Zárójelentés

A K-62316 számú OTKA pályázat zárójelentése

Témavezető neve: Dr. Páles Zsolt, az MTA doktora, egyetemi tanár

Téma címe: *Nemsima analízis és alkalmazásai*

Kutatás időtartama: 2006.03.01–2010.02.28

A pályázat támogatásával 62 publikáció jelent meg. Ezekből 1 könyv, amely a „Conference on Inequalities and Applications '07” konferencián bemutatott dolgozatokból Inequalities and Applications [9] címmel a Birkhäuser Verlag gondozásában jelent meg. (Ebben a kutatócsoport tagjai két dolgozatot is publikáltak.) További 50 dolgozat nemzetközi tudományos folyóiratban, 11 pedig referált konferenciakiadványban jelent meg. A zárójelbe tett évszám a megjelenés, illetve a várható megjelenés idejét jelöli.

Vera Zeidannal (aki a Michigani Egyetem professzora) együttműködve 7 dolgozat készült el és ebből egy van megjelenés alatt. A Páles–Zeidan (2007, Nonlinear Anal.) [56] dolgozatban a korábbi években elért eredményeink betetőzéseként, az ún. Dubovickij–Miljutyin-féle időtranszformációs trükk segítségével az állapottérre vonatkozó egyenlőtlenségi, az irányítási függvényre pedig egyenlőségi és egyenlőtlenségi korlátozásokat tartalmazó optimális irányítási feladatokra sikerült a Pontrjagin-féle maximum-elvet kiterjeszteni és ezt másodrendű szükséges feltételekkel is kiegészíteni.

Közös kutatásaink egy újabb területe a Clarke-féle általánosított Jacobi-mátrix (amely a lokálisan Lipschitz véges dimenziós normált terek között ható függvényekhez társít egy halmazértékű derivált fogalmat), amelyet végtelen dimenziós normált tereken értelmezett és véges dimenziós értékkészletű lokálisan Lipschitz függvényekre sikerült általánosítani a Páles–Zeidan (2007, J. Convex Anal.) [54] dolgozatban. Az általánosítás a lokálisan Lipschitz függvények (Rademachertől eredő) majdnem mindenütti differenciálási tételén alapszik, mivel a függvény véges dimenziós affin alterekre vett megszorításainak Clarke-féle Jacobi-mátrixai segítségével értelmezi az általánosított halmazértékű deriváltat. Ennek az új fogalomnak a karakterizációját és a kalkulus szabályok egy teljes spektrumát (összeg szabály, lánc szabály, részenként sima függvények differenciálása, stb.) sikerült kidolgozni a Páles–Zeidan (2008, J. Math. Anal. Appl.) [57] dolgozatban. Bebizonyítottuk, hogy ez a derivált fogalom a legszűkebb szekvenciálisan felülről folytonos halmazértékű szigorú Hadamard-féle derivált. A bizonyítások hátterében Fabian és Preiss egy eredményének az általánosítására volt szükség. Ennek felhasználásával kimutattuk, hogy az általánosított derivált véges dimenziós alterekre való leszűkítése és az ugyanarra az altérre nézve képzett általánosított derivált között egyenlőség áll fenn. A Radon-Nikodym tér értékű függvényekre vonatkozó kiterjesztést dolgoztuk ki a Páles–Zeidan (2007, Set-Valued Anal.) (45 oldolas) [55] dolgozatunkban. A Páles–Zeidan (2009, J. Convex Anal.) [58] dolgozatban a sikerült egy olyan szűk halmazt konstruálni, amelynek konvex burka az általunk bevezetett általánosított halmazértékű derivált. Ennek az alkalmazások szempontjából az a jelentősége, hogy sokszor már ez a szűkebb „derivált” is elegendő a szélsőérték problémákra vonatkozó szükséges feltételek megfogalmazásához. Az általánosított derivált konstruálhatósága nagy mértékben függ az értékkészlet tér geometriai tulajdonságaitól, legáltalánosabban normált terek duális tereként előálló Banach-térbeli értékű függvényekre vonatkozó kiterjesztést sikerült kidolgozni a Páles–Zeidan (2010, Discrete Contin. Dyn. Syst.) [60] dolgozatban. Ebben a dolgozatban egy példát is sikerült konstruálni, ami azt mutatja, hogy van olyan a folytonos függvények terébe képező lokálisan Lipschitz leképezés, amelyhez „értelmes módon” nem lehet általánosított deriváltat rendelni. Az irányitáselméleti alkalmazásoknál a fent általánosság azoban még mindig nem elegendően hatékony, ezért szükségessé vált egy ú.n. általánosított koderivált fogalmának az értelmezése, amely már tetszőleges értelmezési tartomány és tetszőleges értékkészlet esetén használható. Ezt az új fogalmat Páles–Zeidan (2010, Set-Valued Variational Anal.) [59] dolgozatban vezettük be, és az erre vonatkozó kalkulus szabályok egy teljes spektrumát (összeg szabály, lánc szabály, részenként sima függvények differenciálása, stb.) erre is kidolgoztuk.

