

## **Beszámoló az "Online erőforrás allokációs problémák" című F048587 számú OTKA kutatási projekt eredményeiről**

A gyakorlatban előforduló alkalmazásokban sokszor kerülünk szembe olyan problémákkal, hogy korlátozott mennyiségű erőforrást kell szétosztanunk a felmerülő igények között. Számos esetben a probléma online, azaz a probléma inputját csak részenként ismerjük meg és döntéseinket a már megkapott információk alapján a további adatok ismerete nélkül kell meghoznunk. Erőforrás allokációs problémák modellezésére számos optimalizálási feladatot irtak fel, ezek jelentős része a géptütemezés illetve a ládapakolás területéhez tartozik. A kutatási projekt célja ilyen online erőforrásallokációs modellek vizsgálata volt az ütemezés és ládapakolás területén, továbbá számítógépes hálózatokhoz kapcsolódó modellek esetében.

Az online algoritmusok hatékonyságának vizsgálatára a legelterjedtebb megközelítés a legrosszabb-eset korlát analízis, amelyet versenyképességi analízisnek nevezünk. Ebben az esetben az online algoritmus által kapott megoldás költségét hasonlítjuk össze az optimális offline (az offline esetben az algoritmus már kezdetben ismeri az egész inputot) célfüggvényértékkel. A kutatásaink során elsősorban a versenyképességi elemzést használtuk a kifejlesztett algoritmusok hatékonyságának mérésére, de értünk el olyan eredményeket is, ahol az algoritmusokat valós és véletlen adatokon végrehajtott tesztek alapján elemeztük.

A kutatások során lényegében sikerült a megadott munkatervet követni. Az elért eredmények többsége, miként azt terveztük az ütemezés és a ládapakolás, ládafedés témaköréhez kapcsolódott. A tervekhez képest apró eltérés történt a számítógépes hálózatokhoz tartozó modellek területén. Ezen a területen nem sikerült eredményt publikálni az online TSP feladattal kapcsolatosan, de több eredményt is elértünk az ide tartozó (és a részletes kutatási tervben szintén a tervek között szereplő) nyugtázási problémával kapcsolatosan. További eltérés, hogy a munka során sikerült olyan a projekt céljához kapcsolódó területen is eredményeket is elérni, amely az előzetes tervben nem volt részletezve.

Az alábbiakban összefoglaljuk az egyes résztémákban elért fő eredményeket.

## Eredmények ütemezési problémákra

A projekt keretein belül olyan ütemezési feladatokkal foglalkoztunk, amelyekben a munkák ütemezése csak egy részfeladata az algoritmusnak, az ütemezés mellett egyéb döntéseket is meg kellett hoznia, amely döntésektől függenek az ütemezési probléma inputjai. Ezeket a problémákat *kétszintű ütemezési* feladatoknak nevezik.

Ezen modellek közül a gépköltséges ütemezési feladattal és a visszautasítást megengedő ütemezési feladattal foglalkoztunk. A gépköltséges modellben a gépek száma nem egy adott paraméter, hanem az algoritmusnak kell megvásárolnia a gépeket. Ebben a modellben a minimalizálandó költség a maximális befejezési időnek és a gépek megvásárlására költött költségnek az összege. A visszautasításos modellben a munkáknak két paramétere van egy végrehajtási idő és egy büntetés. Az egyes munkákat vissza lehet utasítani, és a célfüggvény a visszautasításokból keletkezett költségnek és a maximális befejezési időnek az összege.

A [11] cikkben azt az ütemezési modellt vizsgáljuk, amelyben a fenti modellek egyesítéseként kapható. A munkákat vissza lehet utasítani, továbbá a gépek száma sem egy adott paramétere a problémának, hanem az algoritmusnak kell a gépeket is megvásárolnia. A célfüggvény három részköltség összege, ezek a következők: a visszautasított munkák büntetései összege, a gépek vásárlására fordított költség, és az elfogadott munkák ütemezéséből adódó költség. A cikkben megmutattuk, hogy a gépköltséges és a visszautasításos modellben használt technikák természetes egyesítése nem vezet versenyképes algoritmushoz. A dolgozat fő eredménye egy új gondolaton alapuló algoritmus, amelyről igazoltuk, hogy konstans (2.41) versenyképes.

