

OTKA K60148 szakmai zárójelentés

(2006-2009)

A kutatási tervnek megfelelően a következő témakörökben születtek új eredmények: varietások, hálók, félcsoporthoz tartozók, klónok.

Varietások

[M1] és [M9] cikkekben azt vizsgáltuk, hogy egy adott véges algebráról eldönthető-e, hogy rendelkezik többségi kifejezésfüggvénnyel. [M1]-ben megmutattuk, hogy a probléma eldönthetetlen, ha olyan kifejezésműveletet keresünk, amely többségi függvényként viselkedik az alaphalmaz egy rögzített részhalmazán. [M2]-ben viszont megmutattuk, hogy az eredeti probléma eldönthető, ami nagy meglepetést okozott. Megjegyezzük, hogy a második cikkben kifejlesztett módszert más kutatóknak sikerült alkalmazni az úgynevezett él-kifejezésfüggvény (illetve paralelogramma-kifejezés) eldönthetőségére, illetve a problémának a véges relációs struktúrákra vonatkozó analógiát is nemrég bizonyították.

[M2], [M4], [M6] és [M8] cikkek a kényszer-kielégíthetőségi problémával foglalkoznak. [M2]-ben bevezettük a gyenge többségi függvény fogalmát, majd ezek segítségével jellemeztünk két nagyon fontos lokálisan véges varietáosztályt, a nem-triviális idempotens Malcev-feltételt teljesítőket, illetve a kongruencia-metszet-féligdisztributív algebrákat tartalmazókat. Eredményünket felhasználva más kutatók egy ennél erősebb jellemzést is adtak, úgynevezett ciklikus kifejezésfüggvények létezésével. Ehhez az eredményhez vezető út egyik lépcsője volt az [M4] cikk. [M6] és [M8] cikkekben a kényszer-kielégíthetőségi probléma bizonyos részeseteire vonatkozó dichotómia tételeket bizonyítottunk.

[Z2]-ben egy Feder és Vardi által bevezetett kényszer-kielégíthetőségi problémaosztály algebrai jellemzését adtuk. Eredményünket kombinálva Barto és Kozik korlátos szélességű problémákra vonatkozó jellemzésével pozitív választ adtunk Feder és Vardi egy korábbi sejtésére. [Z3]-ban a kényszer-kielégíthetőségi problémára vonatkozó, algebrai és kombinatorikai dichotómia-sejtések ekvivalenciáját igazoltuk, és a bizonyított tételek néhány gráfelméleti alkalmazását adtuk. [Z1] és [Z5] cikkekben véges algebrák feletti polinom-egyenletrendszerek megoldhatóságának bonyolultságát vizsgáltuk a kényszer-kielégíthetőségi probléma segítségével. Nagyon általános algebraosztályok, pl. Hobby-McKenzie 1-es típusú nem rendelkező algebrák esetén kaptunk dichotómia tételt polinom-egyenletrendszerek megoldhatóságára.

Algebrák egy széles osztályában, amely tartalmazza a csoportokat, gyűrűket, hálókat, stb. -- nevezetesen azon algebrák osztályában, amelyek k -paralelogramma-kifejezéssel rendelkeznek valamely k -ra -- struktúrátételt adtunk az algebrák hatványainak részalgebráira, és bebizonyítottuk, hogy ebben az osztályban a reziduálisan kicsi varietást generáló véges algebrák mindegyikének klónját meghatározzák az algebra m -változós relációi, ahol m csak k -tól és az alaphalmaz nagyságától függő konstans [Sz3]. Az utóbbi állításhoz hasonló tételt igazoltunk véges 2-nilpotens csoportokra is (az alaphalmaztól függetlenül $m=4$ -gyel), bár azok általában nem generálnak reziduálisan kicsi varietást [Sz1].

[M3] és [M5] cikkekben kvázivarietások tulajdonságaival foglalkoztunk. [M3]-ban megmutattuk, hogy minden végesen generált, relatív kongruencia-metszet-féligdisztributív kvázivarietás véges azonosságázbázissal rendelkezik. Ez Ross Willard variétásokra vonatkozó véges azonosságázbázis tételét általánosítja kvázivarietásokra. [M5]-ben az automorfizmussal bővített félhálók kvázivarietásának minimális részkvázivarietásait jellemeztük. Ezen témához kapcsolódik [M7], amelyben félhálók endomorfizmus-félgűrűjét vizsgáltuk.