A Páles (2006) [51] dolgozat ún. absztrakt irányítási feladatokra vonatkozik, vagyis olyan problémákra, ahol változók két csoportba oszthatók: az egyik csoport szerint Lipschitz folytonosság, a másik csoport szerint pedig egy konvexitási feltétel teljesül. Az optimumnak az ilyen problémákra nyert első- és magasabb-rendű szükséges feltétele minden szempontból általánosítja Ioffénak és Tyihomirovnak egy klasszikus eredményét, amely a Lagrange-elv és a Pontrjagin-féle maximum-elv egy közös általánosítása. Ezek az eredmények elsősorban a konkrét — közönséges és parciális differenciálegyenletekkel vezérelt, nemsima adatokat tartalmazó — optimális irányítási problémákra alkalmazhatók sikeresen.

A Baják–Páles (2009, Acta Math. Hungar.) [7] dolgozatban a Hahn–Banach és a Dubovickíj–Miljutyin-féle elválasztási tételeket olyan halmazok szeparációjára, elválasztására sikerült kiterjeszteni, amelyek konvex halmazok (nemlineáris) inverz képeként állnak elő. Ebből az eredményből alkalmazásként a feltételes szélsőérték problémákra jól ismert Lagrange-féle multiplikátor tétel is azonnal és könnyen levezethető.

A másik vizsgált témakörben a konvexitás különböző általánosításait, ezek jellemzését, továbbá konvex függvények perturbációs tulajdonságait, stabilitását vizsgáltuk. További érdekesnek mutatkozó kérdés a nem elsőrendű Lipschitz-perturbációk vizsgálata és az eddigi eredményeknek a vektorváltozós függvények esetére vonatkozó kiterjesztése. A monoton függvények Lipschitz-perturbációt jellemeztük a Makó-Páles (2006, Acta Math. Hungar.) [45] dolgozatban. Boros Zoltán (2008, Math. Inequal. Appl.) [12], egy sejtésemet igazolva, megmutatta, hogy a klasszikus Tagaki-függvény (más néven van der Waerden-függvény) kielégíti a Jensen-egyenlőtlenség egy perturbált alakját, azaz, hogy rendelkezik egy bizonyos approximatív konvexitási tulajdonsággal. Ezt az eredményt messzemenően sikerült általánosítani a Makó-Páles (2010, J. Math. Anal. Appl.) [44] cikkben, ahol az ú.n. φ-konvexitással kapcsolatos Takagi-típusú függvények egy széles osztályára sikerült hasonló jellegű approximatív konvexitási tulajdonságot igazolni.

