-t a pillanatnyi metrikának, pontosabban a pillanatnyi metrika anyagi alakjának. A pillanatnyi metrika téridő-alakja pedig természetesen $\boldsymbol{h} : \boldsymbol{S} /\!\!/ \mathbb{L} \to (\boldsymbol{S} /\!\!/ \mathbb{L})^*$ marad.

7. A RUGALMAS ALAKVÁLTOZÁSOK LEÍRÁSA

7.1. MENNYISÉGÜNK DEFINÍCIÓJA ÉS ALAPTULAJDONSÁGAI

Miután áttekintettük az összes szükséges eszközt, segítségükkel és eddigi alkalmazásaik felhasználásával nekifoghatunk a rugalmas alakváltozások leírásának.

A célunk itt az, hogy a 107. oldalon kifejtett okokból, a szilárd közegeknél tapasztalható rugalmas belső erő (feszültség) erőtörvényéhez (konstitúciós összefüggéséhez) egy kinematikai mennyiséget keresünk, amitől az ébredő rugalmas feszültség függene. Namármost, a nemrelativisztikus mechanikában a testek közötti párkölcsönhatások általában jó közelítéssel pillanatszerű távolhatással működő, a pillanatnyi távolságtól függő erők. Ezért a szilárd közegben ébredő helyi rugalmas feszültséget is a helyi pillanatnyi távolságviszonyok függvényének ésszerű várni. A 133. oldalon láttuk, hogy a távolságviszonyok ekvivalensek egy RIEMANN-metrikával, a 135. oldalon pedig, hogy konkrétan a közegmozgás pillanatnyi távolságviszonyai a (45)-ben mutatott $\widetilde{\boldsymbol{h}}_{r_t}$ metrikával ekvivalensek.

Azt gondoljuk továbbá (ld. a 107. oldalt, és az ennek az alszakasznak a végén tett megjegyzéseket is), hogy szilárd közegeknek van egy nyugalmi elrendeződése, alapszerkezete, amelyet a közeg, ha lehetősége van rá, igyekszik fölvenni. Eme nyugalmi távolságviszonyokhoz is tartozna egy metrika, a közeg nyugalmi metrikája. Jelöljük ezt $\widetilde{\boldsymbol{g}}$-mal, az anyagi irányviszonyok szerint értve, azaz

$$\widetilde{\boldsymbol{g}}(p) : T_p(\mathcal{C}) /\!\!/ \mathbb{L} \to [T_p(\mathcal{C}) /\!\!/ \mathbb{L}]^*. \tag{46}$$

Ez a metrika a téridő irányviszonyaiba átszámítva — mely átszámítás olyan, mint (45), csak most a fordított irányban —, a téridőben a t időpillanatban a

$$\boldsymbol{g}_{r_t} = \left[\left(r_t \otimes \widetilde{\nabla}\right)^{-1}\right]^* \widetilde{\boldsymbol{g}} \left(r_t \otimes \widetilde{\nabla}\right)^{-1} : \boldsymbol{S}/\!\!/\mathbb{L} \to (\boldsymbol{S}/\!\!/\mathbb{L})^* \tag{47}$$

RIEMANN-metrika, mely továbbra is $p \in \mathcal{C}$ változójú. Egyelőre maradhatunk ugyanis ennél az ún. LAGRANGE-leírásnál, ráérünk a legvégén áttérni a téridő-változójú, azaz EULER-leírásra, az r_t változótranszformációval. $\boldsymbol{g}_{r_t}$ tehát a nyugalmi metrika téridőbeli megjelenése az adott közegmozgás esetén. Maga $\widetilde{\boldsymbol{g}}$ időfüggetlen, téridőbeli $\boldsymbol{g}_{r_t}$ megjelenése azonban időfüggő.

A rugalmas deformáció ügyében pedig azt kívánjuk egy valamilyen mennyiséggel jellemezni, hogy hogyan térnek el a pillanatnyi távolságviszonyok a nyugalmitól. Ez a jellemző a téridő irányviszonyai szerint legyen megfogalmazva, ne az anyagi irányviszonyok szerint, mert a téridő a fizikailag biztos háttér, keret.

További indokolt elvárás leendő mennyiségünktől, hogy kis deformációkra adja ki a CAUCHY-deformációtenzort. Közelebbről, annak $\boldsymbol{E}^{\text{in. CAUCHY}}$ változatát sikerült téridőszempontból kielégítő módon értelmezni [a (37) fejlődési egyenlettel], tehát őt lenne jó visszakapni határesetként. Mint a 139. oldalon láttuk, a szempontjainknak megfelelő $\boldsymbol{E}^{\text{in. CAUCHY}}$ egy $\boldsymbol{S}/\!\!/\mathbb{L} \to \boldsymbol{S}/\!\!/\mathbb{L}$ értékű tenzormező. Átszállítva az anyagi irányviszonyokra pedig $T_p(\mathcal{C})/\!\!/\mathbb{L} \to T_p(\mathcal{C})/\!\!/\mathbb{L}$ értékű a p közegpontban. Ezért véges rugalmas deformációt mérő mennyiségünk szintén legyen $\boldsymbol{S}/\!\!/\mathbb{L} \to \boldsymbol{S}/\!\!/\mathbb{L}$ értékű, avagy átszállítva $T_p(\mathcal{C})/\!\!/\mathbb{L} \to T_p(\mathcal{C})/\!\!/\mathbb{L}$ értékű, hogy egy adott határesetben egybe tudjanak esni.

Ilyen mennyiséget építeni nem is lehet majd sok módon. Ugyanis fizikai szituációnkban két kitüntetett metrikánk is van — a pillanatnyi és a nyugalmi —, emiatt egyiket se indokoltabb vektortér és duálisa beazonosítására használni. Ha pedig nincs ilyen azonosításunk, az határozottan megszorítja a lehetőségeket.

Miután minden körülményt áttekintettünk, nekifoghatunk rugalmas deformáltságot jellemző mennyiségünk felállításának. Ha a közeg irányviszonyai szerint fogalmazunk, akkor a pillanatnyi távolságviszonyokat megadó $\widetilde{\boldsymbol{h}}_{r_t}(p) : T_p(\mathcal{C})/\!\!/\mathbb{L} \to [T_p(\mathcal{C})/\!\!/\mathbb{L}]^*$ leképezést szeretnénk viszonyítani a $\widetilde{\boldsymbol{g}}(p) : T_p(\mathcal{C})/\!\!/\mathbb{L} \to [T_p(\mathcal{C})/\!\!/\mathbb{L}]^*$ leképezéshez, és az eredmény legyen $T_p(\mathcal{C})/\!\!/\mathbb{L} \to T_p(\mathcal{C})/\!\!/\mathbb{L}$ leképezés. Ezt az

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_{r_t} := \widetilde{\boldsymbol{g}}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{h}}_{r_t} \tag{48}$$

kombináció valósítja meg. A téridő irányviszonyai szerint megfogalmazott célkitűzésnek pedig épp ennek átszállítottja,

$$\boldsymbol{A}_{r_t} = \boldsymbol{g}_{r_t}^{-1}\boldsymbol{h} \tag{49}$$

tesz eleget. Elvi-lényegi célra a téridő-irányviszonyok szerinti alakot fogjuk preferálni, az anyagi irányviszonyokat pedig csak átmeneti, technikai célokra fogjuk használni.

Ha van egy olyan időpillanat, amikor a pillanatnyi távolságviszonyok épp megegyeznek a nyugalmi távolságviszonyokkal, akkor $\boldsymbol{g}_{r_t} = \boldsymbol{h} \implies \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I_S}$, ahol $\boldsymbol{I_S}$ a térszerű vektorok egységtenzora. Ez arra látszik utalni, hogy $\boldsymbol{A}$ nem a deformáció (mely nyugalmi állapotban nulla kell legyen), hanem az alakváltozás (mely nyugalmi állapotban egységtenzor kell legyen) szempontjainknak megfelelő általánosítása/értelmezése. Ezért a *rugalmas alaktenzor* (röviden: alaktenzor) nevet adhatjuk neki.