Többféleképpen lehet egy adott kétváltozós művelet asszociativitását (pontosabban az asszociativitástól való távolságát) mérni: meghatározhatjuk, hogy hány nem-asszociatív hármas létezik, vagy megszámlálhatjuk, hogy legalább hány helyen kell a műveletábrázolását módosítani, hogy asszociatív válnjon. Az asszociatív spektrum egy ezekhez hasonló „asszociativitási mérték”, amely azonban nem egyetlen szám, hanem egy sorozat, és kevésbé kombinatorikai, hanem inkább algebrai jellegű, hiszen bizonyos speciális azonosságok segítségével van definiálva. Megvizsgáltuk, hogy az ilyen típusú azonosságok esetében hogyan írható le a következményfogalom az azonosságok logikájának Birkhoff-féle teljességi tételével analóg módon [W2]. Ezen jellemzés segítségével sikerült pozitív választ adnunk egy az asszociatív spektrumra vonatkozó korábban felvetett kérdésre: megmutattuk, hogy bármely k -ra létezik olyan grupoid, amelynek asszociatív spektruma k -adfokú polinom. Bebizonyítottuk továbbá, hogy kontinuum sok olyan sorozat van, amely előáll valamilyen grupoid asszociatív spektrumaként. Ebből rögtön következik, hogy vannak olyan sorozatok, amelyek csak végtelen grupoidokon realizálhatók asszociatív spektrumként.

Hálók

[C01] szerint tetszőleges nem-triviális idempotens Malcev-feltétel esetén egy algebra 2-uniform kongruenciái felcserélhetőek. Ennek igazolása egy újfajta lezárási operátoron múlik, amelyet [C07], [C08] és [C02] is vizsgál. Kiderült, hogy ez az operátor nemcsak az alkalmazások terén érdekes, hanem a matematika számos területén felvethető az a kérdés, hogy mikor egyezik meg a Galois-lezárással; részbenrendezett halmazok esetén a pontos választ [C02] adta meg.

Igazolást nyert [C03]-ban, hogy véges csoportok Dedekind-tulajdonsága jellemezhető azzal, hogy a diagonális reláció egyesítés-féligdisztributív a gyenge kongruenciák hálójában. Ugyanez speciális esetként adódik a [C16]-ben kifejlesztett hálóelméleti-kategóriaelméleti apparátusból is.

A fraktálhálók [C04]-ben megkezdett vizsgálata a minimális hálókönvexitásokról nyújt információt. [C05] a moduláris fraktálhálókról és a Neumann-keretek ott definiált szorzatáról mond újat, és végül [C22]-ben igazolást nyert, hogy a szorzatkeret koordinátagyűrűje mátrixgyűrűként nyerhető.

A hálóelméletet két kombinatorikai kérdés kapcsán is sikerült alkalmazni; egyrészt a szigetek összeszámlálására [C06], másrészt az átlagolt Frankl-sejtéssel kapcsolatban: [C09], [C11]. A [C11]-beli kombinatorikai eredményt véges sok véges lánc direkt szorzatára általánosítva számjegyösszeg sorozatok egy érdekes tulajdonsága adódott [C19]-ben. A szigetekkel kapcsolatban a [C06]-ban felhasznált hálóelméleti eredmény analógiájára [C12]-ben és [C14]-ben véges disztributív háló további részalmazairól mutattuk meg, hogy elemszámuk azonos. [C10]-ben új struktúratételt adtunk a véges féligmoduláris hálókra, és ezt [C13]-ban féligmoduláris hálókra alkalmaztuk a Frankl-sejtéssel kapcsolatban.

