CORE
Metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
Provided by Repository of the Academy's Library

A 49693 sz. OTKA pályázat eredményeinek ismertetése

A kutatócsoport 3 és fél éves munkája igen eredményesnek mondható. Összesen 76 publikáció jelent meg vagy került elfogadásra, kb. 80%-ban külföldi nemzetközi folyóiratokban (kisebb részben külföldön megjelenő lektorált konferencia- kiadványokban), köztük a legnevesebb matematikai folyóiratokban, úgy mint az Annals of Mathematics és a Svédországban kiadott Acta Mathematica. A többi publikáció is 2 kivétellel angol nyelven jelent meg hazai kiadású nemzetközi folyóiratokban, míg a 2 magyar nyelvű publikáció akadémiai székfoglaló volt. Fentieken kívül még további 10 dolgozat lett közlésre leadva. Ennek megfelelően a jelentésben csak az eredmények egy kis részét tudjuk ismertetni, a részletesen felsorolt, ezer oldalnyit is meghaladó publikációk adnak csupán teljes képet a csoportunk eredményeiről.

A legnagyobb nemzetközi visszhangot keltő eredmények kétségkívül az egymást követő prímekre vonatkozóan a témavezető és külföldi társszerzői, D. Goldston es C.Y. Yildirim által elért, az egymást követő prímek közt előforduló kis hézagokra vonatkozó eredmények voltak. Az egész matematika egyik leghíresebb, talán legrégebbi, máig is megoldatlan problémája, az ikerprím-sejtés azt mondja ki, hogy végtelen sokszor fordulnak elő olyan prím-párok, amelyek különbsége 2. Bár ezen sejtést megoldani nem sikerült, a probléma egy olyan, Hardy-Littlewood által már 80 éve felvetett könnyített változatára sikerült a témavezetőnek és a már fent említett társszerzőknek pozitív választ adniuk, mely szerint ha egy akármilyen kis fix hányadot, egy tetszőleges pozitív c számot megadunk, végtelen sok olyan egymást követő p és p' prímpárt találunk, ahol a p'-p differencia kisebb, mint az átlagos logp differencia c-szerese, másképp fogalmazva liminf(p'-p)/logp=0, ha p' mindig a p-t követő prímszámot jelöli (megjelenés alatt az Annals of Mathematics-ben). A probléma nehézségét jelzi, hogy a számelmélet legnagyobb alakjai Hardy, Littlewood, Erdős, Bombieri, Davenport, Huxley, Maier foglalkoztak a problémával az elmúlt 80 évben, és erőfeszítéseik ellenére dolgozatunk előtt a legjobb eredmény az volt (Maier, 1988), hogy végtelen sokszor fordulnak elő az átlagos differencia ¼-énél kisebb hézagok, azaz liminf (p'-p)/logp<1/4. Egy későbbi dolgozatunkban, amely a svéd Acta Mathematicában került elfogadásra, ezen eredmény lényeges továbbfejlesztéseként sikerült kimutatnunk azt, hogy lényegében az átlagos távolság négyzetgyökénél kisebb közök is végtelen sokszor fordulnak elő, nevezetesen, hogy a liminf (p'-p)/(logp)^a =0 reláció is igaz bármely a>1/2 értékre. Bár ezen eredmények még meglehetősen távol esnek annak bizonyításától, hogy az egymást követő prímek különbsége végtelen sokszor kettővel egyenlő, sikerült egy további, igen meglepő eredményt elérni, amely, igaz, hogy egy igen nehéz bizonyítatlan feltevés használatával már azt a következményt eredményezi, hogy az egymást követő prímek differenciája legfeljebb 16, ami már valóban közel áll a korábbi módszerekkel még plauzibilis más jellegű feltételek mellett (pl. általánosított Riemann hipotézis, stb.) is megtámadhatatlannak vélt ikerprím-sejtés állításához. A sejtés a prímek számtani sorozatokban való statisztikus egyenletes eloszlására vonatkozó Elliott-Halberstam sejtés. Amennyiben ezen sejtésnek egy jóval gyengébb változatát használjuk, amely szerint a prímek számtani sorozatokban való statisztikus eloszlása egyenletes, ha a modulusok nem haladják meg x^b-t, ahol b tetszőlegesen választható ½-nél nagyobb szám, akkor eredményünk szerint végtelen sokszor található a prímek között az adott b-től függő C(b)-t meg nem haladó különbség, azaz liminf (p'-p)<C(b). Az itt szereplő feltétel (másképp, hogy a prímek számtani sorozatokban való eloszlási szintje nagyobb ½-nél) azonban már jóval közelebb áll az eddigi legerősebb bizonyított tételhez. Nevezetesen Bombieri-Vinogradov 1965-ben bizonyított tétele szerint ez bármilyen ½ alatti a-ra fennáll, sőt x^(1/2)/(logx)^B-ig terjedő modulusokra is. (Az Elliott-Halberstam sejtés azt mondja ki, hogy b bármilyen 1-nél kisebb számnak választható).

