OTKA K48360 szakmai beszámoló

Csörgő Sándor kutatásainak középpontjában a szentpétervári játék vizsgálata állt. Pál egy nem szükségképpen szabályos pénzérmét addig dobál, míg fej nem lesz. Jelölje p a fejdobás valószínűségét egy dobás esetén és legyen $r = 1/(1-p)$. Egy általánosított szentpétervári játékban Péter r^k dukátot fizet Pálnak, ha a k-adik dobásnál kapnak először fejet. Csörgő és Simons a publikációs lista [CsSi1] dolgozatában a következő osztozkodási problémát vizsgálja. Tegyük fel, hogy $n \geq 2$ játékos, $\text{Pál}_1, \dots, \text{Pál}_n$ mindegyike egy játékot játszik Péterrel, a nyereményeik legyenek rendre $X_1, \dots, X_n$. Felmerül az a probléma, hogy $\text{Pál}_1, \dots, \text{Pál}_n$ hogyan osztozkodjanak az $X_1 + \dots + X_n$ össznyereményen. Olyan osztozkodási stratégiákat vizsgáltak, melyek n komponensű $\boldsymbol{p}_n = (p_{1,n}, p_{2,n}, \dots, p_{n,n})$ valószínűségeloszlásokkal írhatók le. Egy adott $\boldsymbol{p}_n$ osztozkodási stratégia esetén Pál_1 kap $p_{1,n}X_1 + p_{2,n}X_2 + \dots + p_{n,n}X_n$ dukátot, Pál_2 kap $p_{n,n}X_1 + p_{1,n}X_2 + \dots + p_{n-1,n}X_n$ dukátot,...,Pál_n kap $p_{2,n}X_1 + p_{3,n}X_2 + \dots + p_{n,n}X_{n-1} + p_{1,n}X_n$ dukátot. Ilyen osztozkodás esetén mindegyik Pál nyereménye ugyanolyan eloszlású. Csörgő és Simons [CsSi1] elegendő feltételt adott arra, hogy a $p_{1,n}X_1 + \dots + p_{n,n}X_n$ lineáris kombinációkra teljesüljenek a nagy számok gyenge törvényei. A dolgozat a lineáris kombinációkra majdnem biztos $\liminf$ és $\limsup$ eredményeket is tartalmaz. Vizsgáltak még véletlen osztozkodási stratégiákat is, amikor a $p_{1,n}, p_{2,n}, \dots, p_{n,n}$ komponensek véletlen változók. Ezekre is igazoltak gyenge törvényeket.

Csörgő és Simons a [CsSi2] dolgozatban a klasszikus $p = 1/2$ esetben vizsgálja a fenti osztozkodási stratégiákat. Egy $\boldsymbol{p}_n$ stratégiát megengedettnek neveznek, ha minden komponense 0 vagy 1/2-nek egész kitevős hatványa. Az elosztás során kapott $p_{1,n}X_1 + p_{2,n}X_2 + \dots + p_{n,n}X_n$ nyereség és az X_1 egyéni nyereség viszonyát a következő összehasonlítási operátor segítségével vizsgálják:

$$A(\boldsymbol{p}_n) = \int_0^\infty [P(p_{1,n}X_1 + p_{2,n}X_2 + \dots + p_{n,n}X_n > x) - P(X_1 > x)]dx.$$

Ez tekinthető az elosztás hozamának. Bebizonyítják, hogy egy $\boldsymbol{p}_n$ stratégia pontosan akkor megengedett, ha az $A(\boldsymbol{p}_n)$ hozam létezik Riemann improprius értelemben. Igazolják, hogy megengedett stratégiákra az $A(\boldsymbol{p}_n)$ hozam megegyezik a

$$H(\boldsymbol{p}_n) = -p_{1,n}\log_2 p_{1,n} - \dots - p_{n,n}\log_2 p_{n,n}$$

entrópiával. Meghatározzák azt a megengedett stratégiát, melynek entrópiája a legnagyobb. Ezenkívül tetszőleges $\boldsymbol{p}_n$ stratégia esetén szemistabilis approximációkat konstruálnak a

$$p_{1,n}X_1 + p_{2,n}X_2 + \dots + p_{n,n}X_n - H(\boldsymbol{p}_n)$$

véletlen változóra.