[C15] többek között a szabad hálók egy ismert tulajdonságára nyújt új, elemi bizonyítást. [C17]-ben azonosságok konstruálásával láttuk be, hogy a véges planáris moduláris hálók által generált hálóvarietásnak kontinuum sok részvarietása van. [C18]-ban – Grätzer György és Kiss Emil huszonkét éves eredményéből a háló végességének feltételét gyengítve – igazoltuk, hogy minden véges hosszúságú féligmoduláris háló fedésőrzően beágyazható egy geometriai hálóba. [C20]-ban igazoltuk, hogy minden véges disztributív háló reprezentálható egy olyan véges féligmoduláris háló kongruenciahálójaként, amelyben $J(L)$ legfeljebb kételemű láncok kardinális összege. [C21]-ben a korábban használt két funktor helyett egyetlen funktorral sikerült leírni hálók Graczyńska-féle összegét.

Egy F véges test feletti n -dimenziós vektortér L altérhálójára, ahol $n > 2$, korábban Herrmann és Wille bizonyították, hogy ha F prímtest, akkor L négy elem által generált háló. [Z3]-ban beláttuk, hogy ha F nem prímtest, akkor L négy elem által nem, de öt elem által már generálható.

Félcsoportosztályok

Struktúratételeket bizonyítottunk a reguláris félcsoportok elméletében alapvető szerepet játszó ortodox, illetve lokálisan inverz félcsoportok körében. Megmutattuk [BS1]-ben, hogy minden E -tömör lokálisan inverz S félcsoport beágyazható valamely teljesen egyszerű C félcsoportnak inverz félcsoporttal vett λ -szemidirekt szorzatába, mégpedig úgy, hogy ha S legkisebb inverz kongruenciájának magjában minden részcsoporthoz valamely V csoportvarietásból kerül ki, akkor C is választható úgy, hogy részcsoporthai V -beliek. Ez általánosítja Billhardt és Szittyai egy korábbi eredményét.

A majdnem faktorizálható inverz félcsoportok fogalmát Lawson vezette be, mint a faktorizálható inverz monoidok félcsoport-megfelelőjét, és igazolta, hogy az inverz félcsoportok struktúraelméletében ezek és az E -unitér inverz félcsoportok „egymással duális szerepet játszanak”. Ortodox félcsoportokra Hartmann terjesztette ki ezeket az eredményeket, és kiderült, hogy a majdnem faktorizálható ortodox félcsoportok kevésbé szabályosan viselkednek, mint a majdnem faktorizálható inverz félcsoportok. [BS3]-ban megvizsgáltuk, hogy hogyan lehet általánosítani ortodox félcsoportokra azt az inverz félcsoportok elméletében alapvető struktúratételt, mely szerint egy inverz félcsoport pontosan akkor E -unitér és majdnem faktorizálható, ha izomorf egy félháló csoporttal vett szemidirekt szorzatával. Továbbá jellemeztük azokat az E -unitér majdnem faktorizálható ortodox félcsoportokat, amelyek izomorfak egy köteg csoporttal vett szemidirekt szorzatával.

A lokálisan inverz félcsoportok egy részosztályára Dombi terjesztette ki Lawson eredményeit. [BS4]-ben bevezetjük a majdnem faktorizálhatóság fogalmát az összes lokálisan inverz félcsoportok osztályában. Ilyen általánosságban „nem működik” az említett részosztályokban alkalmazott definíciók megfelelője, új megközelítés szükséges. A kapott fogalom azonban jól illeszkedik a lokálisan inverz félcsoportok struktúraelméletébe, u.i. bebizonyítottuk, hogy az így definiált majdnem faktorizálható lokálisan inverz félcsoportok és a gyengén E -unitér lokálisan inverz félcsoportok „egymással duális szerepet játszanak”.

Klónok

Tanulmányoztuk a véges alaphalmazon értelmezett klónok hálóinak monadikus intervallumait. Ezek olyan intervallumok, melyek legkisebb eleme az alaphalmaz egy transzformáció-monoidja által generált klón, legnagyobb eleme pedig a legnagyobb olyan

klón, amely egyváltozós része éppen az adott monoid. [D1]-ben szükséges és elegendő feltételt adtunk arra, hogy a teljes transzformáció monoid bizonyos maximális inverz részmonoidjai mikor határoznak meg egyelemű monadikus intervallumot. [D2]-ben a monadikus intervallumok méretére, végességére vonatkozó vizsgálatokat folytattunk, a háromelemű halmazon például megadtunk olyan monoidot, melyhez hatelemű monadikus intervallum tartozik.