A fenti módszer megfelelő módosítása alkalmasnak bizonyultak az ikerprím probléma egy másik, majdnem prímekkel történő megközelítésére is. P_k típusú majdnem prímeknek az olyan számokat hívjuk, amelyeknek (multiplicitással számolva) legfeljebb k prímosztójuk van. Az első ilyen típusú megközelítés Vigo Bruntól származott, aki az általa kifejlesztett szitamódszer segítségével 1919-ben bebizonyította, hogy végtelen sok olyan P_9 típusú szám van, hogy a nála 2-vel nagyobb szám is ilyen típusú. Az ezt követő csaknem fél évszázadban a számelmélet legnagyobb alakjai, többek közt Rényi Alfréd, A. Selberg és A.I. Vinogradov értek el a Brunénál élesebb eredményeket az ikerprím-sejtés ilyen jellegű megközelítésében. Végül 1966-ban Chen Jing Run igazolta, hogy végtelen sokszor lesz valamilyen p prímszámra p+2 vagy prím, vagy két prím szorzata. A két prím szorzataként előálló számokra használják a szemiprím elnevezést is.

Ugyanakkor, hogy az egymást követő szemiprímek között mekkorák a végtelen sokszor előforduló legkisebb távolságok, semmilyen az átlagos távolság pozitív hányadánál jobb eredmény nem volt ismeretes. A probléma nehézségét az ún. paritási probléma vagy paritási korlát okozza, melynek Selberg által adott megfogalmazása szerint a szita módszerek nem alkalmasak olyan számok előállítására amelyeknek adott számú prímosztója van, vagy akárcsak olyan számokéra, ahol a prímosztók számának paritása előre meghatározott. Így például Chen eredménye ellenére az a látszólag sokkal könnyebb probléma, hogy p+2 típusú számokból (ahol p prím) végtelen sok olyan van, amelyiknek pl. páros sok prímosztója van, máig megoldatlan. (De hasonlóképp, ha azt kívánnánk, hogy p+2-nek 1, vagy 3, vagy 5 vagy 7, vagy általában páratlan sok prímosztója legyen.) A prímek közti kis hézagokra vonatkozó új módszerünk adaptálása ebben az egyesek által az ikerprím problémához hasonló nehézségűnek tartott problémában igen sikeresnek bizonyult. Nevezetesen a témavezető Goldstonnal, Yildirimmel és S. W. Grahammel közös munkájában a paritási korlátot áttörve igazolta, hogy végtelen sok olyan egymást követő szemiprímekből álló pár van, ahol a pár két tagjának különbsége 2, 4 vagy 6.

Az említett eredményeknek igen széleskörű nemzetközi visszhangja volt.

1) A Discover Magazine a 2005-ös év 100 legfontosabb tudományos eredménye közé sorolta, az egyedüli matematikai eredményként. Érdemes megemlíteni, hogy a Discover folyóirat által 2004-ben, ill. 2006-ban a legfontosabb matematikai eredményként értékelt munkák, Green-Tao, ill. Perelman eredményeinek szerzői, pontosabban Tao és Perelman, egyaránt a matematikai élet egyik legnagyobb kitüntetéseként számontartott Fields-éremben részesült a madridi 2006-os Nemzetközi Matematikai Kongresszuson.

2) Az Amerikai Matematikai Társulat (AMS) 2006 januári nemzeti találkozóján a 2005-ös év eredményeit bemutató „Current Events" szekcióban 4 matematikai eredményt ismertettek, melyek közül ez az egyik, az egyetlen elméleti matematikai témájú eredmény a négy közül. Az ismertetett eredmények kiválasztását az AMS elnöke által vezetett, prominens matematikusokból álló 11 tagú bizottság végezte.