A [10] cikkben a a gépköltséges modellt vizsgáljuk tovább. A szakirodalomban szereplő eredmények mindegyike azzal a speciális esettel foglalkozik, amelyben a gépek költsége konstans (minden gépnek 1) és amelyben a gépek sebessége egyforma minden gépre. A dolgozatban mindkét általánosítást vizsgáltuk. A fő eredmények a következők:

- Egy 2,618 versenyképes algoritmust fejlesztettünk ki az általános gépköltségeket leíró függvények esetére.
- Egy 2-versenyképes algoritmust fejlesztettünk ki általános gépköltségeket leíró függvények egy olyan speciális esetére, ahol a végrehajtási

idők nem lehetnek nagyok. Továbbá igazoltuk, hogy nem létezik 2-nél kisebb versenyképességi hányadosú algoritmus ebben az esetben.

- Egy 6-versenyképes algoritmust fejlesztettünk ki arra a modellre, ahol két különböző sebességgel rendelkező géposztály van és mindkét osztályban általános költségfüggvény írja le a gépköltségeket. Ebben a modellben a 2,365 alsó korlátot adtuk a lehetséges versenyképességi hányadosokra.

Végül a [13] cikkben a visszautasításos modellt vizsgáljuk egyforma gépek esetére. Ebben a modellben ismert olyan algoritmus (RTP), amelynek a versenyképességi hányadosa igazoltan a legkisebb lehetséges hányados, így a versenyképességi hányados szempontjából az algoritmus nem javítható. Másrészt az algoritmus valójában egy algoritmuscsalád speciális tagja, amelyet egy paraméter olyan beállításával kaphatunk meg, amely minimalizálja a versenyképességi hányadost. A dolgozat azt a kérdést vizsgálja vajon a paraméter más beállítása nem javít -e az algoritmus hatékonyságán az átlagos esetben. Egy olyan általánosítást fejlesztettünk ki, amely a paraméter optimális értékét nem a priori határozza meg, hanem a beérkezett inputrészek alapján igyekszik megtanulni. Az algoritmust teszteltük véletlenül generált adatokon és valós munkaparamétereken is. Az eredmények azt mutatják, hogy bár átlagos esetben nem nyújt szignifikánsan jobb eredményt az RTP algoritmusnál, de kiegyensúlyozottabb eredményeket ad.

### **Eredmények ládapakolási és fedési modellekre**

Számos erőforrás allokációs feladat modellezhető ládapakolási vagy ládafedési problémaként. A ládapakolási feladatban adott legfeljebb egy méretű tárgyaknak egy listája és ezeket szeretnénk elhelyezni a lehető legkevesebb számú egységméretű ládában. A ládafedésben a ládapakolás duális feladatában, a cél nem a megkezdett ládák számának minimalizálása, hanem a lefedett ládák számának maximalizálása. Mindkét modellben egy további érdekes kiterjesztés az a változat, ahol a súlykorláton kívül valami extra feltétel is adott a ládák tartalmára. A projekt keretein belül elsősorban ilyen kérdésekkel foglalkoztunk.

A [3] cikkben az elemszámkorlátos ládafedés feladattal foglalkoztunk, ahol a cél a maximális számú 1 méretű ládát lefedni úgy, hogy minden láda legfeljebb  $k$  elemet tartalmazzon. A probléma a vektorfedési feladat speciális

esete. Sikerült a vektorfedésnél használt algoritmusoknál hatékonyabb algoritmusokat kifejleszteni. A fő eredményeink:

- Sikerült a feladat offline változatára egy AFPTAS-t kidolgoznunk.
- Kifejlesztettünk egy  $3 - 2/k$ -versenyképes online algoritmust.
- Igazoltunk egy  $5/2 - 2/k$  alsó korlátot a lehetséges versenyképességi hányadosokra.
- Továbbá sikerült egy 2-versenyképes algoritmust adnunk a félig online problémára, amelyben a tárgyak növekvő méret szerint érkeznek.