A félcsoportokra ismert R Green-reláció, ill. a Boole-függvények elméletében használt minor fogalom általánosítása a tetszőleges C klónra relativizált $R(C)$ ekvivalenciareláció, amely akkor áll fenn két C alaphalmazon értelmezett művelet között, ha azok C -beli műveleteket beléjük helyettesítve megkaphatók egymásból. Véges alaphalmazon meglepően érdekes F filtert alkotnak a klónhálóban azok a C klónok, amelyekre $R(C)$ -nek csak véges sok osztálya van. [SZ2]-ben megmutattuk, hogy F tartalmazza az összes diszkriminátor-klónt, [SZ4]-ben meghatároztuk az F -be tartozó maximális klónokat és F alapvető struktúráját, [SZ5]-ben pedig leírtuk az F -beli szubmaximális klónokat háromelemű alaphalmaz esetén.

Egy algebra fontos kísérőstruktúrája kifejezésfüggvényei klónjának centralizátora, azaz a műveleteivel felcserélhető műveletek halmaza. Véges halmazon a klónok centralizátorai éppen a primitív pozitív klónok, azaz azok a klónok, melyek primitív pozitív formulákkal való definiálhatóságra zártak. [SL1]-ben meghatároztuk a véges, egyszerű és idempotens algebrák klónjának és a kongruencia disztributív varietást generáló véges algebrák polinomfüggvényei klónjának centralizátorát. Az utóbbiak éppen a diagonális algebrák klónjai, az előbbieket pedig olyan klónok, melyek egyrészt a vektorterek polinomfüggvényei halmazaként adódnak, másrészt melyeket permutációk és konstans műveletek generálnak. Emellett leírtuk azon véges, egyszerű és nem erősen Abel-féle algebrákat is, melyek polinomfüggvényeinek klónja primitív pozitív. Ha egy ilyen algebra nem affín, akkor vagy függvényteljes, vagy pontosan azok a műveletek a polinomfüggvényei, melyek egy adott félháló művelettel felcserélhetők. Az erősen Abel-féle algebrákra vonatkozóan részeredményeket kaptunk.

A minimális klónokra vonatkozó korábban bizonyított tételek és példák azt a sejtést sugallták, hogy minden többségi függvény által generált minimális klón „nagyon hasonlít” egy konzervatív többségi függvény által generált minimális klónra (azaz a klónok háromváltozós részei, mint Menger-algebrák, izomorfak egymással). Ezt a sejtést vizsgálva leírtuk a legfeljebb 4 többségi függvényt tartalmazó minimális klónokat [W1]. Kiderült, hogy nincs olyan minimális klón, amelyben pontosan 2 vagy 4 többségi függvény van; 1 illetve 3 többségi függvényt tartalmazó minimális klónból pedig csak egy-egy van a klón háromváltozós részének izomorfiája erejéig. A bizonyítás egyik lépéseként igazoltuk azt az önmagában is érdekes tényt, hogy ha egy minimális klónban véges sok többségi függvény van, és ezek mind invariánsak a változók ciklikus permutációjára, akkor a klón mindössze egy többségi függvényt tartalmaz. Legújabb vizsgálataink azonban megcáfolták a fent említett sejtést: találtunk olyan többségi minimális klónokat (öt-, illetve hatelemű alaphalmazon), amelyek 26, illetve 78 többségi függvényt tartalmaznak [W4]. Bebizonyítottuk továbbá, hogy amennyiben létezik olyan minimális klón, amelyben n többségi függvény van, és ezek közül legalább egy ciklikusan szimmetrikus, akkor létezik olyan minimális klón is, amelyben $3n$ többségi függvény van.

Többen vizsgáltak olyan, a klónoknál általánosabb Boole-függvény-osztályokat, amelyek nem feltétlenül zártak a kompozícióra, de zártak a változók azonosítására, permutálására, fiktív változók bevezetésére és törlésére. Míg a kételemű halmazon klónból csak megszámlálhatóan

végtelen sok van, ilyen függvényosztályból már kontinuum sok létezik. A klón fogalmának természetes általánosításaként e függvényosztályok közül azokat vizsgáltuk, amelyek zártak a kompozícióra [W3]. Ezek az osztályok nem feltétlenül tartalmazzák a projekciókat (ha igen, akkor klónról van szó), de mindent „tudnak”, amit a klónoknál a projekcióknak köszönhetünk (változók azonosítása, stb.). Kiderült, hogy ilyen függvényosztályból is már kontinuum sok létezik, de sikerült többé-kevésbé explicit leírásukat megadni, és az általuk alkotott hálót felvázolni (ami a Post-háló egy kiterjesztése).