A Bessenyei–Páles (2006, Math. Inequal. Appl.) [10] dolgozatban az ún. Csebisev-rendszerekre nézve első-, valamint magasabb rendben konvex függvények konvexitásával foglalkoztunk és kiterjesztettük a klasszikus esetből ismert Hermite–Hadamard-egyenlőtlenséget ilyen rendszerekre. A különböző szimmetria tulajdonságokkal rendelkező függvényekre vonatkozó Hermite–Hadamard-típusú egyenlőtlenséget találtunk a Czinder–Páles (2006, Math. Inequal. Appl.) [18] dolgozatban, amelyről kiderült, hogy a Gini- és Stolarsky-közepek összehasonlítási tételének bizonyításában is jelentős szerepet játszik.

Egy új szubdifferenciálfogalmat, a $\mathbb{Q}$-szubdifferenciál fogalmát vezettük be a Boros–Páles (2006, J. Math. Anal. Appl.) [14]-ben, amely a konvex analízisből ismert standard szubdifferenciál fogalomnak az általánosítása, ennek elemei azonban nem lineáris funkcionálok, hanem additív függvények. Ennek az új fogalomnak a segítségével a Jensen-konvexitást a $\mathbb{Q}$-szubdifferenciál monotonitásával jellemeztük.

A Beckenbach által bevezetett konvexitás-fogalomra vonatkozó szendvics tételeket nyertünk Nikodem–Páles (2007, J. Convex Anal.) [48] dolgozatban. A három paraméteres síkbeli tartományokon értelmezett Beckenbach családokra nézve konvex függvények tulajdonságait vizsgáltuk az Adamek–Gilányi–Nikodem–Páles (2007, J. Math. Anal. Appl.) [2] dolgozatban. A konvexitás, Jensen-convexitás és a Wright-konvexitás magasabb-rendű általánosításait vezettük be, illetve vizsgáltuk az ilyen tulajdonságú függvények közötti kapcsolatoka a Gilányi–Páles (2008, Math. Inequal. Appl.) [24] cikkünkben. A magasabb rendben Wright-konvex függvényeknek C. T. Ng klasszikus eredmnyével analóg dekompozíciós tételét sikerült bebizonyítani a Maksa–Páles (2009, J. Math. Anal. Appl.) [42] dolgozatban. A magasabb-rendű monotonitás és konvexitás Hermite–Hadamard egyenlőtlenséghez hasonló lineáris integrálegyenlőtlenséggel való jellemzését találtuk a Bessenyei–Páles (2010, Proc. R. Soc. Edinburgh Sect. A) [11] cikkben. A Hadamard-egyenlőtlenség (nem csak konvex függvényekre való) teljesülésének szükséges és elegendő feltételeit írtuk le a Fink–Páles (2007, Appl. Anal. Discr. Math.) [22] dolgozatban. A Nikodem-Páles (2008, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.) [49] dolgozatban a t-kváziaffinitás az $1/2$-kváziaffinitás között kapcsolatot sikerült meghatározni. Az Hermite-Hadamard egyenlőtlenségre stabilitási tételt igazoltunk a Házy–Páles (2009, Proc. Royal Soc. A) [36] és Házy [30] dolgozatokban. A Daróczy–Páles [21] cikk a nemkonvex függvényeknek egy olyan új jellemzését adja, aminek a segítségével új, a kváziaritmetikai közepeket is általánosító középtípusok összehasonlítási tételeit sikerült leírni.

A különféle értelemben vett általánosított konvex függvényekre vonatkozó Bernstein–Doetsch-típusú eredményeket tárgyalnak a Burai–Házy–Juhász (2009, Publ. Math. Debrecen) [17], Házy [27], [31], [33], [34] és Házy–Burai [35] dolgozatok.