3) A Kaliforniában, Palo Altoban található American Institute of Mathematics, amely egyike az USA 7, NSF által támogatott matematikai intézetének, évente 3 új eredmény megtárgyalására szervez nemzetközi résztvevőkkel 1 hetes konferenciát, és 2005-ben egyik témaként ezt az eredményt választotta (a konferencia novemberben, Small gaps between primes címmel került megrendezésre).

4) Párizsban, a Bourbaki-szemináriumon 2006. márciusában E. Kowalski ismertette az eredményt. A 32 oldalas ismertetője megjelent a szemínárium kiadványában (Séminaire Bourbaki, 58(2005/2006), no. 959).

5) Az eredményt a nyílvánosságra hozatalát követő néhány napon belül (2005.05.26) ismertette a Science, később az American Scholar folyóirat , továbbá amerikai, brit, taiwani, török, indiai és magyar napilapok, köztük a Wall Street Journal, Guardian (valamint a Magyar Tudomány, Interpressz magazin és a Népszabadság). Az amerikai PBS televízió csatorna rövid műsort szentelt az eredményünknek.

6) A nyilvánosságra hozatal (2005. május) óta nemzetközi konferenciákon, külföldi egyetemeken, a szerzők vagy más matematikusok több mint 110 előadásban számoltak be az eredményről (a Palo Alto-beli konferencián kívül). Az előadásokra 5 kontinens 17 országában került sor, többek közt Tokyo, Kyoto, Peking, Szöul, Hong-Kong, Isztambul, London,Edinburgh, Párizs, Bordeaux, Marseille, Göttingen, Zürich, Genova, Padova, Moszkva, Szentpétervár, New York, Montreal, Ottawa egyetemein, vagy ottani konferenciákon és olyan neves matematikai intézetek kollokviumain , mint a Princetoni egyetem, a Princetoni Institute for Advanced Study, MIT, Harvard, Columbia, Cornell, John Hopkins, Stanford, Berkeley Egyetemek. Az Interneten 17 különböző nyelven jelent meg híradás az eredményről, vagy az azt ismertető előadások valamelyikéről.

7) Az eredmény a kanadai Montreal és Laval, az amerikai PennState, továbbá a Padovai , Nancy, Cambridge-i egyetemek kurzusaiba is bekerült, míg az MIT-n 2006-ban K. Kedlaya külön kurzust szentelt az eredménynek.

Csoportunk (Balog Antal és külföldi társszerzők) foglalkozott Halász Gábor multiplikatív számelméleti függvényekre vonatkozó alapvető tételének számtani sorozatokra történő általánosításával. Újszerű megközelítésben sikerült a tételre az eredetitől eltérő új bizonyítást adni, amely egyúttal mélyebb betekintetést nyújt a multiplikatív függvények viselkedésébe.

Foglalkoztunk, és érdekes eredményeket nyertünk a prímszámformula effektív oszcillációjával kapcsolatos Landau-féle exponenciális összegekre vonatkozó szélsőérték-problémával. Révész Szilárd és A. Bonami megcáfolták Anderson, Ash, Jones, Rider és Saffari egy, az idempotens exponenciális polinomok koncentrációjára vonatkozó sejtését: megmutatták, hogy p=1-re, sőt minden ½-nél nagyobb p-

re van pozitív koncentráció, sőt általában, ha p>1 és nem páros egész, akkor maximális koncentráció érvényes. Eredményeik közvetlen következményeként megválaszolták A. Zygmund egy 70 éves kérdését és erős eredményeket értek el Wiener pozitív definit függvényekre vonatkozó problémájában is.

Tóth Árpád neves külföldi társszerzőkkel (W. Duke, Imamoglu) Zagier és Borcherds eredményeit általánosította. Zagier felfedezte, hogy egy rögzített negatív diszkriminánshoz tartozó kvadratikus formák osztályaihoz rendelt invariánsoknak a diszkriminánsok által parametrizált generátorfüggvényei moduláris formákat adnak. A jelenség teljes magyarázata Borcherds munkája, akinek sikerült a Shimura megfeleltetést a konvergencia-tartományon túl is kiterjeszteni. Ennek segítségével Borcherds megmutatta, hogyan lehet Zagier eredményét moduláris formák szorzat-előállításából levezetni. A közlésre benyújtott munkában a szerzők a fent felsorolt eredmények teljes általánosítását nyújtják pozitív diszkriminánsokra.