Csörgő és Simons [CsSi3] azt vizsgálta, hogy n szentpétervári játék lejátszása után hogyan viselkedik Pál össznyeresége, ha lemond a legnagyobb m számú nyereségéről. Legyenek $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ a sorbarendezett nyereségek n játék után. Csörgő és Simons korábban leírták az $S_n(m) = X_{1,n} + \dots + X_{n-m,n}$ összeg aszimptotikus viselkedését. A [CsSi3] dolgozatban pontos formulát adnak az $E(S_n(m))$ várható értékre.

Csörgő [Cs5] összetartó aszimptotikus sorfejtést bizonyított az $S_n(0)$ össznyereségre. A sorfejtés egymást követő korlátlanul osztható szemistabilis eloszlásfüggvény-osztály tagjaiból áll és bizonyos deriváltjait is tartalmazza ezeknek a függvényeknek. A szóbanforgó függvényosztályok a játék paraméterei által vannak meghatározva. Csörgő meghatározta az összetartás sebességének pontos rendjét.

Csörgő és Simons a [CsSi4] dolgozatban a szentpétervári játékhoz kapcsolódó osztozkodási probléma nyereségeit vizsgálja általánosabb formában. Független és azonos eloszlású nemnegatív $X_1, \ldots, X_n$ véletlen változókat feltételezve szükséges és elegendő feltételeket adnak arra, hogy a $p_{1,n}X_1 + \cdots + p_{n,n}X_n$ lineáris kombinációkra teljesüljenek a nagy számok gyenge törvényei. A feltételek a lassú változású függvényekre vonatkozó Karamata elmélet felhasználásával vannak leírva.

Csörgő [Cs3] egy új bizonyítást ad Kruglov tételére, mely a korlátlanul osztható véletlen változók általánosított momentumainak létezésére ad karakterizációt. A bizonyítás egy korlátlanul osztható véletlen változó sztochasztikus reprezentációjára épül, ezáltal rávilágít az eredmény valószínűségi természetére.

Csörgő a [Cs6] dolgozatban szemistabilis eloszlások általánosított konvolúciós hatványait vizsgálja. Legyen $G_\alpha(\cdot)$ egy $\alpha \in (0,2)$ kitevőjű szemistabilis eloszlásfüggvény. Tetszőleges $u > 0$ esetén legyen $G_\alpha^{*u}(\cdot)$ a $G_\alpha(\cdot)$ eloszlásfüggvény u-adik általánosított konvolúciós hatványa. A dolgozat a

$$G_\alpha^{(k,j)}(x;u) = \frac{\partial^{k+j}}{\partial x^k \partial u^j} G_\alpha^{*u}(x), \quad k, j \in \{0, 1, 2, \ldots\},$$

deriváltakat vizsgálja. Csörgő kimutatja, hogy a $G_\alpha^{(k,j)}(x;u)$, $x \in \mathbb{R}$, deriváltak korlátos változásúak az egész számegyenesen. Csörgő azt is megmutatja, hogy a deriváltak azonosíthatók a Fourier-Stieltjes transzformáltjukkal. A kapott eredmények felhasználhatók összetartó aszimptotikus sorfejtések vizsgálatánál, amikor az alapeloszlás egy szemistabilis eloszlás geometriai parciális vonzástartományában van.

Csörgő Sándor és Hatvani László a [CsHa] dolgozatban olyan másodrendű lineáris differenciálegyenletekkel foglalkoznak, melyek együtthatófüggvénye szakaszonként konstans sztochasztikus folyamat. A szakaszok hosszára vonatkozó feltevések mellett vizsgálják a megoldásokat. Ha az együtthatófüggvény a végtelenhez tart, akkor majdnem biztos stabilitás teljesül. Ha az együtthatófüggvény két értéket ismétlő periódikus sorozat, akkor majdnem biztos instabilitást sikerült igazolniuk (sztochasztikus parametrikus rezonancia).

