

# A mechanika p-Laplace egyenleteinek vizsgálata

OTKA K61620

Zárójelentés: szakmai beszámoló

**A pályázat időtartama:** 2006. február 1. – 2009. január 31. (36 hónap)

**Kutatóhely:** Miskolci Egyetem (ME), Analízis Tanszék

**A pályázat résztvevői:** Vadászné dr. Bognár Gabriella, egyetemi docens (vezető)

Szilvásiné Rozgonyi Erika, egyetemi adjunktus (résztvevő)

## A pályázat eredményei:

- **Publikációk:** Az OTKA pályázat támogatásával, a pályázat számának feltüntetésével összesen 25 lektorált dolgozat jelent meg (vagy van elfogadva) folyóiratban, vagy konferencia kiadványban (lásd a részletes listát a beszámoló végén). Két folyóirat, amelyben dolgozatunk jelent meg, rendelkezik impact factorral és még két megjelenésre váró fog rendelkezni impact factorral.

A publikációk számszerű összesítése:

	<i>Vadászné Bognár Gabriella</i>	<i>Szilvásiné Rozgonyi Erika</i>	<i>Közös dolgozatok</i> Vadászné B. G. + Szilvásiné R.E.	Össze- sen
Lektorált cikk	10	0	4	14
Cikk lekt. konf. kiadványban	5	4	2	11
	15	4	6	25

- **Előadások külföldön és Magyarországon:** A pályázat két résztvevője összesen 21 előadást tartott a három éves időszakban, amelyek közül kiemelendő három külföldi konferencián tartott plenáris előadás és két meghívott előadás (lásd a részletes listát a beszámoló végén).

Az előadások számszerű összesítése:

	<i>Vadászné Bognár Gabriella</i>	<i>Szilvásiné Rozgonyi Erika</i>	Összesen
Előadások külföldön angolul	10	2	12
Előadások Mo.-on angolul	2	2	4
Előadások Mo.-on magyarul	2	3	5
Összesen	14	7	21

- 2006 habilitáció: **Vadászné Bognár Gabriella** a ME Műszaki-természettudományi Habilitációs Tanácsától a **dr. habil.** címet kapott.
- 2007 decemberében **Szilvásiné Rozgonyi Erika**, aki a ME Hatvany József Informatikai Tudományok Doktori Iskolában doktorandusz, **abszolutoriumot** szerzett és 2008 július 1-től adjunktusi kinevezést kapott.

### **A pályázat nemzetközi kapcsolatai:**

- A **2006-2007** időszakban a pályázat résztvevői egy **Kétoldalú Magyar-Cseh TÉT** pályázatnak (CZ-14/2005, OMFB 00700/2006) szintén a tagjai voltak; a kutatási terület a két pályázat esetén szorosan kapcsolódott. Ezen TÉT pályázatnak három cseh résztvevője volt a **University of West Bohemia** részéről Pilzenből: **Prof. Pavel Drábek, Jan Cepicka és Petr Necesal**, valamint a magyar részről, a Miskolci Egyetemről a jelen OTKA pályázat két résztvevője. A pályázat eredményeként két dolgozat készült el (lásd a publikációs jegyzékben: [13], [14]).
- **Masaryk University**, Brno, Cseh Köztársaság: **Prof. Ondrej Dosly**. Az OTKA pályázat támogatásával rendszeresen látogattuk egymást minden év tavaszán. Ez a

kapcsolat már 2001-től folyamatos. A közös munka eredményeként a 2006-2008 időszakban két dolgozat jelent meg (lásd a publikációs jegyzékben: [3], [12]) és egy további készült el, amely áprilisban lesz közlésre leadva.

- **Prof. Marta Garcia-Huidobro, Pontificia Universidad Catolica de Chile, Santiago, Chile** és **Prof. Raul Manasevich, Universidad de Chile, Santiago.** A jelen OTKA pályázat vezetője a két chilei egyetemen tett egyhónapos látogatást. A megkezdett dolgozatot a chilei professzorok 2009 júliusi látogatása során fejezzük be és a közös dolgozatot közlésre leadjuk.
- **Prof. Siavash Sohrab, Northwestern University, IL, USA.** A közös kutatást Amerikában 2008 márciusában kezdtük és azóta is folyamatosan dolgozunk periodikus határréteg áramlások áramvonalainak meghatározásán. Eredményeinkről 2009. augusztus 20-23. között Moszkvában megrendezésre kerülő Fluid Mechanics and Aerodynamics konferencián plenáris előadást tartunk és a dolgozatot közlésre leadtuk.