Ha kibontjuk a rugalmas alaktenzor definícióját,

$$\boldsymbol{A}_{r_t} = \left(r_t \otimes \widetilde{\nabla}\right) \widetilde{\boldsymbol{g}}^{-1} \left(r_t \otimes \widetilde{\nabla}\right)^* \boldsymbol{h}, \tag{50}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_{r_t} = \widetilde{\boldsymbol{g}}^{-1} \left(r_t \otimes \widetilde{\nabla}\right)^* \boldsymbol{h} \left(r_t \otimes \widetilde{\nabla}\right) \tag{51}$$

[v.ö. (45) és (47)], leolvashatjuk, hogy metrikusan szimmetrikusak (ld. 123. o.), mégpedig $\boldsymbol{A}_{r_t}$ $\boldsymbol{h}$-szimmetrikus, $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{r_t}$ pedig $\widetilde{\boldsymbol{g}}$-szimmetrikus.

Az (50) egyenletben szerepel $\widetilde{\boldsymbol{g}}$, mely a téridőn végezhető méréseink révén közvetlenül nem hozzáférhető. Nem kell azonban megijednünk: ugyanúgy, ahogy az eddigi deformációtenzorokat is fejlődési egyenlettel fogalmaztuk meg, rugalmas alaktenzorunk esetén is elegendő, ha van rá egy olyan fejlődési egyenlet, amelyben minden egyéb mennyiség csupa kimérhető kinematikai hozzávaló[50]. A fejlődési egyenlet megoldásai közül pedig kezdeti feltétellel rögzíthetjük az adott szituációra érvényes megoldást. Képezve (50) szubsztanciális időderiváltját, mely egyszerűen a t szerinti derivált[51]:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{A}}_{r_t} &= \left(\mathbf{v}_t \otimes \widetilde{\nabla}\right) \widetilde{\boldsymbol{g}}^{-1} \left(r_t \otimes \widetilde{\nabla}\right)^* \boldsymbol{h} + \left(r_t \otimes \widetilde{\nabla}\right) \widetilde{\boldsymbol{g}}^{-1} \left(\mathbf{v}_t \otimes \widetilde{\nabla}\right)^* \boldsymbol{h} = \\
&= \left(\mathbf{v}_t \otimes \widetilde{\nabla}\right) \left(r_t \otimes \widetilde{\nabla}\right)^{-1} \boldsymbol{A}_{r_t} + \boldsymbol{A}_{r_t} \boldsymbol{h}^{-1} \left[\left(r_t \otimes \widetilde{\nabla}\right)^{-1}\right]^* \left(\mathbf{v}_t \otimes \widetilde{\nabla}\right)^* \boldsymbol{h} = \\
&= \left(\mathbf{v}_t \otimes \nabla\right) \boldsymbol{A}_{r_t} + \boldsymbol{A}_{r_t} \boldsymbol{h}^{-1} \left(\mathbf{v}_t \otimes \nabla\right)^* \boldsymbol{h},
\end{aligned} \tag{52}$$

felhasználva, hogy a $\widetilde{\nabla}$ és a ∇ deriválások közötti átjárás az r_t mint változótranszformáció deriváltja, $r_t \otimes \widetilde{\nabla}$. Egy olyan fejlődési egyenletet kaptunk tehát, melyben valóban csak téridőn kimérhető mennyiségre, a négyessebesség-mező térderiváltjára van szükség.

Érdekes — bár tulajdonképpen nem is olyan szörnyen meglepő — észrevétel, hogy az (52) egyenlet ugyanolyan, mint a bal CAUCHY-GREEN alakváltozási tenzor (28) fejlődési egyenlete. Rugalmas alaktenzorunk tehát a bal CAUCHY-GREEN alakváltozási tenzor „feljavítása”.

A kis deformáltság esete $\boldsymbol{A}_{r_t} \approx \boldsymbol{I_S}$, ahol e két lineáris leképezés közelsége úgy értendő, hogy különbségük egy alkalmas normája jóval kisebb $\boldsymbol{I_S}$ normájánál. Esetünkben ezt

[50] Pontosabban valami teendő lesz még, ezt a következő alszakasz fogja elvégezni.

[51] Ne feledjük, $\boldsymbol{A}$ egyelőre a LAGRANGE-leírásban van megadva, így egy állandó közegpont mellett vett deriváltról beszélünk. Az adódó fejlődési egyenlet már téridőn vett differenciálegyenletként is tekinthető lesz, pusztán triviális módon át kell majd térni változótranszformációval az EULER-leírásra (annak téridő-megfelelőjére), a $p \mapsto r_t(p)$ leképezéssel. Téridőn a szubsztanciális időderiváltat (38) definiálta.

egyszerűen úgy is megfogalmazhatjuk, hogy $\boldsymbol{A}_{r_t}$ sajátértékei közel kell legyenek 1-hez. Tekintve (52)-t $\boldsymbol{A}_{r_t} - \boldsymbol{I_S}$ vezető rendjében, az eredmény

$$\dot{\left(\boldsymbol{A}_{r_t} - \boldsymbol{I_S}\right)} \approx \left(\boldsymbol{v}_t \otimes \nabla\right) + \boldsymbol{h}^{-1}\left(\boldsymbol{v}_t \otimes \nabla\right)^* \boldsymbol{h}, \tag{53}$$

melyet (37)-tel összevetve láthatjuk, hogy a kis deformáltság határesetében valóban a CAUCHY-deformáltságtenzort kapjuk vissza:

$$\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}_{r_t} - \boldsymbol{I_S}\right) \approx \boldsymbol{E}^{\text{in. CAUCHY}}, \tag{54}$$

mert adott kezdeti feltételből a két fejlődési egyenlet vezető rendig ugyanabba a tenzorba fejleszt, amíg a kis deformáltság tartományában maradunk.

$\boldsymbol{A}$ definíciója alapján belátható, hogy

$$\det\sqrt{\boldsymbol{A}_{r_t}} = \sqrt{\det \boldsymbol{A}_{r_t}} = \frac{\sqrt{|\widetilde{\boldsymbol{h}}_{r_t}|}}{\sqrt{|\widetilde{\boldsymbol{g}}|}} = \frac{\sqrt{|\boldsymbol{h}|}}{\sqrt{|\boldsymbol{g}_{r_t}|}}, \tag{55}$$

azaz a pillanatnyi és a nyugalmi térfogati mérték hányadosát kapjuk. Ez a hányados adja meg a szilárd közeg *kiterjedtségét* (jelölje ezt Λ), mely a nyugalmi állapotban, a nyugalmi távolságviszonyok esetén 1. Ennek egy függvényeként keresnénk majd a 109. oldalon már emlegetett *tágultságot* (amit jelöljön majd θ, amikor a függvényalakról már döntöttünk), mely nyugalmi állapotban 0. Az (55) eredmény már onnan is megsejthető, hogy $\boldsymbol{A}$ a bal CAUCHY-GREEN alakváltozási tenzor rendbetett rugalmas kinematikai változata, és $\det\sqrt{\mathbf{C}_{\mathrm{L}}^{(2)}} = \det\mathbf{F}$, mely a térfogatváltozást méri [ld. a 3. szakaszt, különösen pedig (17)-et és szövegkörnyezetét].

Hogy ne törje meg az alaktenzor felállításának gondolatmenetét, ezért csak itt, utána, az alszakasz végén célszerű még egy kiegészítő fizikai megjegyzést tenni. Nevezetesen azt, hogy az alapszerkezet léte egyfajta memóriajelenség is, mert amikor a közeg nem az alapelrendezésében van, akkor is emlékszik rá, hogy ha békén hagynák, milyen elrendeződést szeretne felvenni. Az alapszerkezet léte tehát nem csupán kinematikai, hanem részben konstitúciós jellegű információ, és részben dinamikai információ a közegről. De ez nem baj. Igazából már az is konstitúciós jellegű információ, hogy közegünk nem merev test, és nem is pontszerű test. Másrészt, már a téridő modellje sem tisztán kinematika, abba is került beépítésre dinamikai információ is: hogy a magukra hagyott testek mozgása kitüntetett, és egymással egyenértékű, és egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgás. A magára hagyás ugyanis dinamikai körülmény. Szerencsére ennél többről, azaz arról, hogy mi és hogyan szabályozza a nem magukra hagyott testek mozgását, nem kellett beszélnünk. A szilárd közegeknél sem kell arról nyilatkoznunk, hogy milyen körülmények között és hogyan tudnak tartani az alapelrendeződésükhöz. Annyira van csak szükségünk, hogy létezik alapelrendeződésük, ezt fel tudják venni, és hogy ez az alapszerkezet a nyugalmi távolságviszonyokat szabja meg.