Csörgő professzor további eredményeit a társkutatók eredményeinek leírásánál ismertetjük.

Kevei Péter a [Ke1] cikkben n együttműködésre hajlandó, általánosított szentpétervári játékot játszó szerencsejátékos osztozkodási stratégiáit elemzi. Megmutatja, hogy léteznek olyan stratégiák, melyek minden egyes játékosnak több nyereményt garantálnak, mint az egyéni stratégia. Speciális esetben meghatározza az optimális stratégiát, és rámutat a klasszikus és az általános eset közötti különbségekre. Az eredményről 2006-ban Szovátán a XXVI. Seminar on Stability Problems for Stochastic Models konferencián tartott előadást.

Csörgő és Kevei a [CsKe1] dolgozatban összetartó aszimptotikus sorfejtéseket bizonyítanak általánosított szentpétervári véletlen változók speciális alakú lineáris kombinációira. A sorfejtések megfelelő szemistabilis eloszlások vegyes parciális deriváltjainak Fourier-Stieltjes transzformáltjaival vannak megadva.

A [CsKe2] cikkben szemistabilis eloszlások geometriai parciális vonzástartományából vett véletlen változók lineáris kombinációira igazolnak összetartási eredményeket. Megmutatják, hogy mindig megadható lineáris kombinációk egy sorozata, melyen az összetartási tételek hagyományos határeloszlás-tételekké redukálódnak.

Kevei a [Ke2] dolgozatban összetartó aszimptotikus sorfejtéseket bizonyít szemistabilis eloszlások geometriai parciális vonzástartományából vett véletlen változók összegeire. A sorfejtés hossza a szemistabilis eloszlás karakterisztikus kitevőjétől és a mögöttes eloszlás karakterisztikus függvényének simaságától függ. Valódi végtelen sorfejtés teljesüléséhez elegendő feltételt ad meg a kvantilisfüggvényre vonatkozóan. Az eredmények a stabilis esetben ismert tételek általánosításai.

Kevei a [Ke4] dolgozatban független, azonos eloszlású véletlen változók lineáris kombinációinak aszimptotikus viselkedését vizsgálja általános esetben. Véges szórás mellett szükséges és elegendő feltételt ad az aszimptotikus normalitásra, valamint megmutatja, hogy ha egy kiegyensúlyozott stratégiasorozat mentén a határeloszlás normális, akkor a mögöttes eloszlás szükségképpen benne van a normális eloszlás vonzástartományában. Az általános stabilis esetre is részletesen kitér.

A [Ke1], [CsKe1], [CsKe2] és [Ke4] cikkek szolgálnak Kevei PhD disszertációjának alapjául. A disszertációt 2009 májusában sikeresen megvédte.

Győrfi és Kevei a [GyK] dolgozatban az ún. konstans módon átrendezett portfoliók hatékonyságát vizsgálják abban az esetben, amikor a piacot definiáló $\{\mathbf{X}_i\}$ véletlen vektorok függetlenek és közös eloszlásuk megegyezik a $(X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(d)}, 1)$, $d \geq 1$, véletlen vektor eloszlásával, ahol $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(d)}$ független, azonos eloszlású nemnegatív véletlen változók. Általános feltételek mellett megmutatják, hogy nagy d esetén az egyenletes stratégia az optimális. Szentpétervári komponensek esetén a $d = 1, 2$ esetben megadják az optimális befektetési stratégiát, míg nagy d esetén pontos aszimptotikát adnak a növekedési rátára. Kevei az eredményről 2009-ben Debrecenben a Probability and Statistics with Applications konferencián tartott előadást.

Pósfai Anna a valószínűségszámítás egyik klasszikus problémáját, a kupongyűjtő problémát vizsgálta. Adva van $n \geq 2$ különböző kupon, melyekből egy gyűjtő véletlenszerűen visszatevéses mintát vesz. Adott n-től függő $m_n \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ szám esetén a mintavételt addig folytatja, amíg először pontosan $n - m_n$ különböző kupont nem gyűjtött. A $W_n(m_n)$ véletlen változó, a kupongyűjtő ,,várakozási ideje", az ehhez szükséges ismétlések számát jelöli.