## Az elért eredmények rövid ismertetése:

Az OTKA pályázat keretében a műszaki gyakorlatban előforduló olyan problémák matematikai megoldásával foglalkoztunk, amelyek modellezésében a deriváltak nemlineárisan az  $\Delta_p u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u |\operatorname{grad} u|^{p-1})$ ,  $p > 1$ , ún. p-Laplace operátoron keresztül jelennek meg.

Tipikusan ilyen feladatok a nemnewtoni folyadékok áramlása során, filtrációnál, porózus közegen való szivárgásnál jelentkeznek. Foglalkoztunk nemnewtoni folyadékok reakció-diffúzió feladataival és határréteg áramlásával, ill. speciálisan polietilén csőben való áramlásával a viszkozitást is figyelembe véve. Az alábbiakban részletezzük azokat a műszaki feladatokban alkalmazható eredményeket, amelyeket az elmúlt három év során értünk el:

1. A p-Laplace típusú Hill-féle differenciálegyenletek megoldásainak hatványsor alakú megoldásai:

Vizsgáltuk az  $y''|y|^{p-1} \pm y|y|^{p-1} = 0$ ,  $p > 0$  differenciálegyenlet megoldásait az  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$  ill. az  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$  kezdeti feltételek mellett. A

nemlineáris kezdetiérték feladatok  $\sum_{i=0}^n a_i x^\alpha$  hatványsor alakú megoldásainak

meghatározásához először a függvény elaszticitását alkalmaztuk, majd az ún. J.C.P. Miller formulát, így módon határoztuk meg az  $a_i$  együtthatókat különböző  $p$  paraméterek esetén. A kapott megoldások az ún. hipergeometrikus függvények általánosításának hatványsor alakú előállítását eredményezték:

a.  $y''|y|^{p-1} \pm y|y|^{p-1} = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1 \rightarrow$  általánosított szinusz függvény

b.  $y''|y|^{p-1} \pm y|y|^{p-1} = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0 \rightarrow$  általánosított koszinusz függvény

c.  $y''|y|^{p-1} \pm y|y|^{p-1} = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1 \rightarrow$  általánosított szinusz hiperbolikus függvény

d.  $y''|y|^{p-1} \pm y|y|^{p-1} = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0 \rightarrow$  általánosított koszinusz hiperolikusz függvény

Publikációk: [10], [22], [23], [24].

Előadások konferencián: Szilvásiné Rozgonyi Erika: (1), (3), (4)

Vadászné Bognár Gabriella: (12), (14)

2. Az  $y''|y|^{p-1} + a(t)y|y|^{p-1} = 0$ ,  $p > 0$  fél-lineáris differenciálegyenlet megoldásainak geometriai tulajdonságait vizsgáltuk. A Minkowski-síkon definiált metrikához differenciálegyenlet két lineárisan független megoldásával (paraméteresen megadott görbékkel) az ún. izoperimetrix és indikatrix görbéket és azok geometriai tulajdonságait vizsgáltuk: ívhossz, izoperimetrikus tulajdonság és általánosított  $\tilde{\pi}(p)$  érték.

Továbbá a fél-lineáris differenciálegyenletek egy érdekes tulajdonságát, a területtartó tulajdonságot vizsgáltuk. A  $(a(t)\Phi_p(x'))' + p b(t)\Phi_p(x) = 0$ , differenciálegyenletet, ahol  $p > 0$ ,  $\Phi_p(u) = |u|^{p-1}u$ , az  $a(t)$  pozitív, folytonos függvény, míg  $b(t)$  szakaszosan folytonos, ha  $t \in I$ . A differenciálegyenlet átírható a

$$\begin{cases} x' = [a(t)]^{-\frac{1}{p}} \Phi_{1/p}(y), \\ y' = -p b(t) \Phi_p(x), \end{cases}$$

differenciálegyenletrendszeré az  $y = a(t)\Phi_p(x')$  jelöléssel. Bevezetve a

$$H(t, x, y) = \frac{p}{p+1} \left[ b(t)|x|^{p+1} + [a(t)]^{-\frac{1}{p}} |y|^{\frac{1}{p}+1} \right] \quad \text{Hamilton függvényt a}$$