A rugalmas alaktenzor fejlődési egyenletéhez elegek a téridőn beszerezhető-kimérhető kinematikai információk (konkrétan a négyessebesség és gradiense), ez azonban még nem elég ahhoz, hogy a téridőn dolgozva minden szükséges dolgot el tudjunk intézni. Azt a kérdést még fel kell tennünk, hogy a rugalmas alaktenzor egy kezdeti feltétele lehet-e tetszőleges, vagy ha nem, milyen megszorítás van rá? Átfogalmazva, a kérdés tulajdonképpen a következő: a $\widetilde{\boldsymbol{g}}$ nyugalmi metrika lehet-e tetszőleges, vagy ha nem, milyen megszorítás van rá?

A $\widetilde{\boldsymbol{g}}$ alapszerkezettől elvárjuk, hogy a közeg ki tudja magát rúgni ebbe a nyugalmi elrendeződésbe, a nyugalmi távolságviszonyokba. Ez azt jelenti, hogy $\widetilde{\boldsymbol{g}}$ olyan kell legyen, hogy a pillanatnyi metrika képes legyen — alkalmas körülmények biztosította alkalmas folyamat, közegmozgás esetén — ezzel a nyugalmi metrikával megegyezni. Kicsit konkrétabban, létezhessen olyan $\bar{r}$ folyamat, és olyan $\bar{t}$ időpillanat, amelynek során és amikor a pillanatnyi metrika megegyezik a nyugalmival. Figyelem: nem tételezzük föl, hogy a közeg valóban olyan mozgású lesz, hogy lesz ilyen időpillanat. A közeg egyféle. Szilárd közegnek az alapszerkezete is adott. E közegnek a téridőn való mozgása viszont rengetegféle lehet. $\widetilde{\boldsymbol{g}}$ az *elvi lehetőségét* kell biztosítsa annak, hogy szerencsés esetben realizálódhasson, mint pillanatnyi metrika. Hogy aztán a közeg megvalósuló mozgása ilyen lesz-e, vagy sem, az más kérdés.

Felírva tehát az alapszerkezetre ezt a követelményt, létezhessen olyan $\bar{r}$ és $\bar{t}$, hogy

$$\widetilde{\boldsymbol{h}}_{\bar{r}_{\bar{t}}} = \widetilde{\boldsymbol{g}}\,, \qquad \text{azaz kibontva,} \qquad \left(\bar{r}_{\bar{t}} \otimes \widetilde{\nabla}\right)^{*} \boldsymbol{h} \left(\bar{r}_{\bar{t}} \otimes \widetilde{\nabla}\right) = \widetilde{\boldsymbol{g}}\,. \tag{56}$$

Összevetve ezt (43)-mal, azt ismerhetjük fel, hogy $\bar{r}_{\bar{t}}$ izometria a $\bar{t}$ mint háromdimenziós euklideszi affin tér (ld. 126. o.) és a nyugalmi metrikával RIEMANN-sokasággá tett $\mathcal{C}$ anyagi sokaság között. Mégpedig ez az izometria egy sík sokasággal kapcsol össze, ezért a nyugalmi metrikához tartozó RICCI-tenzor nulla, amint az a 134. oldalon láttuk. Az ugyanott bevezetett szóhasználattal, $\bar{r}_{\bar{t}}$ a $\widetilde{\boldsymbol{g}}$ metrika egy metrikus segédpotenciálja.

Szintén az ottani tárgyalásban hangzott el, hogy bármely két azonos dimenziójú euklideszi affin tér izometrikus, továbbá hogy izometriák kompozíciója is izometria, és az is, hogy az izometriák átszállítják a RICCI-tenzort is. Ezért egy valóban megvalósuló r mozgás esetén a nulla RICCI-tenzorú nyugalmi metrikának egy t időpillanatra mint háromdimenziós euklideszi affin térre átszállítottja, $\boldsymbol{g}_{r_t}$ is nulla RICCI-tenzorú. A t affin teret mint sokaságot ugyebár $\boldsymbol{g}_{r_t}$ is egy RIEMANN-sokasággá teszi, nemcsak a t-hez természetes módon tartozó $\boldsymbol{h}$. Történetesen tehát $\boldsymbol{g}_{r_t}$ is nulla RICCI-tenzorú sokasággá teszi t-t. Az tehát, hogy a nyugalmi metrika képes megvalósuló pillanatnyi metrika lenni, arra fogalmazódott át, hogy $\boldsymbol{g}_{r_t}$ RICCI-tenzora nulla t-n mint affin téren (nem törődve most a t-hez tartozó $\boldsymbol{h}$ euklideszi szerkezettel).

A RICCI-tenzor számolásokra praktikus alakját, és az ahhoz szükséges CHRISTOFFEL-mennyiségeket a sokaság egy koordinátázásában szokás megadni [O'NEILL (1983)], de affin téren koordinátázás nélkül is megadható:

$$\boldsymbol{R}^{\text{RICCI}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\Gamma} - (\operatorname{tr}_{1,3}\boldsymbol{\Gamma}) \otimes \nabla + (\operatorname{tr}_{1,3}\boldsymbol{\Gamma})\,\boldsymbol{\Gamma} - \operatorname{tr}_{1,3}(\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Gamma})\,, \tag{57}$$

ahol

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{g}_{r_t}^{-1}\left[\boldsymbol{g}_{r_t} \otimes \nabla + (\boldsymbol{g}_{r_t} \otimes \nabla)^{\mathrm{S}_{1,3}} - \nabla \boldsymbol{g}_{r_t}\right]\,, \tag{58}$$

és a 102. oldalon bevezetett $^{\mathrm{S}_{1,3}}$ jelöléshez hasonlóan $\operatorname{tr}_{1,3}$ az első és harmadik tenzori komponensben („indexben”) vett nyomot, egybeejtést jelenti (a hamarosan felbukkanó pl. $\operatorname{tr}_{1,3;2,5}$ jelölés pedig az első és harmadik komponens egybeejtését, emellett a második és ötödik komponens egybeejtését fogja jelenteni).

Mivel $\boldsymbol{g}_{r_t} = \boldsymbol{h}\boldsymbol{A}_{r_t}^{-1}$ [ld. (49)], így $\boldsymbol{R}^{\text{RICCI}} = \boldsymbol{0}$ követelményünk átfogalmazható egy $\boldsymbol{A}_{r_t}$-ra vonatkozó egyenletre. Ezt az egyenletet a rugalmas alaktenzor kompatibilitási feltételének fogjuk nevezni. Az átfogalmazás és képletrendezés hosszadalmas számításait mellőzve, ez a követelmény a következőnek adódik — a rövidség kedvéért $\boldsymbol{A}_{r_t}$-t $\boldsymbol{A}$-ként írva a továbbiakban:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}_{1,5;3,4}\left[\boldsymbol{A}^{-1} \otimes \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\otimes\nabla)(\boldsymbol{A}\otimes\nabla)\right] + 2\boldsymbol{h}\boldsymbol{A}^{-1}\operatorname{tr}_{1,2}\left[\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}^{-1}(\nabla\otimes\nabla\otimes\boldsymbol{A})\right]\boldsymbol{A}^{-1} +\\
&+2\boldsymbol{h}\operatorname{tr}_{2,3}\left[\boldsymbol{A}^{-1}\otimes(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{h}^{-1}(\nabla\otimes\boldsymbol{A})\right]\boldsymbol{A}^{-1} - 2\boldsymbol{h}\boldsymbol{A}^{-1}\operatorname{tr}_{2,4}\left[(\boldsymbol{A}\otimes\nabla\otimes\nabla)\,\boldsymbol{h}^{-1}\right]+\\
&+2\operatorname{tr}_{1,4;3,5}\left[\boldsymbol{A}^{-1}\otimes\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\otimes\nabla)(\boldsymbol{A}\otimes\nabla)\right] + \operatorname{tr}_{1,2;3,5}\left[\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\otimes\nabla)(\boldsymbol{A}\otimes\nabla)\boldsymbol{A}^{-1}\right]-\\
&-2\boldsymbol{h}\boldsymbol{A}^{-1}\operatorname{tr}_{2,5;3,6}\left[(\boldsymbol{A}\otimes\nabla)\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}^{-1}(\nabla\otimes\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}\right]\boldsymbol{A}^{-1}+\\
&+2\operatorname{tr}_{2,4}\left[(\nabla\otimes\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\otimes\nabla)\right]\boldsymbol{A}^{-1} - 3\operatorname{tr}_{2,6;3,5}\left[(\nabla\otimes\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\otimes\nabla)\boldsymbol{A}^{-1}\right]-\\
&-2\left[\nabla\otimes(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\right]\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{h}\operatorname{tr}_{3,4;2,5}\left[\boldsymbol{A}^{-1}\otimes\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\otimes\nabla)\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}^{-1}(\nabla\otimes\boldsymbol{A})\right]\boldsymbol{A}^{-1}+\\
&+2\operatorname{tr}_{1,2}\left[\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\otimes\nabla\otimes\nabla)\right] - 2\boldsymbol{h}\boldsymbol{A}^{-1}\operatorname{tr}_{2,4;3,5}\left[(\boldsymbol{A}\otimes\nabla)\otimes\boldsymbol{h}^{-1}(\nabla\otimes\boldsymbol{A})\right]\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{0}\,.
\end{aligned} \tag{59}$$

Ez egy meglehetősen bonyolult, nemlineáris egyenlet. Ennek a kompatibilitási feltételnek tegyen tehát eleget $\boldsymbol{A}$ egy kezdeti feltétele, és akkor a fejlődési egyenlet biztosítja, hogy később is eleget fog neki tenni.