Pósfai Anna a várakozási idő megfelelő függvényeinek eloszlását négy különböző eloszláscsaláddal approximálta. Ezek közül három – egy a Gumbel-eloszlásból származtatható eloszlás, a standard normális eloszlás és a Poisson-eloszlás – a különböző m_n sorozatokhoz tartozó várakozási idők megfelelően centralizált és normalizált sorozatainak határeloszlásaként lép fel, amint $n \to \infty$. A negyedik approximáló eloszlás az összetett Poisson-eloszlások családjába tartozik. A közelítés hibájának mértékét diszkrét approximáció esetén a

$$d_{TV}(X, Y) = \sup_{A \subset Z_+} |P(X \in A) - P(Y \in A)|,$$

teljes variációs távolsággal mérte, míg folytonos approximáció esetén a

$$d_{Kol.}(X, Y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |P(X \leq x) - P(Y \leq x)|$$

Kolmogorov-távolságot használta. Eredményei a következők:

1. A teljes gyűjtemény esetére, amikor m_n minden n-re azonosan 0, Erdős és Rényi határozták meg $W_n(m_n)$ határeloszlását, majd Baum és Billingsley kiterjesztették ezt az eredményt tetszőleges konstans m_n-re, a Gumbel-eloszlásból származtatható határeloszlásfüggvényeket kapva. Ezt a határeloszlás tételt pontosítja Csörgő Sándor és Pósfai Anna a [CsPo] dolgozatban, mely alapján konstans m_n esetén a megfelelő eloszlásfüggvények egytagú aszimptotikus sorfejtése lehetséges. A karakterisztikus függvények vizsgálatára épülő Fourier-analízisbeli módszereket alkalmazták, melyek elsősorban Cramér illetve Esseen nevéhez fűződnek.

2. Baum és Billingsley igazolták, hogy ha $m_n \to \infty$ és $(n - m_n)/\sqrt{n} \to \infty$ amint $n \to \infty$, akkor a standardizált $W_n(m_n)$ a standard normális eloszláshoz konvergál. Ugyancsak Fourier-analízisbeli eszközöket használva Pósfai felső becslést adott a konvergencia sebességére a [Po1] dolgozatban.

3. Szintén Baum és Billingsley látták be, hogy ha $(n - m_n)/\sqrt{n} \to \lambda$ amint $n \to \infty$, ahol $\lambda > 0$ konstans, akkor $W_n(m_n) - (n - m_n)$ eloszlása a $\lambda^2/2$ várható értékű Poisson-eloszláshoz konvergál. Pósfai ezen határeloszlás tétel Kolmogorov és Gnedenko nevéhez fűződő

általánosabb változatát vizsgálta [Po2] dolgozatában. Olyan független nemnegatív egész értékű infinitezimális véletlen változók szériasorozatát tekintette, melynek soronkénti összegei aszimptotikusan Poisson-eloszlásúak, és ezen soronkénti összegeket közelítette olyan Poisson-eloszlású véletlen változóval, melynek paramétere csak a sorösszegben szereplő változók eloszlásától függ. Az approximáció hibájára felső és alsó becslést adott, ezáltal meghatározta a közelítés hibájának pontos rendjét. A Poisson határeloszlású esetben megadta a várakozási idő eloszlásának egytagú aszimptotikus sorfejtését.

4. Pósfai [Po4]-ben megmutatta, hogy azon n és m_n paraméterértékekre, melyekre a standardizált várakozási idő jól közelíthető normális eloszlással, a várakozási idő megfelelő diszkrét eloszlással is jól approximálható: létezik olyan összetett Poisson-eloszlású véletlen változó, melynek megfelelő eltoltjával közelítve $W_n(m_n)$-et ugyanolyan rendű hibát kapunk teljes variációs távolságban, mint a normális approximáció esetén Kolmogorov-távolságban. A bizonyításban Pósfai a Stein-Chen módszert, illetve a csatolásos módszert alkalmazta.