differenciálegyenletrendszer ekvivalens az

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial H}{\partial y}, \\ y' = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

rendszerrel. Tekintsük az  $M_p$  Minkowski síkot a  $p$  normával

$$\|x\|_p := \left( |x_1|^{p+1} + |x_2|^{p+1} \right)^{\frac{1}{p+1}}. \quad \text{Vezessük be az általánosított } (r, \varphi)$$

polárkoordinátákat az alábbi módon:

$$\begin{aligned} x_1 &= r S'_p(\varphi), \\ x_2 &= r S_p(\varphi), \end{aligned}$$

ahol  $S_p$  jelüli az általánosított szinuszfüggvényt, amely az

$$S_p'' \left| S_p' \right|^{p-1} + \Phi_p(S_p) = 0, \quad p > 0$$

differenciálegyenlet megoldása az  $S_p(0) = 0$ ,  $S_p'(0) = 1$  kezdeti feltételekkel. Ha

$r_t : [\varphi_1(t), \varphi_2(t)] \rightarrow [0, +\infty)$  egy csillagszerű tartományt jelöl, akkor a területe a

$$A = \frac{p}{p+1} \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} r_t^{p+1}(\varphi) d\varphi \quad \text{formulával határozható meg. Ha } p=1, \text{ akkor a formula}$$

$$\text{a jól ismert } A = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} r_t^2(\varphi) d\varphi \quad \text{formulára egyszerűsödik. Megvizsgáltuk azt is,}$$

hogy milyen a  $y''|y|^{p-1} + a(t)y|y|^{p-1} = 0$  egyenletnél általánosabb másodrendű differenciálegyenletek tartják meg a területtartó tulajdonságot. Megmutattuk, hogy az  $x'' + b(t)f(x, x') = 0$  típusú nemlineáris differenciálegyenletek közül csak azok rendelkeznek ilyen tulajdonsággal, amelyek esetén az egyenletben szereplő  $f$  függvény  $f(x, y) = C|x|^{p-1}|y|^{1-p}$ , alakú, valamely  $C > 0$  és  $p > 0$  valós konstansokkal. Tehát az  $f$  függvény  $C = 1$  esetén pontosan a  $y''|y|^{p-1} + a(t)y|y|^{p-1} = 0$  egyenlettel egyezik meg.

Publikációk: [4], [11]

Előadások konferencián: Vadászné Bognár Gabriella: (13)

3. A  $\Delta_p u + (-1)^i u |u|^{q-1} = 0$ ,  $u = u(x)$ ,  $x \in R^n$  nemlineáris másodrendű parciális differenciálegyenletet tekintettük, amikor  $n \geq 1$  és  $p$  és  $q$  pozitív valós számok,  $i=0,1,\dots$  és  $\Delta_p u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u |\operatorname{grad} u|^{p-1})$  az  $y(0)=1$ ,  $y'(0)=0$  kezdeti feltételekkel. Ha a paramétereket speciálisan választjuk meg, azaz  $p=q$ , akkor az egydimenziós feladat az 1 szakaszbellel egyezik meg. Az  $u(x) = y(t)$  radiálisan szimmetrikus holomorf megoldások egzisztenciáját a Briot-Bouquet tétel alkalmazásával bizonyítottuk, és megmutattuk, hogy a formális megoldások konvergenssek, valamint módszert adtunk a hatványsor alakú megoldások előállítására. A módszert példákon keresztül szemléltettük.

Publikációk: [7]

Előadások konferencián: Vadászné Bognár Gabriella: (11), (12)

4. Az  $y'' |y|^{p-1} \pm y |y|^{p-1} = 0$  differenciálegyenlet lokális holomorf megoldásainak létezését igazoltuk az  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$  ill. az  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$  kezdeti feltételek mellett. Megmutattuk a megoldások előállítását a J.C.P. Miller formula alkalmazásával.