Érdemes megnézni, hogy milyen ennek a kompatibilitási feltételnek a kis deformáltságú határesete. (59)-ben a tagok kétfélék: az egyik fajta $\boldsymbol{A}$ valamilyen második deriváltját tartalmazza, a másik $\boldsymbol{A}$ első deriváltját, de két ilyen szorzatát. Feltéve, hogy $\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{I_S}$ olyan értelemben is teljesül, hogy az első deriváltak szorzata jóval kisebb (lineáris leképezések normájában) a második deriváltaknál, (59)-ben csak a második deriváltas tagokat tartva meg:

$$\begin{aligned}
&2\boldsymbol{h}\boldsymbol{A}^{-1}\operatorname{tr}_{1,2}\left[\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}^{-1}(\nabla\otimes\nabla\otimes\boldsymbol{A})\right]\boldsymbol{A}^{-1} - 2\boldsymbol{h}\boldsymbol{A}^{-1}\operatorname{tr}_{2,4}\left[(\boldsymbol{A}\otimes\nabla\otimes\nabla)\,\boldsymbol{h}^{-1}\right]-\\
&-2\left[\nabla\otimes(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\right]\boldsymbol{A}^{-1} + 2\operatorname{tr}_{1,2}\left[\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\otimes\nabla\otimes\nabla)\right] \approx \boldsymbol{0}\,.
\end{aligned} \tag{60}$$

Ebbe $\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{I_S}$-et közvetlenül is behelyettesítve,

$$2\boldsymbol{h}\,\mathrm{tr}_{1,2}\left[\boldsymbol{h}^{-1}\left(\nabla\otimes\nabla\otimes\boldsymbol{A}\right)\right] - 2\boldsymbol{h}\,\mathrm{tr}_{2,4}\left[\left(\boldsymbol{A}\otimes\nabla\otimes\nabla\right)\boldsymbol{h}^{-1}\right] - \\ -2\left[\nabla\otimes\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)\right] + 2\,\mathrm{tr}_{1,2}\left[\left(\boldsymbol{A}\otimes\nabla\otimes\nabla\right)\right] \approx \boldsymbol{0}\,. \tag{61}$$

Ez a formula már lineáris $\boldsymbol{A}$-ban. Behelyettesítve (54)-et, az — ezúttal egyszerű — technikai lépések mellőzésével, arra juthatunk, hogy

$$\nabla\times\boldsymbol{E}^{\text{in. CAUCHY}}\times\nabla\approx\boldsymbol{0}\,, \tag{62}$$

amely a CAUCHY-deformációtenzorra ismert SAINT-VENANT-féle kompatibilitási feltétel.

A véges deformáltság (59) kompatibilitási feltétele eléggé bonyolult. Szerencsés lenne valami technikailag egyszerűbb jellemzését adni az általa megengedett rugalmas alaktenzoroknak. Ehhez fogódzót nyújt az, hogy a nulla görbületű $\widetilde{\boldsymbol{g}}$ metrikának az $\bar{r}_{\bar{t}}$ izometria egy metrikus segédpotenciálja. Tekintve, hogy $\bar{t}$ és egy tetszőleges t egyaránt háromdimenziós euklideszi affin terek, megadható köztük izometria, így izometriák kompozíciójaként $\widetilde{\boldsymbol{g}}$-nak megadható egy $\hat{r}_t$ izometriája is. Ez, a 134. oldalon említettek szerint a t euklideszi affin térben ható eltolások és forgatások erejéig határozatlan függvényértékében. Ez az $\hat{r}_t$ nem egy valódi, fizikai, realizálódó közegmozgást jelöl, hanem csak egy technikai segédmennyiség, melynek választása jelentős önkényt tartalmaz[52]. Az, hogy ez az $\hat{r}_t$ ál-mozgás $\widetilde{\boldsymbol{g}}$-nak metrikus segédpotenciálja, azaz a $\boldsymbol{h}$ metrikájú sík t-vel kapcsolatot létesítő izometriája, azt jelenti, hogy

$$\widetilde{\boldsymbol{g}} = \left(\hat{r}_t\otimes\widetilde{\nabla}\right)^*\boldsymbol{h}\left(\hat{r}_t\otimes\widetilde{\nabla}\right) \tag{63}$$

[ld. (43), és vegyük észre eme (63) képletünk analógiáját (45)-tel is]. Helyettesítsük ennek inverzét be (50)-be:

$$\boldsymbol{A} = \left(r_t\otimes\widetilde{\nabla}\right)\left(\hat{r}_t\otimes\widetilde{\nabla}\right)^{-1}\boldsymbol{h}^{-1}\left[\left(\hat{r}_t\otimes\widetilde{\nabla}\right)^{-1}\right]^*\left(r_t\otimes\widetilde{\nabla}\right)^*\boldsymbol{h}\,, \tag{64}$$

melyet átírhatunk az

$$\boldsymbol{A} = \left[\left(r_t\circ\hat{r}_t^{\,-1}\right)\otimes\nabla\right]\boldsymbol{h}^{-1}\left[\left(r_t\circ\hat{r}_t^{\,-1}\right)\otimes\nabla\right]^*\boldsymbol{h} \tag{65}$$

alakba is. Önként kínálkozik tehát, hogy bevezessük a

$$q_t := r_t\circ\hat{r}_t^{\,-1} \tag{66}$$

kombinációt, mely a t affin térből képez önmagába — és amely függvény a „hasában” az eltolások és forgatások erejéig határozatlan. $\boldsymbol{A}$ megadható tehát egy ilyen függvény

[52] Olyannyira, hogy a t változóban nem is kell, hogy folytonos legyen: különböző időpillanatokhoz egészen különböző módon is megválaszthatóak. Természetesen célszerű mégis időben elegendően sokszor differenciálhatónak választani — ez lehetséges, mert $\widetilde{\boldsymbol{g}}$ az idő függvényében simán változik, konkrétan a rugalmas alakváltozások körében állandó.

segítségével. Felismerve azt a lehetőséget, hogy az affin tér értékű q_t-ből levonhatjuk a t affin tér I_t identitásleképezését, és így egy egyszerűbb, vektortér értékű leképezést kapunk — $\boldsymbol{S}$ értékűt, hiszen ez t alulfekvő vektortere —, definiálható

$$\boldsymbol{q}_t := q_t - I_t \tag{67}$$

is, mely tehát egy térszerű vektormezőt jelent a téridőn, és akivel

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{q}_t \otimes \nabla)\, \boldsymbol{h}^{-1} (\boldsymbol{q}_t \otimes \nabla)^* \, \boldsymbol{h} \tag{68}$$