A kombinatorikus számelmélet különböző problémaival nagyszámú dolgozatban foglalkoztunk, elsősorban Sándor Csaba, Hegyvári Norbert, Kovács Katalin, Bíró András, Gyarmati Katalin és Sárközi András, társszerzők szélesebb körével együtt, mint Ruzsa Imre és több francia kutató. Vizsgáltuk egész számokból álló véletlen sorozatok kombinatorikai tulajdonságait, így például a Sidon-tulajdonságot is, amely felfogható úgy, hogy a sorozat nem tartalmaz 2-dimenziós Hilbert–kockát. Ennek általánosításaként vizsgáltuk azon sorozatokat, amelyek nem tartalmaznak k-dimenziós Hilbert-kockát. Ez a megközelítés elvezetett azon korábbi becslés élesítéséhez is, hogy az 1-től n-ig terjedő egészekből legfeljebb hány választható ki úgy, hogy a kiválasztott sorozat ne tartalmazzon k-dimenziós Hilbert-kockát. Fentieken túlmenően tanulmányoztuk az additív és multiplikatív Hilbert-kockák különböző tulajdonságait.

A Fields-érmes Bourgain igazolta, hogy egy p elemű véges test (ahol p elegendően nagy prímszám) minden elemét előállítja az A.A+A.A+A.A halmaz, ha A számossága meghaladja p ¾-ik hatványát. Ennek általánosításaként feltételeket adtunk, amelyek teljesülése esetén a véges test minden eleme előáll k darab, az AB szorzathalmazból választott elem összegeként.

Ha A és B egész számok részhalmazai, A átmérője egy véges n szám és minden egész egyértelműen áll elő egy A és egy B-beli elem összegeként, akkor könnyen belátható, hogy B periodikus és legkisebb periódusa, k, nem haladhatja meg a 2^n értéket. Ruzsa Imre és Kolountzakis eredményének javításaként Bíró András igazolta az ennél lényegesen jobb Cexp(n^c) korlátot, ahol c>1/3 tetszőlegesen választható.

Több dolgozatban vizsgáltuk összeghalmazok vagy differenciahalmazok számosságát, továbbá többszörös összegeket is. Sikerült A_1+A_2+… A_k típusú összeghalmazok elemszámára alsó és felső becslét nyerni az olyan halmazok számosságának függvényében, amikor a fenti k halmazból csak k-1 tagnak az összegét tekintjük, azaz az A_1 +… A_{i-1}+A_{i+1}+…A_k típusú halmazok számosságának segítségével. Összeghalmazokra vonatkozó problémákat, és általában algebrai egyenletek megoldhatóságát sikerrel vizsgáltunk véges testekben, és más struktúrákban is. A problémák megoldásához szükséges módszerek karakterösszegek becslését is igényelték. Karakterösszegek becslése a számelmélet legfontosabb és gyakran legnehezebb kérdései közé tartozik.

Ezek a technikák (több más módszer mellett) központi szerepet játszottak a véges pszeudovéletlen sorozatokra vonatkozó, csoportunk által elért eredményekben. Sárközy Andrásnak és társszerzői kulcsszerepet játszottak a pszeudovéletlen sorozatok modern elméletének kifejlesztésében az utóbbi 10-12 évben. Az általuk meghatározott különféle mértékek lehetőséget nyújtanak egy véges sorozat pszeudovéletlen tulajdonságainak jellemzésére. A probléma jelentőségét és gyakorlati fontosságát az jelzi, hogy a modern kriptográfiai módszerekben döntő jelentőségük van olyan algoritmusoknak, ahol valamilyen véletlen sorozatra van szükségünk. A projekt megvalósítása során Sárközy András és társszerzői (többek közt csoportunk tagja, Gyarmati Katalin) a pszeudovéletlen sorozatok általánosításaként különböző diszkrét struktúrák (részhalmazok, bináris rácsok, véges testek, bináris vektorok) pszeudovéletlen tulajdonságait is vizsgálták, és igen fontos eredményeket értek el ezen a területen is.