Publikációk: [20]

Előadások konferencián: Vadászné Bognár Gabriella: (10)

Szilvásiné Rozgonyi Erika (2)

5. A  $y'' |y|^{p-1} \pm y |y|^{p-1} = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ , ill.  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$  az kezdetiérték feladatoknaka hatványsor alakú megoldásain kívül az  $y(x) = A e^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (A e^x)^{-n(p+1)}$  exponenciális sor alakú megoldásait is vizsgáltuk. Természetesen  $p=1$  esetben a két megoldás a szinuszhiperbolikus ill. a koszinuszhiperbolikus függvények és a két sor a jól ismert

$\sinh x = e^x \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x} \right)$  és  $\cosh x = e^x \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2x} \right)$  formulákká redukálódik.

Az exponenciális sor alakú megoldás estén megadtuk az együtthatók meghatározásának a módját az egyenletben szereplő  $p$  paraméter függvényében és megvizsgáltuk az együtthatók tulajdonságait. Az exponenciális sor alakú megoldások esetén az együtthatók meghatározásán túl általánosítottuk, a  $p = 1$  esethez tartozó, a  $\sinh$  és  $\cosh$  függvények között használatos  $\cosh x = \frac{1}{i} \sinh(x + i \frac{\pi}{2})$ ,  $\sinh x = i \sinh(x - i \frac{\pi}{2})$  összefüggéseket, azaz összefüggést adtunk a nemlineáris differenciálegyenlet két különböző kezdeti feltétel párt kielégítő két megoldása között az alábbi formulákkal:

$$\begin{aligned} Ch_p(x) &= e^{-i \frac{\pi}{p+1}} Sh_p(x - \Psi(p) + i \frac{\pi}{p+1}), \\ Sh_p(x) &= e^{i \frac{\pi}{p+1}} Ch_p(x + \Psi(p) - i \frac{\pi}{p+1}), \end{aligned}$$

ahol  $Ch_p(x)$  jelöli a differenciálegyenletnek az  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$  kezdeti feltételhez és  $Sh_p(x)$  az  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$  feltételekhez tartozó megoldásait és  $\Psi(p)$  egy csak a  $p$  paramétertől függő kifejezést jelöl.

Publikációk: [6]

Előadások konferencián: Vadászné Bognár Gabriella: (2), (5), (9)

6. Az OTKA pályázat anyagi lehetőséget biztosított külföldi kutatók meghívására. 2007 novemberében két hétig a Miskolci Egyetemen vendégünk volt Pavel Drabek, Petr Necesal és Jan Cepicka (University of West Bohemia, Plzen, Cseh Közt.). Az  $x'' + \lambda x + g(t, h) = h(t)$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x(\eta) = x(\pi)$  hárompontos peremérték-probléma megoldásait vizsgáltuk, amikor a megoldásokat, vagy csak a  $[0, \pi]$  intervallumon, vagy az egész valós számegyenesen tekintjük és az egyenletben  $\lambda$ ,  $\eta$  két paraméter. A megoldások létezésére szükséges és elégséges feltételeket adtunk a  $\lambda$  és  $\eta$  paraméterek függvényében. Külön vizsgáltuk a feladatot bifurká-



ciós szempontból, ahol a „magasabb rendű tagokat”  $g$  reprezentálja. Ennek egy speciális esetét az  $x'' + \lambda \sin x = 0$  egyenletet tekintettük és bizonyítottuk a többszörös megoldások létezését. Rámutattunk a  $(\lambda, \eta)$  halmaz szerepére a megoldások számosságával kapcsolatban.

Publikációk: [13], [14], [25]

Előadások konferencián: Szilvásiné Rozgonyi Erika: (6), (7)

7. Vizsgáltuk az összenyomhatatlan nemnewtoni folyadékok áramlásával kapcsolatban előforduló  $\Delta_p u + f(u) = 0$ ,  $u = u(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , nemlineáris másodrendű parciális differenciálegyenlet radiálisan szimmetrikus pozitív megoldásait, amikor  $\Delta_p u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u |\operatorname{grad} u|^{p-1})$ ,  $1 < p < n$ , ha

$$f(u) = \begin{cases} u^\gamma + u^\delta, & \text{ha } u > 0, \\ 0, & \text{ha } u < 0, \end{cases}$$

továbbá teljesülnek az  $u(0) = \alpha > 0$  és  $u'(0) = 0$  feltételek. Megadtuk a feladat egzakt megoldását bizonyos  $p$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $n$  paraméter értékek esetén és a lokális megoldások egzisztenciáját, illetve az együtthatók meghatározásának a módszerét. Összehasonlítottuk az egzakt és a hatványsor alakú megoldásokat a 0 pont környezetében.