írható. Egy téridő-koordinátázásban $\boldsymbol{A}$-nak hat független komponense van, $\boldsymbol{q}$-nak három, tehát $\boldsymbol{q}$ egy gazdaságosabb technikai segédjellemzését nyújtja a rugalmas alaknak, mint $\boldsymbol{A}$. Tudnunk kell viszont róla, hogy $\boldsymbol{q}$ eltolásnyi-elforgatásnyi határozatlanságot hordoz, közvetlen jelentése nincs. A *vektori alakpotenciál* névvel illethetjük, q-t pedig *affin alakpotenciál* névvel. $\boldsymbol{q}_t \otimes \nabla \approx \boldsymbol{I_S}$ esetén $\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{I_S}$, és (68) első rendig az

$$\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{I_S} + (\boldsymbol{q}_t \otimes \nabla) + \boldsymbol{h}^{-1} (\boldsymbol{q}_t \otimes \nabla)^* \, \boldsymbol{h}\,, \tag{69}$$

$$\boldsymbol{E}^{\text{in. CAUCHY}} \approx \frac{1}{2} \left[(\boldsymbol{q}_t \otimes \nabla) + \boldsymbol{h}^{-1} (\boldsymbol{q}_t \otimes \nabla)^* \, \boldsymbol{h} \right] \tag{70}$$

kis deformáltsági képleteket nyújtja. $\boldsymbol{q}_t$ tehát a véges deformációs változata a CAUCHY-deformációtenzorhoz

$$\boldsymbol{E}^{\text{in. CAUCHY}} = \frac{1}{2} \left[\left(\mathbf{u}^{\text{CAUCHY}} \otimes \nabla \right) + \boldsymbol{h}^{-1} \left(\mathbf{u}^{\text{CAUCHY}} \otimes \nabla \right)^* \boldsymbol{h} \right] \tag{71}$$

módon tartozó $\mathbf{u}^{\text{CAUCHY}}$ CAUCHY-potenciálnak [FÜLÖP (2009)], melyet tévesen azonosítani szoktak a (2)-ben bevezetett $\mathbf{u}$ elmozdulásfüggvénnyel {nemnulla kezdeti deformáció esetén ugyanis a kettő menthetetlenül eltér egymástól [FÜLÖP (2009)], ezenfelül $\mathbf{u}^{\text{CAUCHY}}$ eltolások és forgatások erejéig határozatlan (ld. ugyanott)}.

Adott $\widetilde{\boldsymbol{g}}$ alapszerkezet esetén a lehetséges $\hat{r}_t$ metrikus segédpotenciálok, avagy adott $\boldsymbol{A}$ alaktenzor esetén a lehetséges $\boldsymbol{q}$ alakpotenciálok meghatározása kemény nemlineáris feladat. Gyakorlati szempontból, alkalmazásokban azonban a fordított út az érdekes: az összes lehetséges $\boldsymbol{q}$-kkal az összes lehetséges $\boldsymbol{A}$-kat — és az r mozgás ismeretében $\widetilde{\boldsymbol{g}}$-t — jellemezni tudjuk. Tény, hogy egy $\boldsymbol{q}_{t_0}$ kezdeti feltétel meghatározása szintén nem egyszerű, pláne annak fényében, hogy $\boldsymbol{q}$ nem egy közvetlen fizikai mennyiség, hanem egy határozatlanságokat tartalmazó segédmennyiség. Mégis lehet, hogy könnyebben boldogulunk vele alkalmazásokban. Emellett, a kezdeti feltétel-célra történő felhasználáson túl egy konkrét kontinuumfizikai feladat egyenletrendszerének megoldásában is hasznos technikai szerepet játszhat, mert kevesebb szabadsági fokot kell nyomon követni a megoldás során, és az $\boldsymbol{A}$-ban lévő független szabadsági fokok explicitebben mutatkoznak meg $\boldsymbol{q}$ nyelvén. Az alakpotenciállal való bánásmódhoz azonban szem előtt kell tartani azokat a korlátozó aspektusokat, melyek a CAUCHY-potenciálra ismeretesek [FÜLÖP (2009)]. Így például q nem fogható fel, mint az r közegmozgás, sőt, viszonyuk is nemtriviális.

A fizikai szempontjaink alapján közvetlenül adódott kinematikai jellemző alaktenzor lett, mely a nyugalmi állapotban egységtenzor, nem pedig deformáltságtenzor, mely a nyugalmi állapotban nulla lenne. Deformáltságtenzort úgy kaphatunk belőle, ha egy valamilyen függvényét vesszük, egy olyan függvényét, mely nulla, ha $\boldsymbol{A}$ az egységtenzor. Emellett olyan kellene legyen, hogy kis deformáltság esetén az $\boldsymbol{E}^{\text{in. CAUCHY}}$ tenzort kapjuk vissza. Ezt a kívánalmat most már $\boldsymbol{A}$-nyelven is meg tudjuk fogalmazni: (54) alapján vezető rendben $\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}_{r_t} - \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{S}})$ kellene legyen deformáltságtenzorunk ebben a határesetben.

Ezek az előírások még rengeteg lehetőséget megengednek. Mivel $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{S} \to \boldsymbol{S}$ típusú, ezért hatványai, exponenciális és logaritmusfüggvénye, és minden olyan f függvénye értelmes, amely valós számokra értelmes. Mindezek a függvények pedig esetünkben egyszerűen úgy hatnak, hogy $f(\boldsymbol{A})$ főirányai (sajátvektorai) megegyeznek $\boldsymbol{A}$ főirányaival, a sajátértékekhez pedig $\boldsymbol{A}$ sajátértékeinek f függvényét kell venni.

Óriási fizikai elvi kifejezőerővel és egyben gyakorlati értékkel rendelkezne egy olyan választás, amellyel a deformáltságtenzor nyoma mérné a tágultságot, és így deviatorikus része az állandó térfogatú deformálódásokkal lenne kapcsolatos. A 105. oldalon vetődött fel ez a kérdés a hagyományos, referencia-konfigurációhoz viszonyító deformációtenzorokra, és azt kaptuk, hogy a logaritmikus, HENCKY-féle tenzorok rendelkeznek ilyen tulajdonsággal. A (15)–(16) képletek $\boldsymbol{S} \to \boldsymbol{S}$ típusú tenzorokra is alkalmazhatóak, és (55)-nél láttuk, hogy $\sqrt{\det \boldsymbol{A}}$ írja le a kiterjedtséget. Ezért referencia-konfigurációtól mentes, és a többi problémától is megtisztított tárgyalásunkban is megkapjuk a választ: a

$$\boldsymbol{D} := \ln \sqrt{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{2} \ln \boldsymbol{A} \tag{72}$$

deformáltságtenzor az, amelynek nyoma,

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{D} = \ln \sqrt{\det \boldsymbol{A}} \tag{73}$$

közvetlenül a kiterjedtség függvénye, azaz a 138. oldalon elindított θ jelölést szilárd közegek esetén képletszerű tartalommal töltve föl,

$$\theta := \ln \Lambda \,, \qquad \text{vagyis} \qquad \theta = \mathrm{tr}\boldsymbol{D} = \ln \sqrt{\boldsymbol{A}} = \ln \Lambda \,. \tag{74}$$

Deformáltságtenzorunk tehát a bal HENCKY-tenzor szempontjaink szerint „rendbetett” változata.

Örvendetes észrevenni, hogy azt a 104. oldalon megfogalmazott reményt is teljesíti $\boldsymbol{D}$, miszerint olyan deformáltságtenzor volna kívánatos, mely mind a végtelenül kitágult, mind a végtelenül összenyomott közeg határesetében divergál.[53] Az, hogy mennyiségünk

[53] $\boldsymbol{D}$ ezt ugyebár nyomának $+\infty$-hez illetve $-\infty$-hez tartásával láthatóan biztosítja.

divergál, amikor a közeg a kétfajta extrém geometriai állapot bármelyike felé közeledik, várhatóan numerikus stabilitást is nyújt majd konkrét feladatmegoldásokban: nem engedi, hogy a közelítő számítások hibái bármelyik irányba is elszaladhassanak, mert erős dinamikai visszatérítést (pl. erős visszatérítő feszültséget) fognak maguk után vonni a konstitúciós összefüggésen keresztül.

Megjegyzendő még, hogy kellemes volna, ha nemcsak $\boldsymbol{A}$-ra, hanem közvetlenül $\boldsymbol{D}$-re is le lehetne vezetni fejlődési egyenletet. Sajnos, mivel egy tenzor és időderiváltja általában nem cserélhetőek föl egymással, ezért ilyen levezetésre nincs mód. $\boldsymbol{A}$ fejlődési egyenletét kell használni, és annak megoldásából származtatni $\boldsymbol{D}$-t. Lehet azonban, hogy $\boldsymbol{D}$ még így is, azaz ennek ellenére is kitüntetett viszonyban áll a fejlődési egyenlettel — lásd a következő bekezdés végét.