Pósfai Anna eredményeiről több nemzetközi konferencián tartott előadást.

Kevei Péter és Pósfai Anna lefordították Csörgő Sándor „53 lectures in probability" c. angol nyelvű jegyzetét. Az eredeti változat könyv formában soha nem jelent meg. A jegyzet 1992-94 között íródott, a Michigani Egyetem 2 féléves PhD kurzusának anyagát tartalmazza, a bevezető mértékelmélettől a Wiener-folyamat funkcionáljainak vizsgálatáig. A fordítás tankönyv formájában jelent meg „Fejezetek a valószínűségelméletből" címmel. A tankönyv 53 fejezetből áll, 542 oldal terjedelmű.

Csörgő Sándor és Szabó Tamás Zoltán a lokáció és skála eloszlásosztályokhoz történő illeszkedés vizsgálatokkal foglalkoztak a [CsSzT] dolgozatban. A Wasserstein távolságra épülő súlyozott korrelációs tesztek segítségével a Gumbel és a Weibull eloszláscsaládokat tesztelték a másik két extrémális eloszláscsalád és a gamma családok által képviselt alternatívákkal szemben. Előállították a tesztstatisztikák határeloszlásait. A kapcsolódó szimulációs vizsgálatok lassú konvergencia sebességre engednek következtetni. A tesztek erejét grafikusan szemléltetik.

OszténYiné Krauczi Éva is foglalkozott a Wasserstein távolságra épülő korrelációs tesztekkel. A normális eloszláscsaládra vonatkozó teszt tanulmányozására egy szimulációs vizsgálatot végzett, mely egyrészt a határeloszlás numerikus meghatározásából, másrészt a teszt erejének vizsgálatából állt. Ennek a munkának az eredménye a [Kr] cikk. Ezenkívül sikerült a logisztikus eloszláscsalád esetén numerikusan is számolható határeloszlásokat megadnia, így egy kiterjedt szimulációs vizsgálat van még hátra, mely tartalmazná a tesztek erejének vizsgálatát.

Oszténynié Krauczi Éva ismert intervallumon egyenletes eloszlás klaszteranalízisével is foglalkozott. Meghatározta a különböző rendű d távolságszintekhez tartozó klaszterszámok együttes aszimptotikus eloszlását, valamint egy erre épülő egyenletességet ellenőrző tesztet is kidolgozott. A szimulációs vizsgálatokra alapozva úgy tűnik, hogy egy univerzálisan gyenge erejű tesztet sikerült így előállítani, de az úgynevezett "klaszteres" alternatívákkal szembeni ereje meglehetősen jó. Ezzel kapcsolatos eredményeiről konferencia előadást tartott (XXVI. Seminar on Stability Problems for Stochasic Models 2006, Sovata-Bai, Romania).

Szűcs Gábor kutatómunkájának első iránya az empirikus generátorfolyamatokhoz kapcsolódik. A kiindulópont egy klasszikus illeszkedési probléma: ha adott $X_1, \ldots, X_n$ nemnegatív egész értékű és független elemekből álló statisztikai minta, mely egy ismeretlen $F(\cdot)$ eloszlásból származik, valamint adott egy $F_0(\cdot)$ nemnegatív egész értékű eloszlás, akkor teszteljük a $\mathcal{H}_0 : F = F_0$ nullhipotézist. A feladat kezelhető a klasszikus Kolmogorov–Szmirnov vagy a Cramér–von Mises statisztikával, de a tapasztalatok azt mutatják, hogy bizonyos diszkrét eloszlások esetén a valószínűségi generátorfüggvények alkalmazása hatékonyabb megoldás lehet. Legyen $g_0(t) =$