Publikációk: [8], [17]

Előadások konferencián: Szilvásiné Rozgonyi Erika: (5)

Vadászsné Bognár Gabriella: (8)

8. G.W.Hill nevéhez fűződik az asztrológiai alkalmazása az  $x'' + q(t)x = 0$ , egyenletnek, amelyet Hill-féle differenciálegyenletnek neveznek. Itt  $q(t)$  integrálható valós periodikus függvény. A fenti egyenlet számos műszaki alkalmazással rendelkezik pl. az optikában és a félvezetőknél. A pályázatban ennek egy ún. fél-lineáris verziójával foglalkoztunk, amely nemnewtoni

folyadékok áramlása során fordul elő:  $x''|x'|^{p-2} + q(t)x|x|^{p-2} = 0$ ,  $p > 1$ . Bihari Imre ezt az egyenletet azért nevezte fél-lineárisnak, mivel a lineáris differenciálegyenletek tulajdonságainak a felét örzi meg: a homogenitást igen, de az additivitást nem. Az egyenlet megoldásait az  $x(0) = x(T)$  és  $x'(0) = x'(T)$  periodikus és az  $x(0) = -x(T)$  és  $x'(0) = -x'(T)$  ún. antiperiodikus peremfeltételek mellett vizsgáltuk, amikor  $q(t) = \lambda + c(t)$ ,  $t \in (0, T)$   $\lambda \in \mathbb{R}$ , és a periodikus  $c$  függvény az ún. potenciálfüggvény. A  $\lambda$  értéket sajátértéknek nevezzük. Megvizsgáltuk a periodikus és antiperiodikus sajátértékek tulajdonságait és aszimptotikus viselkedésük jellemzésére formulát adtunk.

Publikációk: [2], [5], [16], [21]

Előadások konferencián: Vadászné Bognár Gabriella: (4), (6)

9. Prof. Ondrej Doslyval a féllineáris  $(r(t)\Phi_p(x'))' + c(t)\Phi_p(x) = 0$ , differenciálegyenlet megoldásait vizsgáltuk a hozzá felírható Riccati-típusú differenciálegyenlet megoldásain keresztül. A Riccati egyenlet megoldásainak oszcillációját vizsgálva Sturm típusú összehasonlító tételt igazolunk az ún. 'jó' és az ún. 'minimális' megoldások között.

Egy másik dolgozatban speciálisan megválasztott  $r(t) \equiv 1$  és  $c(t) = \frac{\lambda}{t^{p+1}}$  egyenletet tekintettük, amely az ún. féllineáris Riemann-Weber egyenlet. A  $p$  kitevőre nézve összehasonlító tételt adtunk a perturbált féllineáris Riemann-Weber egyenlet megoldásaira.

Publikációk: [3], [12]

10. A  $\Delta_p u + \lambda f(u) = 0$  nemlineáris parciális differenciálegyenlet radiálisan szimmetrikus megoldásainak hatványsor alakú megoldásait nemlineárisan rugalmas anyagú kör alakú membránok esetén vizsgáltuk. A Graeffe-féle módszer alkal-

mazásával becslést adtunk az első (legkisebb) sajátértékre a hatványsor együtthatóinak az ismeretében

Publikációk: [9]

Előadások konferencián: Vadászné Bognár Gabriella: (3)

11. Siavash Sohrab professzorral kétszer periodikus határréteg áramlások áramvonalainak meghatározásával foglalkoztunk newtoni folyadékok esetén az általánosított Navier-Stokes egyenlet megoldásain keresztül. A határrétegbeli és az azon kívüli áramvonalak meghatározása Hill-féle differenciálegyenletre vezetett.

Eredményeinkről 2009. augusztus 20-23. között Moszkvában megrendezésre kerülő Fluid Mechanics and Aerodynamics konferencián plenáris előadást tartunk és a dolgozatot közlésre leadtuk.

12. Marossy Kálmán professzorral (ME Anyagtudományi Kar, Polimer Tanszék) polietilén csőben való nemizoterm folyását vizsgáltuk. Adott polietilén típus esetén megmértük az anyagjellemzőket és az anyag viszkozitását is figyelembe véve a lamináris folyáskor fellépő hővezetést és hőfejlődést vizsgáltuk, a sebesség és a hőmérséklet változását számítottuk ki a folytonossági, az energia- és az impulzusegyenletből. A viszkozitásból származó hőmérséklet növekedés igen jelentős a cső közelében, és ezek az eredmények a gyártás során figyelembe veendőek.