$\boldsymbol{D}$-definíciónk alapvetően kinematikai előnyei után néhány dinamikai illetve konstitúciós előny is megemlíthető. Ezek közül az első az, hogy a legegyszerűbb termodinamikai szabadenergia épp ebben az általánosított bal HENCKY-tenzorban bizonyul kvadratikusnak [VÁN (2009)]. Ez a (72) deformáltságtenzor fizikai modellezésben való kitüntetett szerepére utal. Ennek a számolásnak a részletei itt nem kerülnek bemutatásra, a döntő mozzanata azonban igen: a termodinamikai levezetés során a főszerepet játszó tag a $2\boldsymbol{A}\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{A}}$ kombináció formájában adódik (ahol s az entrópiasűrűség), és vegyük észre, hogy ez a tag a (72) definíció következtében a $\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{D}}$ egyszerű formát ölti. A szóbanforgó kombináció egyébként amiatt alakul ki, amilyen konkrét speciális módon $\boldsymbol{v} \otimes \nabla$ szerepel $\boldsymbol{A}$ fejlődési egyenletében. Ezért vélhető, hogy a logaritmikus definíciójú $\boldsymbol{D}$ kitüntetett módon illeszkedik az alak fejlődési egyenletéhez is, és az alapvetően fontos $\boldsymbol{v} \otimes \nabla$ mennyiséghez is.

Ezzel az elméleti észrevétellel párhuzamosan, kísérleti implikációk is vannak arra, hogy a lineáris rugalmasság $\boldsymbol{D}$-ben lehet a leglineárisabb. Gumira végzett nagydeformációs laboratóriumi kísérletek adatainak elemzése során erre a következtetésre jut HORGAN és MURPHY [HORGAN–MURPHY (2009)].

A 104. oldalon már megemlített eredmények [PLEŠEK–KRUISOVÁ (2006)], [KRUISOVÁ–PLEŠEK (2007)] szerint pedig nemlineáris rugalmasságtani konstitúciós összefüggés változójaként is jobban teljesít a HENCKY-tenzor más deformációtenzoroknál, sőt, az anyagi együtthatók illesztésében jobb numerikus stabilitást biztosít.

Természetesen számos további szisztematikus vizsgálat szükséges ahhoz, hogy megismerjük $\boldsymbol{D}$ tulajdonságait, elméleti és kísérleti egyaránt.

8. A KÉPLÉKENY ALAKVÁLTOZÁSOK LEÍRÁSA

A szilárd közegek rugalmas alakváltozásainak imént felépített tárgyalása fényében természetes módon kínálkozik a képlékeny alakváltozások 111. oldalon megvizsgált fizikai jellegzetességeinek formai megfogalmazása is. A képlékenyedés a $\widetilde{\boldsymbol{g}}$ alapszerkezet időbeli változásával írandó le. A pillanatnyi, t pillanatbeli $\widetilde{\boldsymbol{g}}_t$ változási gyorsasága, $\dot{\widetilde{\boldsymbol{g}}}_t$ fejezi ki a képlékenyedés sebességét és módját (tenzori mennyiség időderiváltja nemcsak nagyságbeli változást fejez ki, hanem a változás irányfüggő jellegzetességeit is). Amikor a kinematikai mennyiségek felhasználásával dinamikai és konstitúciós összefüggéseket állítunk majd fel a közegre, a képlékenyedést okozó-vezérlő hatások ezt a $\dot{\widetilde{\boldsymbol{g}}}$ mennyiséget kell, hogy megszabják.

Két nehézség merül fel azonban $\dot{\widetilde{\boldsymbol{g}}}$ szerepeltetése kapcsán. Az egyik az, hogy $\widetilde{\boldsymbol{g}}$ nem érhető el közvetlenül kinematikai mérések révén. A rugalmas alakváltozásoknál erre szerencsére nem is volt szükség, a téridőn megfogalmazott $\boldsymbol{A}$ kifejezett, hordozott mindent, amire szükségünk van. Kellene keresni egy téridőn megadott mennyiséget a képlékenyedési sebesség kifejezésére is. A másik nehézség pedig az, hogy $\dot{\widetilde{\boldsymbol{g}}}$ nem lehet akármilyen, mert az alapszerkezet továbbra is minden egyes pillanatban azt jelenti, hogy ha attól a pillanattól kezdve engedjük a közeget, hogy kirúgja magát és megkereshesse nyugalmi elrendeződését, akkor erre az akkori távolságviszonyra, metrikus szerkezetre fog törekedni. A változó $\widetilde{\boldsymbol{g}}$ tehát továbbra is minden pillanatban nulla Ricci-tenzorú kell legyen. Láthattuk, hogy a Ricci-tenzor nulla volta egy igencsak komplikált követelmény [ld. az (59) kompatibilitási feltételt, amivel analóg a $\widetilde{\boldsymbol{g}}$-ra vonatkozó egyenlet]. A gyakorlat számára igencsak nehéz lenne olyan dinamikai ill. konstitúciós képleteket felírni, amelyek ezt a feltételt tiszteletben tartják. E célból értékes lenne egy olyan mennyiséget találni, amely csak azokhoz az alapszerkezet-változásokhoz tartozik, amelyek megőrzik a görbület nulla voltát. Hogy pedig az előbbi kívánalomnak is eleget tegyünk, ez a mennyiség legyen téridőn megadott.

Hogy milyen mennyiségben is gondolkodjunk, vegyük szemügyre az (52) egyenletet, amely képlékenyedésmentes esetben a szilárd közeg kinematikai differenciálegyenlete. Ezt (50) időderiváltjából származtattuk. Képlékenyedés esetén ez a derivált kibővül egy további taggal:

$$\dot{\boldsymbol{A}}_{r_t} = \left(\boldsymbol{v}_t \otimes \widetilde{\nabla}\right) \widetilde{\boldsymbol{g}}^{-1} \left(r_t \otimes \widetilde{\nabla}\right)^* \boldsymbol{h} + \left(r_t \otimes \widetilde{\nabla}\right) \left(\widetilde{\boldsymbol{g}}^{-1}\right)^{\bullet} \left(r_t \otimes \widetilde{\nabla}\right)^* \boldsymbol{h} + \left(r_t \otimes \widetilde{\nabla}\right) \widetilde{\boldsymbol{g}}^{-1} \left(\boldsymbol{v}_t \otimes \widetilde{\nabla}\right)^* \boldsymbol{h}. \tag{75}$$

A (63) egyenlet már megfogalmazta számunkra a nulla görbületű nyugalmi metrikákat, az $\hat{r}$ ál-mozgások segítségével, ahonnan az extra tag ((75) jobb oldalán a középső tag) a következőképpen is kifejezhető:

$$\begin{aligned} &-\left(r_t \otimes \widetilde{\nabla}\right) \left(\hat{r}_t \otimes \widetilde{\nabla}\right)^{-1} \left(\dot{\hat{r}}_t \otimes \widetilde{\nabla}\right) \left(\hat{r}_t \otimes \widetilde{\nabla}\right)^{-1} \boldsymbol{h}^{-1} \left[\left(\hat{r}_t \otimes \widetilde{\nabla}\right)^{-1}\right]^* \left(r_t \otimes \widetilde{\nabla}\right)^* \boldsymbol{h} - \\ &-\left(r_t \otimes \widetilde{\nabla}\right) \left(\hat{r}_t \otimes \widetilde{\nabla}\right)^{-1} \boldsymbol{h}^{-1} \left[\left(\hat{r}_t \otimes \widetilde{\nabla}\right)^{-1}\right]^* \left[\left(\dot{\hat{r}}_t \otimes \widetilde{\nabla}\right)^{-1}\right]^* \left[\left(\hat{r}_t \otimes \widetilde{\nabla}\right)^{-1}\right]^* \left(r_t \otimes \widetilde{\nabla}\right)^* \boldsymbol{h} = \\ &\qquad = -\left(q_t \otimes \nabla\right) \left\{ \left[\left(\dot{\hat{r}}_t \circ \hat{r}_t^{-1}\right) \otimes \nabla\right] \boldsymbol{h}^{-1} + \boldsymbol{h}^{-1} \left[\left(\dot{\hat{r}}_t \circ \hat{r}_t^{-1}\right) \otimes \nabla\right]^* \right\} \left(q_t \otimes \nabla\right)^* \boldsymbol{h}. \end{aligned} \tag{76}$$