A [2] cikkben a probléma egy további általánosítását tanulmányoztuk, ahol a tárgyaknak színe van, és a ládák lefedéséhez legalább  $k$  különböző színből kell elemeket használnunk. Ebben a dolgozatban az egyforma méretű tárgyak esetét vizsgáltuk. Megadtunk egy polinomiális idejű algoritmust az offline feladat megoldására. Az online problémára elemeztük a jól ismert FF algoritmus különböző változatait, majd megadtunk egy ezeknél hatékonyabb,  $k$ -versenyképes algoritmust. Szintén igazoltuk, hogy nem adható  $\log(k)$ -nál kisebb versenyképességű hányadossal rendelkező algoritmus.

Az [1] cikkben a ládafedési probléma egy olyan változatát elemeztük, amelyben adott a ládák száma és a célfüggvény a fedéshez felhasznált tárgyak súlyának minimalizálása. Ebben a modellben két láda esetén éles alsó és felső korlátokat adtunk mind az online mind pedig a rendezett félig online (a tárgyak nagyság szerint növekvő, illetve csökkenő sorrendben vannak) esetekben. Az eredményeket kiterjesztettük a parametrizált esetre is, ahol adott felső korlát van a legnagyobb tárgy méretére. Az általános ládaszám esetén a rendezett félig online esetekben 2-nél kisebb versenyképességi hányadossal rendelkező algoritmusokat adtunk meg.

A ládapakolás problémájával kapcsolatosan a [4] cikkben azt a modellt vizsgáltuk, amelyben a tárgyaknak színe van, és a ládák lefedéséhez legfeljebb  $k$  különböző színből használhatunk elemeket. A dolgozatban pontosítjuk a szakirodalomban szereplő CSFF algoritmus elemzését és belátjuk, hogy valójában  $3 - 1/k$  versenyképes. Továbbá megadtunk egy általános módszert, amely segítségével ládapakolási algoritmusok továbbfejleszthetők erre a kiterjesztett modellre, és becslést adunk a versenyképességi hányados változására. Ennek eredményeképpen egy 2.63492 versenyképes algoritmust

kapunk, amely lényeges javítás az eddig ismert legjobb 2.75-versenyképes algoritmushoz képest. A cikkben megadunk egy approximációs sémát is az offline feladat megoldására. A [9] előadásban egy olyan többdimenziós ládapakolási modellt vizsgálunk, amelyben a ládákra súlykorlátok is adottak. Az eredménye többsége offline, de egy online algoritmust is ismertettünk, ezen a részterületen a kutatások jelenleg is folynak.

### **Számítógépes hálózatokhoz kapcsolódó eredmények**

A számítógép-hálózatokkal kapcsolatban igen sok online jellegű erőforrásallokációs probléma merül fel. Kutatásaink során ezek közül az online nyugtázás problémájával kapcsolatosan értünk el eredményeket. Ebben a problémában csomagok érkeznek, minden csomagnak van egy érkezési ideje. A csomagok érkezéséről nyugtát kell küldeni, egy nyugta több csomag érkezését is nyugtázhatja. A cél meghatározni a nyugták küldésének az optimális időpontját, ahol a célfüggvény két részből áll, egyrészt a nyugták számából, másrészt pedig a nyugták által összegyűjtött késedelemről.

A [6] cikkben a problémára időben előrenéző algoritmusokat vizsgáltunk. Rámutatunk, hogy ellentétben az eddig vizsgált előrenéző algoritmusokkal (amik konstans számú csomag érkezési idejét tudták előre) egy időintervallumban látva az érkezési időket, a teljesen online algoritmusoknál jobb versenyképességű algoritmusokat tervezhetünk. A max modellben, ahol a célfüggvényben a nyugták által gyűjtött késedelmek maximuma szerepel éles alsó és felső korlátokat adtunk minden lehetséges hosszára az előrenéző intervallumnak. A sum modellben, ahol célfüggvényben a nyugták által gyűjtött késedelmek összege szerepel, igazoltuk, hogy nincs olyan konstans hosszú intervallum, amelynek ismerése elegendő egy 1-versenyképes algoritmushoz, továbbá megadtunk egy előrenéző algoritmust, amelynek a versenyképessége konvergál 1-hez, ahogy az előrenézés intervallumának hossza tart a végtelenbe.