**Az OTKA61620 pályázat számával megjelent,  
vagy közlésre elfogadott dolgozatok:**

**Lektorált cikkek folyóiratokban, vagy szerkesztett könyvben:**

- 1, G. Bognár, Numerical and analytic investigation of some nonlinear problems in fluid mechanics, in N. Mastorakis: *Computers and Simulation in Modern Science*, Vol. II. WSEAS Press, 2008. ISBN: 978-960-474-032-1, 172-180.
- 2, G. Bognár, Periodic and antiperiodic eigenvalues for quasilinear differential equations, *Recent Advances on Applied Mathematics*, 307-313, WSEAS Press, 2008. ISBN: 978-960-6766-47-3
- 3, G. Bognár-O. Dosly: Minimal solution of a certain Riccati type differential equation, *Publ. Math. Debrecen*, 74 (2009), 159-169. (IF=0.292(2006))
- 4, G. Bognár: Area-preserving nonlinear differential equations, *Differential Equations and Dynamical Systems, An International Journal for Theory, Applications and Computer Simulations*, 16 (2009), 101-111.
- 5, G. Bognár, Periodic and antiperiodic eigenvalues for half-linear version of Hill's equation, *Int. J. Math. Models & Methods in Appl. Sciences*, 2 (2008) 33-37.
- 6, G. Bognár, Exponential expansion of the solution of a half-linear differential equation, *International Journal of Qualitative Theory of Differential Equations and Applications*, 3 No.1 (2009),
- 7, G. Bogár, Local analytic solutions to some nonhomogeneous problems with p-Laplacian, *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ.*, No. 4. (2008), pp. 1-8.

- 8, G. Bognár, E. Rozgonyi, The local analytic solution to some nonlinear diffusion-reaction problems, *WSEAS Transactions on Mathematics*, 7 No.6. (2008) 382-395.
- 9, G. Bognár, Estimation on the first eigenvalue for some nonlinear Dirichlet eigenvalue problems, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, (submitted)
- 10, G. Bognár, E. Rozgonyi: The power series solutions of some nonlinear initial value problems, *WSEAS Transactions on Mathematics*, 5 No.6 (2006) 627-635.
- 11, G. Bognár, A geometric approach to the half-linear differential equation, *Folia FSN Universitas Masarykianae Brunensis, Mathematica* 16 (2006) 51-58.
- 12, G. Bognár, O. Dosly: A remark on power comparison theorem for half-linear differential equations, *Math. Bohemica*, 133 (2008), 187-195.
- 13, G. Bognár, J. Cepicka, P. Drábek, P. Necesal-E. Rozgonyi: Necessary and sufficient conditions for the existence of solution to the three-point BVP, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 69 No.9 (2008), 2984-2995. **IF=1.097 (2007)**
- 14, G. Bognár, J. Cepicka, P. Drábek, P. Necesal, E. Rozgonyi: Two-parametric three-point problem, *J. Differential Equations* (submitted)

**Nemzetközi és hazai konferencia kiadványban megjelent lektorált cikkek:**

15. G. Bognár, Numerical and analytic investigation of some nonlinear problems in engineering sciences, *Recent Advances in Mathematical and Computational Methods in Science and Engineering*, Vol. I. WSEAS Press, 2008. ISBN: 978-960-474-019-2, 1-2.