Ez egy tanulságos és értékes alak, viszont nem elegendően praktikus. Ezért fussunk neki a dolognak egy kerülő úton is. Időderiváljuk (65)-öt, melybe előbb beírtuk (66)-ot:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{A}} &= (\dot{q}_t \otimes \nabla)\, \boldsymbol{h}^{-1} (q_t \otimes \nabla)^* \, \boldsymbol{h} + (q_t \otimes \nabla)\, \boldsymbol{h}^{-1} (\dot{q}_t \otimes \nabla)^* \, \boldsymbol{h} = \\ &= (\dot{q}_t \otimes \nabla)\, (q_t \otimes \nabla)^{-1} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \boldsymbol{h}^{-1} \left[(\dot{q}_t \otimes \nabla)\, (q_t \otimes \nabla)^{-1} \right]^* \boldsymbol{h} = \\ &= \left[\left(\dot{q}_t \circ q_t^{-1} \right) \otimes \nabla \right] \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \boldsymbol{h}^{-1} \left[\left(\dot{q}_t \circ q_t^{-1} \right) \otimes \nabla \right]^* \boldsymbol{h} = \qquad (77) \\ &= \left(\boldsymbol{v}_t \otimes \nabla \right) \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{h}^{-1} \left(\boldsymbol{v}_t \otimes \nabla \right)^* \boldsymbol{h} - \left(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{h}^{-1} \boldsymbol{Z} \boldsymbol{h} \right) , \qquad (78)\end{aligned}$$

ahol

$$\boldsymbol{Z} := \boldsymbol{v}_t \otimes \nabla - \left(\dot{q}_t \circ q_t^{-1} \right) \otimes \nabla = \left[\boldsymbol{v}_t - \left(\dot{q}_t \circ q_t^{-1} \right) \right] \otimes \nabla , \qquad (79)$$

melyre definíciója alapján nyilvánvalóan teljesül, hogy

$$(\boldsymbol{Z} \otimes \nabla)^{\mathrm{A}_{2,3}} = \boldsymbol{0} , \qquad \text{azaz} \qquad \boldsymbol{Z} \times \nabla = \boldsymbol{0} , \qquad (80)$$

vagyis hogy második tenzori komponensében („indexében”) örvénymentes. Ezen a második úton tehát a $-(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{h}^{-1} \boldsymbol{Z} \boldsymbol{h})$ alakban tudtuk felírni azt az iménti extra középső tagot. A

$$\boldsymbol{w}_t := \boldsymbol{v}_t - \left(\dot{q}_t \circ q_t^{-1} \right) \qquad (81)$$

jelöléssel $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{w} \otimes \nabla$ írható röviden. Erre a $\boldsymbol{w}$-re már nem mutatkozik semmilyen feltétel[54], tehát a jelek szerint az összes lehetséges (kellően sokszor deriválható) $\boldsymbol{w}$ görbületőrző alapszerkezet-változást jelent. Az sajnos nem igaz, hogy különböző $\boldsymbol{w}$-k különböző $\dot{\boldsymbol{g}}$-okat szolgáltatnak. Az $\hat{r}$ ál-mozgások már említett eltolásnyi és forgatásnyi határozatlanságai közül az eltolások a térderiválás miatt kiesnek q-ból és így $\boldsymbol{w}$-t is invariánsan hagyják, a forgatások azonban nem. Fontos és nyitott kérdés, hogy van-e olyan mennyiség, amely mind az eltolásokra, mind a forgatásokra invariáns, és így kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban van a görbületőrző alapszerkezet-változásokkal. Ehhez egy adalék az, hogy a (76)-ban felbukkanó $\boldsymbol{h}$-szimmetrikus $\left[\left(\dot{\hat{r}}_t \circ \hat{r}_t^{-1} \right) \otimes \nabla \right] \boldsymbol{h}^{-1} + \boldsymbol{h}^{-1} \left[\left(\dot{\hat{r}}_t \circ \hat{r}_t^{-1} \right) \otimes \nabla \right]^*$ kombináció invariáns az eltolásokra és a forgatásokra egyaránt. Sajnos, ő viszont kevés ahhoz, hogy a képlékenyedés miatti extra tagot, azaz a $\boldsymbol{Z}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{h}^{-1} \boldsymbol{Z} \boldsymbol{h}$ kombinációt megkapjuk belőle: (76)-ból leolvasható, hogy ehhez $q_t \otimes \nabla$-t is ismernünk kellene még (amely mennyiség viszont nem forgatásinvariáns).

Nos, a megengedett alapszerkezet-változások egyik lehetséges módja tehát egy $\boldsymbol{w}$ megadása (értsd: konstitúciósan vagy dinamikailag). Ez már egy jóval egyszerűbb feladat, mint az eredeti. Az ál-mozgás forgatásnyi határozatlanságára azonban invariánsnak kell lennie ennek a megadásnak (amikor nem explicite, egy $\boldsymbol{w} := \ldots$ módon[55], hanem pl. egy

[54] Az tudható, hogy $\dot{q}_t \circ q_t^{-1}$ is $V(1)$ értékű, azaz négyessebesség-mező, így $\boldsymbol{w}$ $\boldsymbol{S} /\!\!/ \mathbb{T}$ értékű.

[55] Egy ilyen explicit megadásban szerepelhet HEAVISIDE-féle egységugrásfüggvény-szerű szorzó is, amely bekapcsolja a képlékenyedést, ha pl. nő a rugalmas energia, és már át is lépett egy kritikus értéket, és kikapcsolja, ha csökken.

termodinamikai potenciál változójaként ONSAGERi egyenletet származtatunk rá: az ilyen potenciáloknak invariánsaknak kell lenni $\boldsymbol{w}$-nek az ál-mozgás forgatásaiból származó transzformációira), ami még szintén egy nemtriviális kívánalom. A helyzet tehát itt nem lezárt, további fejlesztésekre vár.

Zárásul érdemes megnézni a kis rugalmas deformáltság határesetét.[56] $\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{I_S}$ esetén

$$\dot{\boldsymbol{A}} \approx (\boldsymbol{v}_t \otimes \nabla) + \boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{v}_t \otimes \nabla)^* \boldsymbol{h} - \boldsymbol{Z} - \boldsymbol{h}^{-1}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{h}, \tag{82}$$

így $\boldsymbol{D} \approx \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I_S})$, $\dot{\boldsymbol{D}} \approx \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{A}}$ behelyettesítésével

$$\frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{v}_t \otimes \nabla) + \boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{v}_t \otimes \nabla)^* \boldsymbol{h}\right] \approx \dot{\boldsymbol{D}} + \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{w} \otimes \nabla + \boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{w} \otimes \nabla)^* \boldsymbol{h}\right]. \tag{83}$$

Ezt felintegrálva időben egy referencia-t_0-tól t-ig, olyan képletet kapunk, amely „összdeformáció = rugalmas deformáció + képlékeny deformáció” módon interpretálható. Itt azonban a deformációk *változások*: a bal oldalon a referencia-időponttól mért elmozdulás térderiváltja bukkan föl, a jobb oldal első tagjában a rugalmas deformáltság megváltozása, a második tagban pedig $\boldsymbol{w}$ időintegrálja („képlékeny elmozdulás”) szerepel egy ugyanilyen térderiváltas szerkezetben („képlékeny deformáció”).

9. TOVÁBBI TENNIVALÓK

A szilárd közegek rugalmas alakváltozásainak kinematikája terén a logaritmikus definíciójú, általánosított bal HENCKY-deformációtenzor elvi (dinamikai-termodinamikai) és kísérleti szempontokból kitüntetett volta további vizsgálatok tárgya kell legyen. Megjegyzendő, hogy az eddigi jelek szerint ez a — további bevont fizikai szempontok alapján bevezetett — tenzor kielégítőbb, mint a [FÜLÖP (2008b)] munkában javasolt együttforgó deformáltságtenzor {érdekes észrevétel, hogy e két tenzor számértékileg a deformáltság négyzete rendjéig egyezik [FÜLÖP (2008b)]}.

Az itt bemutatott, téridő-alapú kinematika általánosítandó mikropoláros közegek esetére is, ott ugyanis mikro- és makro-szintű mozgások is vannak, melyek inkorrekt tárgyalása ≫megduplázza≪ az elkövetett fizikai hibák számát az egyszerű kontinuumokhoz képest, és égető szükség van a megbízható kinematikai alapra [PIETRASZKIEWICZ–EREMEYEV (2009)].

Folyadékokra rugalmas deformáltság nincs, csak rugalmas tágultság van: fel kell állítani a tágultság-alapú folyadékdinamikát. Az anyagi sokaság mellőzése a leírásból itt olyan szempontból is fontos, hogy a turbulens áramlások esetén a sebességmező differenciálhatósága, a közegpontok világvonalainak differenciálhatóságának rendje is kérdéses.