A középértékekkel kapcsolatos Jensen-típusú egyenleteket, illetve közepek Gauss-féle kompozícióit tartalmazó függvényegyenleteket vizsgáltunk a Daróczy–Maksa–Páles (2006, Proc. Amer. Math. Soc.) [20] és a Daróczy–Lajkó–Lovas–Maksa–Páles (2007, Acta Math. Hungar.) [19] dolgozatokban. A metrikus grupoidokon tekintett Cauchy-egyenlet stabilitásának különböző típusú becsléseit foglaltuk össze a Gilányi–Kaiser–Páles (2007, Aequationes Math.) [23] cikkünkben. A kváziaritmetikai közepekből L-konjugálással nyert újabb közepek összehasonlításának szükséges és elegendő feltételeit találtuk a Bakula–Páles–Pecaric (2007, Commun. Appl. Anal.) [8] dolgozatunkban. A Losonczi–Páles (2008, J. Math. Anal. Appl.) [38] dolgozatban két függvénnyel és egy mértékkel meghatározott közepek összehasonlításának szükséges feltételeit és elegendő feltételeit határoztuk meg. A Maksa–Páles (2010, Colloq. Math.) [43] dolgozatban a súlyozott kváziaritmetikai közepek összehasonlításanak szükséges és elegendő feltételeit arra az általánosab esetre is megadtuk, amikor az összehasonlítandó közepek nem feltétlenül ugyanúgy vannak súlyozva. A Makó–Páles (2008, Publ. Math. Debrecen) [46] cikkben a kváziaritmetikai közepek mértékek segítségével való általánosításait vizsgáltuk és megoldottuk az ilyen közepek egyenlőségi problémáját. A Makó–Páles (2009, J. Math. Anal. Appl.) [47] dolgozatban az ilyen közepek osztályában meghatároztuk azokat a közép-párokat, amelyek Gauss-kompozíciója a számtani közép. Az invariancia-egyenletet a Matkowski által bevezetett általánosított kváziaritmetikai közepek osztályában négyszeri folytonos differenciálhatóságot feltéve oldottuk meg a Baják–Páles (2009, Aequationes Math.) [6] dolgozatban. Az Gini-közepekre teljesülő invariancia-egyenlet összes megoldását komputaralgebrai eszközökkel, a MAPLE programcsomag alkalmazásának segítségével oldottuk meg a Baják–Páles (2009, Comput. Math. Appl.) [5] cikkben. Az itt kifejlesztett módszer, amely az elméleti megfontolásokat és a komputeralgebrai eszközökkel elvégzett részletszámításokat kombinálja, valószínűleg további paraméteres egyenlőségi problémák vizsgálatára is alkalmazható lesz.

A többváltozós kváziösszegek reprezentácóit írja le a Maksa-Nizsalóczki [41] dolgozat. A Maksa–Mészáros [40] dolgozatban az exponenciális valószínűségeloszlás egy függvényegyenletekkel való jellemzését adtuk. A Lajkó-Maksa-Mészáros (2008, Publ. Math. Debrecen) [37] cikkben a Hosszú-féle függvényegyenlet egy általánosítását sikerült mérhetőségi feltételek mellett megoldani. A Gselmann–Maksa (2009, Sci. Math. Jpn.) [25] dolgozatban a nemnegatív információfüggvények egy új előállítását adtuk meg. A Gselmann–Maksa (2009, Aequationes Math.) [26] dolgozatban a pozítív paraméterű információfüggvények függvényegyenletének Hyers–Ulam értelemben vett stabilitását bizonyítottuk. A Páles (2008, Acta Sci. Math. (Szeged)) [53] cikkben a lineáris függvényegyenletek egy speciális osztályát vizsgáltuk, amely alapvető fontosságú az iterációt is tartalmazó nemlineáris egyenletek vizsgálatában. Az iterációt is tartalmazó függvényegyenletek regularitáselméletéről írott összefoglalót tartalmaz a Páles (2006, Tatra Mt. Math. Publ.) [52] dolgozat. A kiinduló eredmény általában Lebesgue-nek a monoton függvényekre vonatkozó majdnem mindenütti differenciálhatósági tétele, ezért meglepő a Boros-Daróczy (2006, Publ. Math. Debrecen) [13] dolgozat eredménye, amely egy iteratív egyenletről azt mutatja ki, hogy az általános megoldások tetszőleges additív függvények.