16. G. Bognár, Periodic and antiperiodic eigenvalues for quasilinear differential equations, Proceedings of the American Conference on Applied Mathematics, Harvard University Cambridge, MA, USA March 24-26, 2008. ISBN: 978-960-6766-45-9
17. Erika Rozgonyi: Power series solution for a nonlinear reaction-diffusion problem, MicroCAD 2008 International Scientific Conference, Miskolc, 20-21 March, 2008, 61-67.
18. G. Bognár, On the solution of differential equations involving p-Laplacian and Pseudolaplacian, Applied Mathematics for Science and Engineering, WSEAS Press, 2007. ISBN: 978-960-6766-27-5, 1-2.
19. G. Bognár, E. Rozgonyi, On the radial solutions for some nonlinear initial value problems, Proc. Int. Conf. On Applied Mathematics, Cairo, Egypt, December 29-31, 2007, ISBN: 978-960-6766-27-5, 15-21.
20. G. Bognár, Asymptotic expansions for some nonlinear differential equations, Proc. EQUADIFF'07 Vienna University of Technology, Vienna, 5-11. August, 2007.
21. G. Bognár, Lower bound for the eigenvalues of quasilinear Hill's equation, Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations and Applications, Edited by Ravi P. Agarwal and Kanishka Pereira, 2006, p. 211-219. ISBN 977-5945-380.
22. G. Bognár, E. Rozgonyi: The series expansions of generalized hypergeometric functions, Proc. of the 9<sup>th</sup> WSEAS Int. Conf. on Applied Mathematics, Istanbul, Turkey, May 27-29, 2006. ISBN:960-8457-45-9, 181-186.

23. Erika Rozgonyi: The Generalized Hyperbolic Function, University of Miskolc, MicroCAD 2006 International Scientific Conference, University of Miskolc, Miskolc, 16-17 March, 2006, 95-101 (ISBN 963-661-707 4)
24. Szilvásiné Rozgonyi Erika: Hipergeometrikus függvények, Tavasz Szél Konferencia, Kaposvári Egyetem, Kaposvár, 2006. május 4-7., 307-310 (ISBN 963-229-773 3)
25. Szilvásiné Rozgonyi Erika: Hárompontos peremértékfeladat megoldásának numerikus vizsgálata, Doktoranduszok Fóruma, Miskolc, 2008. nov. 13. (közlésre elfogadva)

## **Szakmai előadások**

### **Szilvásiné Rozgonyi Erika:**

1. Erika Szilvási Rozgonyi: The Generalized Hyperbolic Function, MicroCAD 2006 International Scientific Conference, Miskolc, 16-17 March, 2006.
2. Erika Rozgonyi: The series expansions of generalized hypergeometric functions, Západočeská univerzita v Plzni, Csehország, szemináriumi előadás angol nyelven, 2006. április 11.
3. Erika Rozgonyi: Series expansions of hypergeometric functions, International Seminar in Differential Equations, Malá Morávka, Jeseníky Mountains, Czech Republic, 22-26 May, 2006.
4. Szilvásiné Rozgonyi Erika: Hipergeometrikus függvények, Tavasz Szél konferencia, Kaposvári Egyetem, Kaposvár, 2006. május 4-7.

5. Erika Szilvási Rozgonyi: Power series solution for a nonlinear reaction-diffusion problem, MicroCAD 2008 International Scientific Conference, Miskolc, 20-21 March, 2008.
6. Szilvásiné Rozgonyi Erika: Hárompontos peremértékfeladat, Miskolci Egyetem, Analízis Tanszék szeminárium, 2008. október 29.
7. Szilvásiné Rozgonyi Erika: Hárompontos peremértékfeladat megoldásának numerikus vizsgálata, Doktoranduszok Fóruma, Miskolc, 2008. november 13.

### **Vadászné Bognár Gabriella:**

1. „Numerical and analytic investigation of some nonlinear problems in engineering sciences” Mathematical and Computational Methods in Science and Engineering, Bucharest, Romania, 2008. November 7-9. **(Plenary Lecture)**
2. “The series expansions of the solution of some nonlinear problems involving the p-Laplacian” International Conference on Differential and Difference Equations, Veszprém, 2008. July 14-17.
3. “Local analytic solutions for nonlinear differential equations” World Congress of Nonlinear Analysts, Orlando, FL (USA) July 2-9, 2008. **(Invited lecture)**
4. “Nemlineáris spektrálfeladatok” BME Analízis szeminárium Budapest, 2008. április 16.
5. “Differenciálegyenletek hatvány és exponenciális sor alakú megoldásai” Miskolci Egyetem Matematikai szeminárium, 2008. május 7.