A projekt keretében írt cikkek:

- [BS1] M. B. Szendrei, I. Szittyai: E-solid locally inverse semigroups, kézirat, 2006
- [BS2] M. B. Szendrei: Problems on finite regular semigroups, Proc. Conf. “International Symposium on Semigroups and Applications” (eds. A. R. Rajan, L. John); 37-45, 2007
- [BS3] M. B. Szendrei: E-unitary almost factorizable orthodox semigroups, kézirat, 2008
- [BS4] M. B. Szendrei: Almost factorizable locally inverse semigroups, kézirat, 2009
- [C01] G. Czédli: Idempotent Mal'cev conditions and 2-uniform congruences, Algebra Universalis 59, 303-309, 2008
- [C02] G. Czédli: Some new closures on orders, Mathematica Slovaca, elfogadva, 2009
- [C03] G. Czédli, B. Seselja, A. Tepavcevic: On the semidistributivity of elements in weak congruence lattices of algebras and groups, Algebra Universalis, 58, 349-355, 2008
- [C04] G. Czédli: Some varieties and convexities generated by fractal lattices, Algebra Universalis, 60, 107-124, 2009
- [C05] G. Czédli: The product of von Neumann n-frames, its characteristic, and modular fractal lattices, Algebra Universalis, 60, 217-230, 2009
- [C06] G. Czédli: The number of rectangular islands by means of distributive lattices, European Journal of Combinatorics, 30, 208-215, 2009
- [C07] G. Czédli: A fixed point theorem for stronger association rules and its computational aspects, Acta Cybernetica, 19, 149-158, 2009
- [C08] G. Czédli: Stronger association rules for positive attributes, Novi Sad Journal of Mathematics, 38, 103-110, 2008
- [C09] G. Czédli: On averaging Frankl's conjecture for large union-closed sets, Journal of Combinatorial Theory - Series A, 116, 724-729, 2009
- [C10] G. Czédli, E. T. Schmidt: How to derive finite semimodular lattices from distributive lattices?, Acta Mathematica Hungarica, 121/3, 277-282, 2008
- [C11] G. Czédli, M. Maróti, E. T. Schmidt: On the scope of averaging for Frankl's conjecture, Order, 26, 31-48, 2009
- [C12] G. Czédli, E. T. Schmidt: CDW-independent subsets in distributive lattices, Acta Sci. Math. (Szeged) 75, 49-53, 2009
- [C13] G. Czédli, E. T. Schmidt: Frankl's conjecture for large semimodular and planar semimodular lattices, Acta Univ. Palacki. Olomuc, Fac. rer. nat., Mathematica 47, 47-53, 2008