Debrecen, 2010. április 26. (Témavezető aláírása)

A kutatási témában a jelen OTKA pályázat támogatásával megjelent és megjelenés alatt álló publikációk listája

[1] A. E. Abbas, E. Gselmann, Gy. Maksa, and Z. Sun. General and continuous solutions of the entropy equation. In *Proceedings of the 28th International Workshop on Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering*, volume 1073, pages 3–7. American Institute of Physics, 2008.

[2] M. Adamek, A. Gilányi, K. Nikodem, and Zs. Páles. A note on three-parameter families and generalized convex functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 330(2):829–835, 2007.

[3] N. K. Agbeko and A. Házy. An algorithmic determination of optimal measure from data and an application. In *Proc. MicroCAD 2010 Int. Sci. Conf.*, volume H, pages 17–22, 2010.

[4] N. K. Agbeko and A. Házy. An algorithmic determination of optimal measure from data and some applications. *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyíregyháziensis*, 2010.

[5] Sz. Baják and Zs. Páles. Computer aided solution of the invariance equation for two-variable Gini means. *Comput. Math. Appl.*, 58:334–340, 2009.

[6] Sz. Baják and Zs. Páles. Invariance equation for generalized quasi-arithmetic means. *Aequationes Math.*, 77(1-2):133–145, 2009.

[7] Sz. Baják and Zs. Páles. Separation theorem for non-linear inverse images of convex sets. *Acta Math. Hungar.*, 124(1-2):125–144, 2009.

[8] M. Klaričić Bakula, Zs. Páles, and J. Pečarić. On weighted L-conjugate means. *Commun. Appl. Anal.*, 11(1):95–110, 2007.

[9] C. Bandle, A. Gilányi, L. Losonczi, M. Plum, and Zs. Páles, editors. *Inequalities and Applications*, volume 157 of *Internat. Ser. Numer. Math.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.

[10] M. Bessenyei and Zs. Páles. Characterizations of convexity via Hadamard's inequality. *Math. Inequal. Appl.*, 9(1):53–62, 2006.

[11] M. Bessenyei and Zs. Páles. Characterization of higher-order monotonicity via integral inequalities. *Proc. R. Soc. Edinburgh Sect. A*, (1), 2010.

[12] Z. Boros. An inequality for the Takagi function. *Math. Inequal. Appl.*, 11(4):757–765, 2008.

[13] Z. Boros and Z. Daróczy. A composite functional equation with additive solutions. *Publ. Math. Debrecen*, 69(1-2):245–253, 2006.

[14] Z. Boros and Zs. Páles. $\mathbb{Q}$-subdifferential of Jensen-convex functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 321(1):99–113, 2006.

[15] Z. Boros and Á. Száz. Infimum and supremum completeness properties of ordered sets without axioms. *An. Ştiinţ. Univ. Ovidius Constanţa Ser. Mat.*, 16(2):31–37, 2008.

[16] Z. Boros and Á. Száz. Reflexivity, transitivity, symmetry and anti-symmetry of the intersection convolution of relations. *Rostock. Math. Kolloq.*, (63):55–62, 2008.

[17] P. Burai, A. Házy, and T. Juhász. Bernstein–Doetsch type results for s-convex functions. *Publ. Math. Debrecen*, 75(1-2):23–31, 2009.

[18] P. Czinder and Zs. Páles. Some comparison inequalities for Gini and Stolarsky means. *Math. Inequal. Appl.*, 9(4):607–616, 2006.

[19] Z. Daróczy, K. Lajkó, R. L. Lovas, Gy. Maksa, and Zs. Páles. Functional equations involving means. *Acta Math. Hungar.*, 116(1-2):79–87, 2007.