6. "Periodic and antiperiodic eigenvalues for quasilinear differential equations" American Conference on Applied Mathematics, Harvard University Graduate School, Cambridge, MA (USA), 2008. March 24-26. **(Plenary Lecture)**
7. „On the solutions of differential equations involving p-Laplacian and pseudolaplacian” International Conference on Applied Mathematics, Cairo, Egypt, December 27-31. **(Plenary Lecture)**
8. „On the radial solutions for some nonlinear initial value problems” International Conference on Applied Mathematics, Cairo, Egypt, 2007. December 27-31.
9. „Local analytic solutions to some nonhomogeneous problems with p-Laplacian” Boundary value problems and related topics, Workshop on Differential Equations, Hejnice, Czech Republic, 2007. September 16-20.
10. „Local analytic solutions to problems with p-Laplacian” EQUADIFF 2007, Vienna University of Technology, Vienna, 2007. August, 5-11.
11. „Local analytic solutions to some nonhomogeneous problems,, Eight Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations, Szeged, 2007. June, 25-28.
12. „Power series solutions of half-linear differential equations” Gemeinsame Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Formale Lösungen von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, Humboldt-Universität Berlin, 2007. March 25-30. (Németország) **(Invited lecture)**
13. „A geometric approach to the half-linear differential equation” Colloquium on Differential and Difference Equations, 2006. September 04-09. Brno (Cseh Köztársaság)

14. „The series expansions of generalized hypergeometric functions” Int. Conf. on Applied Mathematics, 2006. May 27-29. Istanbul, Turkey, (Törökország)

### **Könyv szerkesztésében részvétel:**

- Applied Mathematics for Science and Engineering, Editors: M. Demiralp, C. Udriste, **G. Bognár**, R. Soni, H. Hassar, WSEAS Press, 2007. 446 pages, ISBN: 978-960-6766-27-5
- Recent Advances on Applied Mathematics, Editors: Charles Long, Siavash H. Sohrab, **Gabriella Bognar**, Leonid Perlovsky, WSEAS Press, 2008. 465 pages, ISBN: 978-960-6766-41-1
- Recent Advances in Data Networks, Communications, Computer, Ed. N. Iliecu, R. I. Munteanu, J. Frausto-Solis, **G. Bognar**, D. Simian, WSEAS Press 2008. 165 pages ISBN:978-960-474-020-8
- Recent Advances in Mathematical and Computer Methods in Science and Engineering, Ed. N. Iliecu, R. I. Munteanu, J. Frausto-Solis, **G. Bognar**, D. Simian, WSEAS Press 2008. 530 pages ISBN:978-960-474-019-2
- Recent Advances in Visualization, Imaging and Simulation, Ed. N. Iliecu, R. I. Munteanu, J. Frausto-Solis, **G. Bognar**, D. Simian, WSEAS Press 2008. 212 pages ISBN:978-960-474-022-2
- Recent Advances in in Sensors and Signal, Ed. N. Iliecu, R. I. Munteanu, J. Frausto-Solis, **G. Bognar**, D. Simian, WSEAS Press 2008. 110 pages ISBN:978-960-474-021-5

**Hazai és nemzetközi tudományos konferenciák szervezésében való részvétel**  
**Vadászné Bognár Gabriella részéről**

- Workshop Constructive methods for nonlinear boundary value problems-2006. június 7-10. Sárospatak, szervezőbizottság tagja
- 9th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Istanbul, Turkey, May 27-29, 2006. konferencia esetén a Scientific Committee tagja
- Instrumentation, Measurement, Circuits and Systems, Hangzhou, China, April 16-19, 2006. konferencia esetén a Scientific Committee tagja
- 7th WSEAS International Conference on Mathematics and Computers in Business and Economics, Cavtat, Croatia, June 13-15, 2006. Scientific Committee tagja
- 11th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Dallas, Texas, March 22-24, 2007. konferencia esetén a Scientific Committee tagja
- Finite Differences, Finite Elements, Finite Volumes, Boundary Elements, Malta, September 11-18. 2008. Chair of the International Committee
- 13<sup>th</sup> WSEAS Int. Conf. on APPLIED MATHEMATICS Puerto De La Cruz, Canary Islands, Spain, December 15-17, 2008 Scientific Committee tagja
- 7<sup>th</sup> WSEAS Int. Conf. on CIRCUITS, SYSTEMS, ELECTRONICS, CONTROL & SIGNAL PROCESSING (CSECS '08) Puerto De La Cruz, Canary Islands, Spain, December 15-17, 2008 Scientific Committee tagja
- 2<sup>nd</sup> WSEAS Int.Conf. on COMPUTATIONAL CHEMISTRY (COMPUCHEM'08) Puerto De La Cruz, Canary Islands, Spain, December 15-17, 2008 Scientific Committee tagja