[56] A képlékeny deformáltság kicsiségét nem tesszük fel, hiszen tudjuk: nincs is értelme képlékeny deformáltságnak, nincs ilyen állapotjelző mennyiség. Semmi képlékenyedéssel kapcsolatos feltevésre nem is lesz szükség a most következő levezetésben.

Gázok esetén pedig már rugalmas tágultság sincs, és az áramlás még könnyebben válik kuszává (turbulenssé), mint folyadékokra. Ezért folyadékok és gázok esetén a mérlegegyenletek, és például a feszültségtenzor téridő-alapú értelmezése is nemtriviális lehet. Ide kapcsolódik az is, hogy a mozgási energia és a belső energia téridőbarát értelmezése is elkerülhetetlenül szükséges. A közegforgás, a szögsebesség kérdésének tisztázása is hátra van még, mely folyadékok és gázok esetén különlegesen akut feladat.

A szilárd közegeknél folytatni kell olyan mennyiség keresését, mely határozatlanságok nélkül, vagy legalább valamilyen jól kezelhető módon jellemzi a görbületőrző alapszerkezet-változásokat (képlékenyedési lehetőségeket). Az eddigi és az esetleges jövőbeli új mennyiségekre alapozva kiépítendő a képlékenység termodinamikai alapú dinamikája, a [VÁN (2010a)] írásban bemutatott irányvonal folytatásaként. Speciálisan, a reológia is átértékelendő a jelen kinematikai keret fényében.

A deformáltság térderiváltját is tartalmazó rugalmasságtan termodinamikai tárgyalása [VÁN (2010b)] is megismételendő a téridőbarát mennyiségek nyelvén, rendezve így azt a nyugtalanító jelenlegi helyzetet, amely az anyagi objektivitás elvének különböző értelmezései és az ezekből származtatott különböző konstitúciós és dinamikai egyenletek kapcsán fennáll.

Az elvi-lényegi megfogalmazás fejlesztésével párhuzamosan felállítandóak alkalmazássegítő, technikailag könnyen kezelhető átfogalmazások, melyek a konkrét analitikus és numerikus, pl. végeselemes feladatmegoldásokat segítik. Számos konkrét példa végig is számolandó, tanulmányozva a különbségeket, amelyek a megbízható új kinematikai mennyiségek használata és az eddig szokásosaké között fellépnek. A kidolgozott példák alapján elvégzendő ismert és új, célzatosan nyert kísérleti adatok kiértékelése az új és az eddigi mennyiségek nyelvén egyaránt.

KÖSZÖNETMONDÁS

A szerzők köszönetet mondanak Asszonyi Csabának és Lámer Gézának értékes élőszóbeli és a [LÁMER (2009)] írásban kifejtett meglátásaikért-észrevételeikért, és Matolcsi Tamásnak a hasznos és fontos diszkussziókért. Jelen munkát az OTKA K81161 számú pályázata támogatta.

IRODALOM

ARNOLD, V.I. (1974): Matyematyícseszkije metódü klasszícseszkoj mehányiki, *Nauka*, Moszkva (oroszul). Magyar fordítás: A mechanika matematikai módszerei, *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest, 1985.

ASSZONYI, CS. – VÁN, P. – SZARKA, Z. (2007): Izotróp kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **5**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.

BERTRAM, A. (2005): Elasticity and plasticity of large deformations, Springer, Berlin-Heidelberg.

BLOCH, A. (1985): Murphy törvénykönyve, avagy miért romlik el minden? *Gondolat Könyvkiadó*, Budapest.

DIEUDONNÉ, J. (1976): Grunzüge der modernen Analysis 4, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

FIZIKAI NOBEL-DÍJ SAJTÓKÖZLEMÉNY (1993): `http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1993/press.html`.

FÜLÖP, T. (2008a): A tér nem abszolút — a téridő, mint a Galilei-féle relativitási elv következménye. In: FÜLÖP, T. (szerk.), Új eredmények a kontinuumfizikában, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **8**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.

FÜLÖP, T. (2008b): Kontinuumok kinematikájának új értelmezése. In: FÜLÖP, T. (szerk.), Új eredmények a kontinuumfizikában, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **8**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.

FÜLÖP, T. (2009): Rugalmasságtani és reológiai lineáris feladatok. In: ASSZONYI, CS. (szerk.), Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **9**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.

FÜLÖP, T. – BÉDA, GY. (2009): Hidrosztatikus környezetben nyitott hengerszimmetrikus alagút körüli reológiai időfüggés. In: ASSZONYI, CS. (szerk.), Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **9**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.

FÜLÖP, T. – VÁN, P. (2009): Finite strain tensors: which one to use? Előadás az ESMC2009 konferencián (7th EUROMECH Solid Mechanics Conference), Lisbon, Portugal, September 7–11, 2009. A konferenciakiadvány csak az előadás kivonatát tartalmazza.

HORGAN, C.O. – MURPHY, J.G. (2009): A generalization of Hencky's strain-energy density to model the large deformations of slightly compressible solid rubbers, *Mechanics of Materials* **79**, 943–950.

GALILEI, G. (1632): Dialogo, *Gio. Battista Londini*, Firenze (olaszul); magyar fordítás: Párbeszédek, *Kriterion Könyvkiadó*, Bukarest, 1983; pp151–153.

HAUPT, P. (2002): Continuum mechanics and theory of materials, 2nd ed., Springer, Berlin–etc.

INDEX.HU (2009-10): újsághírek: `http://index.hu/kulfold/2009/07/20/leallt_az_s-bahn_berlinben`, `http://index.hu/kulfold/2010/01/29/kedvezmenyeket_kapnak_a_berlini_gyorsvasut_utasai`.

JAGLOM, I.M. (1969): Princip atnaszítyelosztyi Galileja i neevklídava geometrija, *Nauka*, Moszkva (oroszul). Magyar fordítás: Galilei relativitási elve és egy nemeuklideszi geometria, *Gondolat Könyvkiadó*, Budapest, 1985.

KRUISOVÁ, A. – PLEŠEK, J. (2007): Constitutive model of acoustoelasticity for prestressed solids, talk at the conference Continuum Physics and Engineering Applications, 2007, Ráckeve, Hungary.

LÁMER, G. (2009): Az anyagi viselkedés folytonos és diszkrét modellezésének kérdései. A Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2010 ISRM Konferenciára készített írásos előadás-változat. Várható megjelenése a konferenciakiadványban.

MATOLCSI, T. (1984): A concept of mathematical physics. Models for spacetime, *Akadémiai Kiadó*, Budapest.

MATOLCSI, T. (1986): A concept of mathematical physics. Models in mechanics, *Akadémiai Kiadó*, Budapest.

MATOLCSI, T. (1993): Spacetime without reference frames, *Akadémiai Kiadó*, Budapest.

MEZEI, F. (2008): KFKI RMKI szeminárium, 2008. március 27.

O'NEILL, B. (1983): Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Pure and Applied Mathematics, Volume 103, Academic Press, London.

PIETRASZKIEWICZ, W. – EREMEYEV, V. A. (2009): On natural strain measure of the nonlinear micropolar continuum, *International Journal of Solids and Structures* 46, 774–787.

PLEŠEK, J. – KRUISOVÁ, A. (2006): Formulation, validation and numerical procedures for Hencky's elasticity model, Computers and Structures **84**, 1141–1150.

POPPER, P. (1995): Belső utakon, Türelem Háza Bt., 6. o.

SIMONYI, K. (1978): A fizika kultúrtörténete, *Gondolat Kiadó*, Budapest.

TRUESDELL, C. – NOLL, W. (1965): The non-linear field theories of mechanics, (Handbuch der Physik, III/3.) Springer Verlag.

VÁN, P. (2009): Izotróp alakreológia, Montavid Termodinamikai Kutatócsoport kutatási jelentés.

VÁN, P. (2010a): A képlékenységtan termodnamikai alapjairól. In: FÜLÖP, T. (szerk.), Idő- és térderiváltak anyagtörvényekben, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **10**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest. (Jelen kötetben.)

VÁN, P. (2010b): A harmadfokú, véges deformációs rugalmasságtan termodinamikai konzisztenciájáról. In: FÜLÖP, T. (szerk.), Idő- és térderiváltak anyagtörvényekben, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **10**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest. (Jelen kötetben.)