[20] Z. Daróczy, Gy. Maksa, and Zs. Páles. Functional equations involving means and their Gauss composition. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 134(2):521–530, 2006.

[21] Z. Daróczy and Zs. Páles. A characterization of nonconvexity and its applications in the theory of quasi-arithmetic means. In C. Bandle, A. Gilányi, L. Losonczi, M. Plum, and Zs. Páles, editors, *Inequalities and Applications (Noszvaj, 2007)*, volume 157 of *International Series of Numerical Mathematics*, pages 251–260. Birkhäuser Verlag, 2008.

[22] A. M. Fink and Zs. Páles. What is Hadamard's inequality? *Appl. Anal. Discrete Math.*, 1:29–35, 2007.

[23] A. Gilányi, Z. Kaiser, and Zs. Páles. Estimates to the stability of functional equations. *Aequationes Math.*, 73(1-2):125–143, 2007.

[24] A. Gilányi and Zs. Páles. On convex and Wright-convex functions of higher order. *Math. Inequal. Appl.*, 11(2):271–282, 2008.

[25] E. Gselmann and Gy. Maksa. The Shannon field of non-negative information functions. *Sci. Math. Jpn.*, 69(2):241–248, 2009.

[26] E. Gselmann and Gy. Maksa. Stability of the parametric fundamental equation of information for nonpositive parameters. *Aequationes Math.*, 78:271–282, 2009.

[27] A. Házy. On regularity properties of approximately t-convex functions. In *Proc. MicroCAD 2006 Int. Sci. Conf.*, volume G, pages 43–49, 2006.

[28] A. Házy. On stability of t-convexity. In *Proc. MicroCAD 2007 Int. Sci. Conf.*, volume G, pages 23–28, 2007.

[29] A. Házy. On the stability of t-convex functions. *Aequationes Math.*, 74(3):210–218, 2007.

[30] A. Házy. On a certain stability of the Hermite–Hadamard inequality. In *Proc. MicroCAD 2008 Int. Sci. Conf.*, volume G, pages 9–14, 2008.

[31] A. Házy. Bernstein–Doetsch type results for Breckner s-convex functions. In *Proc. MicroCAD 2009 Int. Sci. Conf.*, volume G, pages 17–22, 2009.

[32] A. Házy. Inequalities for s-convex functions. In *Proc. MicroCAD 2009 Int. Sci. Conf.*, volume G, pages 23–28, 2009.

[33] A. Házy. Bernstein–Doetsch type results for generalized approximately convex functions. In *Proc. MicroCAD 2010 Int. Sci. Conf.*, volume H, pages 27–32, 2010.

[34] A. Házy. Bernstein–Doetsch type results for h-convex functions. *Math. Inequal. Appl.*, 2010.

[35] A. Házy and P. Burai. Bernstein–Doetsch type results for generalized convex function. In *Proc. 12th Symp. Math. Appl. "Politehnica" (November 5-7, 2009).* University of Timişoara, 2010.

[36] A. Házy and Zs. Páles. On a certain stability of the Hermite–Hadamard inequality. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 465(2102):571–583, 2009.

[37] K. Lajkó, Gy. Maksa, and F. Mészáros. On a generalized Hosszú functional equation. *Publ. Math. Debrecen*, 74(1-2):101–106, 2009.

[38] L. Losonczi and Zs. Páles. Comparison of means generated by two functions and a measure. *J. Math. Anal. Appl.*, 345(1):135–146, 2008.

[39] Gy. Maksa. The stability of the entropy of degree alpha. *J. Math. Anal. Appl.*, 346(1):17–21, 2008.