$\int_{\mathbb{R}} t^x dF_0(x)$ az $F_0(\cdot)$ eloszlás valószínűségi generátorfüggvénye, legyen $g_n(t) = (t^{X_1} + \cdots + t^{X_n})/n$ a minta empirikus generátorfüggvénye, és végül legyen

$$\alpha_n(x) = n^{1/2}[F_n(x) - F_0(x)]\,, \qquad x \in \mathbb{R},$$

a mintára felírt empirikus folyamat, ahol $F_n(\cdot)$ jelöli az $X_1, \ldots, X_n$ mintához tartozó empirikus eloszlásfüggvényt. Ekkor a nullhipotézis tesztelhető a

$$\gamma_n(t) = n^{1/2}[g_n(t) - g_0(t)] = \int_{\mathbb{R}} t^x d\alpha_n(x)\,, \qquad 0 \le t \le 1,$$

empirikus generátorfolyamat segítségével definiált statisztikák alkalmazásával is. A módszer matematikai megalapozásához csupán azt kell bizonyítani, hogy $\mathcal{H}_0$ teljesülése esetén $\gamma_n(\cdot)$ eloszlásban konvergál a $\Gamma(t) = \int_{\mathbb{R}} t^x dB(F(x))$ folyamathoz a $C[0,1]$ térben amint a mintaméretet növeljük a végtelenségig. ($B(\cdot)$ a Brown-híd folyamatot jelöli.) A konvergenciát korábban már többen bizonyították különböző, a háttéreloszlásra tett feltételek mellett. Szűcs megmutatta, hogy nem csak a konvergencia teljesül, hanem erős approximáció is adható, tehát megfelelően megkonstruált mintaelemek, és a határfolyamat megfelelő $\Gamma_n(\cdot)$ másolatai esetén

$$\sup_{0\le t\le 1} |\gamma_n(t) - \Gamma_n(t)| \to 0$$

majdnem biztosan, amiből az eloszlásbeli konvergencia már azonnal következik, és mindehhez semmilyen extra feltételnek sem kell teljesülnie. Az általa kidolgozott bizonyítási módszer nem csupán erre a folyamatra alkalmazható. Munkájának fő észrevétele az a tény, hogy ha tudunk valamilyen approximációt adni egy $K_n(x), x \in \mathbb{R}$ empirikus folyamatra, akkor hasonló rendű approximáció nyerhető az $\int_{\mathbb{R}} t^x dK_n(x), 0 \le t \le 1$, empirikus generátorfolyamatra is. Ez – sarkítva – azt is jelenti, hogy a $K_n(\cdot)$ folyamat eloszlásbeli konvergenciájából következik a kapcsolatos generátorfolyamat konvergenciája. Ez az általános észrevétel több következményt is maga után von. Összetett, tehát egy paraméteres eloszláscsaládhoz való illeszkedési hipotézis esetén hatékonyan alkalmazható az empirikus generátorfolyamat paraméterbecsült változata. Mivel a kapcsolatos paraméterbecsült empirikus folyamatra már létezik approximáció, a paraméterbecsült empirikus generátorfolyamat gyenge konvergenciája azonnal következik. Hasonló a helyzet az empirikus generátorfolyamat bootstrappelt változatával, melynek segítségével konfidenciasávokat húzhatunk az ismeretlen $g(\cdot)$ generátorfüggvényhez. A generátorfolyamatok témájában Szűcs egy publikációt írt, mely 2005-ben jelent meg a Statistics and Decisions című folyóiratban ([SzG1] dolgozat).

Szűcs második kutatási irányát részben a fenti eredmény motiválja, de önállóan is érdekes és fontos statisztikai problémát jelent. Összetett illeszkedési hipotézisek esetén régi és jól bevált eszköz a paraméterbecsült empirikus folyamat, valamint a rá épülő statisztikák alkalmazása. A módszer fő hátránya az, hogy a legtöbb eloszláscsalád esetén a statisztikák kritikus értékei nem, vagy csak nehezen számolhatóak elméleti úton. Ezen nehézség kiküszöbölésére alkalmazható a parametrikus bootstrap módszer. Legyen $X_1, \ldots, X_n$ ismét független (de nem feltétlenül diszkrét) statisztikai minta egy ismeretlen $F(\cdot)$ eloszlásból, valamint legyen $F(x, \theta), x \in \mathbb{R}, \theta \in \Theta$, parametrikus eloszláscsalád. Feladatunk annak tesztelése, hogy a minta az eloszláscsalád valamely elemétől származik. Ennek céljából tekintsünk egy $S_n = S_n(X_1, \ldots, X_n)$ statisztikát, és szeretnénk meghatározni a statisztikához tartozó kritikus értékeket. Végezzünk egy $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, \ldots, X_n)$ paraméterbecslést a minta alapján, generáljunk n elemű mintát az $F(\cdot, \hat{\theta}_n)$ eloszlásból, és írjuk fel a statisztika S_n^* értékét a generált elemek, mint statisztikai minta alapján. A módszer alapja az az észrevétel, hogy ha az eredeti mintaelemeink valóban a családból származnak, akkor S_n és S_n^* eloszlása hasonló, és ezért S_n kritikus értékei tetszőleges pontossággal megkaphatók, mint S_n^* empirikus kvantilisei sok generálás után. Szűcs az általános problémán belül a klasszikus