A [7] cikkben a problémát tovább vizsgáltuk. Megmutattuk, hogy az előrenéző tulajdonság az átlagos esetben sokkal nagyobb segítséget jelent, mint a versenyképességi hányados esetében. A [8] előadásban egy új algoritmust ismertettünk a klasszikus (előrenézést nem használó) problémára, amely algoritmus egy ismert (alarming algorithm) algoritmusnak a paraméter tanuláson alapuló továbbfejlesztése. A kezdeti teszteredmények azt mutatják, hogy a paraméter tanuláson alapuló változat szignifikánsan jobb eredményeket ad

átlagos esetben, mint az eredeti algoritmus. Az eredmények alapján jelenleg egy cikk készül, amelynek benyújtása rövidesen várható.

### A témához kapcsolódó további eredmények és publikációk

Az előzetes terveken felül a [12] cikkben tanulmányoztuk az erőforrásallokációhoz kapcsolódó online hipergráfszínezés problémáját. Igazoltuk, hogy ellentétben a gráfszínezéssel a hipergráfok színezésére nem adható sublineáris versenyképességű algoritmus, ez az állítás igaz a 2-színezhető hipergráfok speciális esetére is. Ezzel szemben igazoltuk, hogy a korlátos párosítási számmal rendelkező hipergráfok online jól színezhetők  $2\nu(H)+1$  színnel. Az eredmény speciális esetként azt adja, hogy a projektív síkok online három színezhetők, igazoltuk azt is, hogy nincs olyan online algoritmus, amely kevesebb színnel ki tudná színezni őket.

A cikkeken kívül megjelent az [5] könyvfejezet, amely egy átfogó tanulmány a versenyképességi elemzésről, és tartalmaz több részletet is, ami az online erőforrásallokációs problémákhoz kapcsolódik.

**Megjegyzés:** A közlésre benyújtott cikkek, illetve a már megjelent cikkek előzetes változatai a pályázat általam elkészített honlapján ([www.inf-uzseged.hu/~cimreh/F048587.htm](http://www.inf-uzseged.hu/~cimreh/F048587.htm)) megtalálhatóak.

### Publikációk

- [1] J. Csirik, L. Epstein, Cs. Imreh, A. Levin, On the sum minimization version of the online bin covering problem,
- [2] L. Epstein, Cs. Imreh, A. Levin, Class constrained bin covering *Theory of Computing Systems*, megjelenés alatt (DOI: 10.1007/s00224-008-9129-7)
- [3] L. Epstein, Cs. Imreh, A. Levin, Bin covering with cardinality constraints, közlésre benyújtva (az eredmények egy része ismertetésre került a VOCAL 06 konferencián)
- [4] L. Epstein, Cs. Imreh, A. Levin, Class constrained bin packing revisited, közlésre benyújtva
- [5] Cs. Imreh, Competitive analysis, *Algorithms of Informatics I*, szerkesztette Iványi A. Mondat Kft, Budapest, 2007, 395-428 (magyar nyelven is megjelent Cs. Imreh, Versenyképességi elemzés, *Informatikai Algoritmusok II*, (szerk. A. Iványi) 2005, 1350–1383)
- [6] Cs. Imreh, T. Németh, On time lookahead algorithms for the online data acknowledgement problem *Proceedings of MFCS 2007 (32nd International*

*Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*) LNCS 4708, 2007, 288-297.

[7] Cs. Imreh, T. Németh, On empirical analysis for online algorithms for the data acknowledgment problem, *Proceedings of microCAD 2008, International Scientific Conference, Mathematics and Computer Science section* 2008, 2-6.

[8] Cs. Imreh T. Németh Parameter learning algorithm for online data acknowledgement problem, VOCAL 2008 konferencia, Veszprém 2008

[9] T. Bartók, Cs. Imreh A mixed multidimensional bin packing problem, VOCAL 2008 konferencia, Veszprém 2008

[10] Cs. Imreh, On-line scheduling with general machine cost functions, *Discrete Applied Mathematics*, megjelenés alatt (DOI: 10.1016/j.dam.2007.10.014)

[11] J. Nagy-György, Cs. Imreh, On-line scheduling with machine cost and rejection, *Discrete Applied Mathematics* **155**, 2007, 2546-2554.

[12] J. Nagy-György, Cs. Imreh, Online hypergraph coloring, *Information Processing Letters*, **109**, 2008, 23-26.

[13] T. Németh, Cs. Imreh, Parameter learning online algorithm for multiprocessor scheduling with rejection, közlésre benyújtva, minor revisions *Acta Cybernetica*