[40] Gy. Maksa and F. Mészáros. A characterization of the exponential distribution through functional equations. In C. Bandle, A. Gilányi, L. Losonczi, M. Plum, and Zs. Páles, editors, *Inequalities and Applications (Noszvaj, 2007)*, volume 157 of *International Series of Numerical Mathematics*, pages 291–298. Birkhäuser Verlag, 2008.

[41] Gy. Maksa and E. Nizsalóczki. Quasi-sums in several variables. *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.)*, 22(2):193–207 (electronic), 2006.

[42] Gy. Maksa and Zs. Páles. Decomposition of higher-order Wright-convex functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 359:439–443, 2009.

[43] Gy. Maksa and Zs. Páles. Remarks on the comparison of weighted quasi-arithmetic means. *Colloq. Math.*, 2010. accepted.

[44] J. Makó and Zs. Páles. Approximate convexity of Takagi type functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 2010.

[45] Z. Makó and Zs. Páles. On Lipschitz perturbation of monotonic functions. *Acta Math. Hungar.*, 113(1-2):1–18, 2006.

[46] Z. Makó and Zs. Páles. On the equality of generalized quasiarithmetic means. *Publ. Math. Debrecen*, 72(3-4):407–440, 2008.

[47] Z. Makó and Zs. Páles. The invariance of the arithmetic mean with respect to generalized quasi-arithmetic means. *J. Math. Anal. Appl.*, 353:8–23, 2009.

[48] K. Nikodem and Zs. Páles. Generalized convexity and separation theorems. *J. Convex Anal.*, 14(2):239–248, 2007.

[49] K. Nikodem and Zs. Páles. Note on t-quasiaffine functions. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 29:127–139, 2008.

[50] K. Nikodem and Zs. Páles. Minkowski sums of Cantor-type sets. *Colloq. Math.*, 119(1):95–108, 2010.

[51] Zs. Páles. Abstract control problems with nonsmooth data. In A. Seeger, editor, *Recent Advances in Optimization. Proceedings of the 12th French–German–Spanish Conference on Optimization, Avignon (2004)*, volume 563 of *Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems*, pages 205–216, Berlin–Heidelberg, 2006. Springer.

[52] Zs. Páles. Regularity problems and results concerning composite functional equations in several variables. *Tatra Mt. Math. Publ.*, 34(2):289–306, 2006.

[53] Zs. Páles. On functional equations characterizing polynomials. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 74:581–592, 2008.

[54] Zs. Páles and V. Zeidan. First and second-order optimality conditions for strong local minimum in control problems with pure state constraints. *Nonlinear Anal.*, 67(8):2506–2526, 2007.

[55] Zs. Páles and V. Zeidan. Generalized Jacobian for functions with infinite dimensional range and domain. *Set-Valued Anal.*, 15(4):331–375, 2007.

[56] Zs. Páles and V. Zeidan. Infinite dimensional Clarke generalized Jacobian. *J. Convex Anal.*, 14(2):433–454, 2007.

[57] Zs. Páles and V. Zeidan. Infinite dimensional generalized Jacobian: properties and calculus rules. *J. Math. Anal. Appl.*, 344(1):55–75, 2008.

[58] Zs. Páles and V. Zeidan. The core of the infinite dimensional generalized Jacobian. *J. Convex Anal.*, 16(2):321–349, 2009.

[59] Zs. Páles and V. Zeidan. Co-Jacobian for Lipschitzian maps. *Set-Valued and Variational Anal.*, 18(1):57–78, 2010.

[60] Zs. Páles and V. Zeidan. V-Jacobian and V-co-Jacobian for Lipschitzian maps. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2010. accepted.

[61] Zs. Ádám, K. Lajkó, Gy. Maksa, and F. Mészáros. Sequenced problems for functional equations. *Teaching Math. Comp. Sci.*, 4(1):179–192, 2006.

[62] Zs. Ádám, K. Lajkó, Gy. Maksa, and F. Mészáros. Two functional equations on group. *Ann. Math. Sil.*, 21:7–13, 2007.