$$\hat{\alpha}_n(x) = n^{1/2}[F_n(x) - F(x, \hat{\theta}_n)]\,, \qquad x \in \mathbb{R},$$

paraméterbecsült empirikus folyamat $\hat{\alpha}_n^*(x), x \in \mathbb{R}$, bootstrappelt változatával foglalkozott. Ezen a területen a korábbi eredmények csak folytonos eloszláscsaládokra voltak alkalmazhatóak. Szűcs megmutatta, hogy $\hat{\alpha}_n^*(\cdot)$ elegendően általános feltételek mellett pontosan ahhoz a folyamathoz konvergál eloszlásban, ahová $\hat{\alpha}_n(\cdot)$ tart. Ennek az a következménye, hogy a paraméterbecsült empirikus folyamat segítségével felírt S_n statisztikák esetén a fent ismertetett bootstrap technika alkalmazható. Mivel Szűcs az eloszlásbeli konvergenciát úgy bizonyította be, hogy gyenge approximációt adott a boostrappelt folyamatra, az eredmény nemnegatív egész értékű változók esetén alkalmazható a kapcsolatos empirikus generátorfolyamatra is. Szűcs a témában két cikket írt, az első 2008-ban jelent meg a Metrika című folyóiratban ([SzG2] dolgozat), a második jelenleg elbírálás alatt áll ([SzG3]). A dolgozatok számítógépes Monte Carlo szimulációkat is tartalmaznak, melyek azt mutatják, hogy a módszer hatékonyan alkalmazható gyakorlati tesztelési problémák esetén.

Szűcs jelenlegi munkája egy a Koziol–Green modellre épülő függetlenségteszt. A vizsgálat még nem ért a végére, de az eddigi eredmények ígéretesek. A teszt formalizálása meghaladja ezen beszámoló kereteit.

Szűcs Gábor az OTKA támogatás időtartama alatt két nemzetközi konferencián vett részt, és mindkettőn előadást tartott az empirikus generátorfolyamatok területén elért eredményeiről. Az első konferencia címe 'XXVI. Seminar on Stability Problems for Stochastic Models', és a romániai Szovátán került megrendezésre 2006 nyarán. A másik rendezvény a Csörgő Sándor 60. születésnapja alkalmából Szegeden rendezett konferencia 2007 nyarán.

Szűcs Gábor kutatási eredményei hatékonyan alkalmazhatóak különböző illeszkedési problémák esetén, főleg diszkrét paraméteres eloszláscsaládokhoz való összetett illeszkedési teszteknél.

Szabó Tamás negyedéves matematikus hallgató 2009-ben kapcsolódott be a kutatásokba. Dr. Pap Gyula témavezetése mellett kezdett el elágazó folyamatokkal foglalkozni. A 2009-es őszi félév során egész értékű autoregresszív folyamatokat vizsgáltak. Ezeknek a folyamatoknak fontos alkalmazásai vannak a biológiai matematika, különösen a populációdinamika és genetika területein. A kutatás során a paraméterek becslését és a becslések aszimptotikus viselkedését vizsgálták. Szabó Tamás 2009 októberében részt vett Basovizzában a Young Statisticians' Meeting-en. Az előadások közül a modellalkotás és alkalmazás során keletkező hibákról szólóak különösen hasznosak lehetnek, ha az elágazó folyamatokról szóló kutatási eredmények egy biológiai modellben felhasználásra kerülnek.