- [C14] G. Czédli, M. Hartmann, E. T. Schmidt: CD-independent subsets in distributive lattices, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 74/1-2, 127-134, 2009
- [C15] G. Czédli: A visual approach to test lattices, *Acta Univ. Palacki. Olomuc, Fac. rer. nat. Mathematica*, elfogadva, 2008
- [C16] G. Czédli, M. Erné, B. Seselja, A. Tepavcevic: Characteristic triangles of closure operators with applications in general algebra, *Algebra Universalis*, elfogadva, 2008
- [C17] G. Czédli, M. Maróti: Two notes on the variety generated by planar modular lattices, *Order* 26, 109-117, 2009
- [C18] G. Czédli, E. T. Schmidt: A cover-preserving embedding of semimodular lattices into geometric lattices, *Advances in Mathematics*, benyújtva, 2008
- [C19] G. Czédli, M. Maróti: On the height of order ideals, *Mathematica Bohemica*, elfogadva, 2009
- [C20] G. Czédli, E. T. Schmidt: Finite distributive lattices are congruence lattices of almost-geometric lattices, *Algebra Universalis*, benyújtva, 2008
- [C21] G. Czédli: Sums of lattices and a relational category, *Order* 26, 309–318, 2009
- [C22] G. Czédli, B. Skublics: The ring of an outer von Neumann frame in modular lattices, *Algebra Universalis*, elfogadva, 2009
- [D1] M. Dormán: Collapsing monoids consisting of permutations and constants, *Algebra Universalis* 58, 479-492, 2008
- [D2] M. Dormán: A 6-element monoidal interval, *kézirat*, 2007
- [M1] M. Maróti: On the (un)decidability of a near-unanimity term, *Algebra Universalis* 57, 2, 215-237, 2007
- [M2] M. Maróti, R. McKenzie: Existence theorems for weakly symmetric operations, *Algebra Universalis* 59, 3-4, 463-489, 2008
- [M3] W. Dziobiak, M. Maróti, R. McKenzie, A. Nurakunov: The weak extension property and finite axiomatizability for quasivarieties, *Fundamenta Mathematicae*, benyújtva, 2007
- [M4] L. Barto, M. Kozik, M. Maróti, R. McKenzie, T. Niven: Congruence modularity implies cyclic terms for finite algebras, *Algebra Universalis*, elfogadva, 2008
- [M5] W. Dziobiak, J. Ježek, M. Maróti: Varieties and quasivarieties of semilattices with one automorphism, *Semigroup Forum*, elfogadva, 2008
- [M6] L. Barto, M. Kozik, M. Maróti, T. Niven: CSP dichotomy for special triads, *Proceedings of the AMS* 137, 2921-2934, 2009
- [M7] J. Ježek, T. Kepka, M. Maróti: The endomorphism semiring of a semilattice, *Semigroup Forum* 78, 1, 21-26, 2009
- [M8] C. Carvalho, V. Dalmau, P. Markovic, M. Maróti: CD(4) has bounded width, *Algebra Universalis* 60, 3, 293-307, 2009
- [M9] M. Maróti: The existence of a near-unanimity term in a finite algebra is decidable, *Journal of Symbolic Logic* 74, 3, 1001-1014, 2009
- [SL1] L. Szabó: On algebras with primitive positive clones, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 73, 463-470, 2007

- [SZ1] K. A. Kearnes, J. Shaw, Á. Szendrei: Clones of 2-step nilpotent groups, *Algebra Universalis* 59, 491-512, 2008
- [Sz2] E. Lehtonen, Á. Szendrei: Equivalence of operations with respect to discriminator clones, *Discrete Math*, 309, 673-685, 2009
- [Sz3] K. A. Kearnes, Á. Szendrei: Clones of algebras with parallelogram terms, *benyújtva*, 2009
- [SZ4] E. Lehtonen, Á. Szendrei: Clones with finitely many relative R-classes, *benyújtva*, 2009
- [SZ5] E. Lehtonen, Á. Szendrei: The submaximal clones on the three element set with finitely many relative R-classes, *Discussiones Mathematicae, General Algebra and Applications*, *elfogadva*, 2009
- [W1] T. Waldhauser: Minimal clones with few majority operations, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 73, 471-486, 2007
- [W2] S. Liebscher, T. Waldhauser: On associative spectra of operations, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 75, 433-456, 2009
- [W3] T. Waldhauser: On composition-closed classes of Boolean functions, *kézirat*, 2008
- [W4] M. Behrisch, T. Waldhauser: Minimal clones with many majority operations, *kézirat*, 2009
- [Z1] L. Zádori: Solvability of systems of polynomial equations over finite algebras, *Internat. J. Algebra Comput* 17, 4, 821-835, 2007
- [Z2] B. Larose, M. Valeriote, L. Zádori: Omitting types, bounded width and the ability to count, *Internat. J. Algebra Comput.* 19, 5, 647-668, 2009
- [Z3] L. Zádori: Subspace lattices of finite vector spaces are 5-generated, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 74, 491-497, 2008
- [Z4] J. Nešetřil, M. Siggers, L. Zádori: A combinatorial CSP dichotomy classification conjecture, *European Journal of Combinatorics* 31, 1, 280-296, 2010
- [Z5] L. Zádori: On solvability of systems of polynomial equations, *Algebra Universalis*, *benyújtva*, 2009