Viharos László a [Vi1] dolgozatban egy pontfolyamathoz tartozó események között eltelt idők vizsgálatával foglalkozik. Feltételezi, hogy az események közötti idők függetlenek és azonos eloszlásúak. Számos módszer létezik az időközök exponancialitásának tesztelésére. Viharos a skálázott TTT (total time on test) és a skálázott részletösszeg folyamatok felhasználásával egy új tesztet konstruált, mely alkalmas nem csak az exponenciális, hanem bizonyos parametrikus eloszláscsaládok tesztelésére is. Az alapeloszlásra vonatkozó korlátozó feltevések mellett approximációkat igazolt a skálázott TTT és a skálázott részletösszeg folyamatokra ugyanazon a valószínűségi mezőn. Az approximációk egy Brown-híd folyamatokból álló sorozat felhasználásával vannak előállítva, így az approximált folyamatok aszimptotikus kovarianciája meghatározható. Ennek segítségével sikerült megkonstruálnia egy tesztstatisztikát a következő parametrikus eloszláscsaládok tesztelésére: $\mathcal{D}_0 = \{F_\theta : F_\theta(x) = G_0(\theta x), x \in \mathbb{R}; \theta > 0\}$, ahol $G_0(\cdot)$ egy rögzített eloszlásfüggvény. Az egyenletes és exponenciális eloszláscsaládokra vonatkozó számítógépes szimulációs vizsgálatok alátámasztják az új teszt hatékonyságát. A kapott eredményekről Viharos konferencia előadást tartott (XXVI. Seminar on Stability Problems for Stochasic Models 2006, Sovata-Bai, Romania).

Csörgő és Viharos a [CsVi] dolgozatban Pareto eloszlások farokindexének becslésével foglalkoznak. A kernel és a súlyozott legkisebb négyzetes becslések együttes aszimptotikus normalitását igazolják. Az eredmények lehetővé teszik annak a nullhipotézisnek a tesztelését, hogy becslések skálázott aszimptotikus torzításai nullához tartanak. Ez a vizsgálat azért fontos, mert a nullhipotézis teljesülése esetén konfidencia intervallum konstruálható az eloszlás farokindexére. A módszer hatékonyságát számítógépes szimulációval vizsgálják.

Viharos a [Vi2] dolgozatban Pareto eloszlások farokindex becsléseinek nagy-eltérés elméletével foglalkozott. Egy olyan általános becslésosztályt sikerült megkonstruálnia, mely tartalmazza az irodalomban eddig külön tárgyalt kernel és súlyozott legkisebb négyzetes becsléseket. Aszimptotikus kifejtést adott a becslésosztály tagjaihoz tartozó nagy-eltérés valószínűségekre, ezáltal lehetővé vált a konvergencia sebességek összehasonlítása. Megmutatta, hogy a becslések egy alosztályában a Hill becslés konvergál a leggyorsabban.

Viharos [Vi3] a rendezett exponenciális mintaelemek Rényi-reprezentációjából kiindulva általánosította a Rényi-statisztikákat az alapul szolgáló eloszlás kiterjesztésével. Sikerült meghatároznia az általánosított statisztikákból képezett minta eloszlását az együttes karakterisztikus függvény előállításával. Az együttes karakterisztikus függvényt az alapeloszlás karakterisztikus függvénye segítségével írta le. Kimutatta, hogy az általánosított statisztikák aszimptotikusan exponenciálisak. Ez az általánosítás hatékony modellt biztosít paraméter becslésre, amely alternatívája lehet a hagyományos exponenciális modellnek. A kapott modell érvényessége könnyen ellenőrizhető. Az általánosított modell néhány almodelljében Viharos előállította a modell paraméterének maximum-likelihood becslését. A kapott becslések egyike a népszerű Hill becslés. A Hill becslés számos jó tulajdonsággal rendelkezik az általánosított modellben.