Szakmai zárójelentés az OTKA 49433: „Hálók és más algebrák" pályázatról (2005-2008)

A pályázati szerződésben 10 tudományos cikket vállaltunk. A jelen beszámoló 15 megjelent, 6 elfogadott és 8 benyújtott cikk eredményeiről ad számot, a jelen fájl végén található irodalomjegyzék szerint. A költségkereten belül maradtunk. Az eredmények az alábbiak.

Ad 1) 2-uniform kongruenciák és lezárási operátorok

Nemrég K. Kaarli, válaszul Grätzer, Quackenbush és Scmidt Tamás kérdésére, bebizonyította, hogy ha egy véges hálónak nincs olyan kongruenciája, amelynek van két különböző elemszámú osztálya, akkor a háló kongruencia-felcserélhető. Az [1]-beli eredményt [3]-ban továbbfejlesztve igazoltuk, hogy nemtriviális idempotens Malcev-feltételt teljesítő véges algebra esetén bármely két olyan kongruencia felcserélhető, amelyeknek minden osztálya kételemű. Az eredmény komolyan épít az [1]-ben bevezetett újfajta lezárási operátorra, amelyik erősebb (azaz szűkebb lezártat ad), mint a Galois-féle lezárás. Mármost, ha a Galois-féle lezárási operátor gyakorlati hasznosítására oly sok példát adott a Rudolf Wille által alapított (főleg darmstadti) iskola, akkor van egy kis remény arra, hogy az új lezárási operátor is hasznosul majd, v.ö. [7, 10, 17].

Ad 2.) Fraktálhálók és Neumann-keretek

[4]-ben bevezettük a fraktálháló fogalmát: a fraktálháló egy olyan korlátos háló, amelyik bármely nemtriviális intervallumával izomorf. [4] több példát ad ilyenekre, és fraktálhálók segítségével sikerült egy új eredményt igazolni hálók konvexitásairól. [5]-ben kimutattuk, hogy bár egy moduláris fraktálháló azonosságelmélete nem teljesen egyértelmű, de mégis elég szűk határok között mozog. Érdekes a Neumann-féle keretekre menet közben nyert eredmény is, amely a hálók koordinátázásának elméletét gazdagítja. A fraktálhálókra vonatkozó vizsgálatokat nemrég Jan Jakubík folytatta (eredménye benyújtás előtti stádiumban van).

Ad 3) A gyenge kongruenciák hálója

[2]-ben megmutattuk, hogy véges csoportok Dedekind-tulajdonsága jellemezhető azzal, hogy a diagonális reláció egyesítés-féligdisztributív a gyenge kongruenciák hálójában. Ennél messze többet mond a kategóriaelmélet és hálóelmélet határához tartozó [18], ahol ezt az eredményt egy L háló főideáljain definiált lezárási operátorok olyan családjára általánosítjuk, amely család lokális lezárási operátor kategória elméleti értelemben.

Ad 4) Hálók kombinatorikai vonatkozásai

Ismeretes, hogy a Frankl-sejtésnek, más néven az uniózárt halmazokra vonatkozó sejtésnek megvan az eredeti sejtéssel ekvivalens hálóelméleti megfelelője. Eddig a (kevés számú) hálóelméleti megközelítés leginkább csak a hálóelméletben volt érdekes, hiszen a hálós terminológia nélkül nemigen lehetett ezeket a kombinatorika nyelvén elmondani. Hálókra támaszkodva (az eddigi legjobb eredményt javítva) kimutattuk, hogy ha az uniózárt család elég nagy az alaphalmaz méretéhez képest, akkor a Frankl-sejtés teljesül, sőt átlagoltan is teljesül [9]. [15]-ben pontosan megállapítottuk ezen módszer határait. Valamivel több mondható féligmoduláris hálók esetében a [11] cikk szerint.

[15]-ben fontos szerepet játszott az a probléma, hogy véges Boole-algebra esetén egy adott elemszámú rendezésideál össz-magassága mikor maximális. Az erre vonatkozó eredményt terjesztettük ki [20]-ban véges sok véges lánc direkt szorzatára, és azt is

kimutattuk, hogy ezen a téren sokkal tovább nem lehet menni. Érdekes következményként a számjegyösszeg sorozatok egy eltolási tulajdonsága is következett. Ez a tulajdonság a 10-es számrendszerben így szól: vegyünk k darab egymás utáni pozitív egész számot 1 és (mondjuk) 99999 (tehát egy 10-hatvány mínusz 1) között. A tekintett k szám számjegyeinek összege akkor minimális, illetve maximális, ha az első, illetve az utolsó k számot vesszük az [1 , 99999] intervallumban.

Czédli G., Huhn-A. és Schmidt T. egy régi eredménye szerint véges disztributív hálóban bármely két W-bázis (azaz gyenge bázis) azonos elemszámú. [13, 14]-ben hasonló eredményt igazoltunk CD és CDW-bázisokra. Azt is kimutattuk, hogy alkalmas értelemben a disztributivitásra valóban szükség van.

[6]-ban az imént említett W-bázisokra vonatkozó tételt alkalmaztuk egy, a kódoláselméletben vizsgált „egydimenziós" kérdés kétdimenziós változatára. A „szigetek számolását" több hasonló vizsgálat követte, közöttük [28, 29].

Ad 5) Féligmoduláris hálók

Jelentősek a féligmoduláris hálókra igazolt eredmények. G. Grätzer és E. Knapp két cikkben is foglakozott azzal a kérdéssel, hogyan lehet egy síkbeli véges féligmoduláris hálót disztributív hálóból előállítani. Eredményeiket lényegesen megjavítja a [8]-beli új, fontos struktúratétel. Eszerint minden F véges féligmoduláris háló egy alkalmas D véges disztributív háló fedésőrző egyesítéshomomorf képe. (Az ilyen homomorfizmusok magkongruenciája jól jellemezhető.) D választható olyannak is, hogy J(D) és J(F) izomorf legyen. A struktúratételből könnyen adódik, hogy a véges féligmoduláris hálók (izomorfia erejéig) éppen a véges disztributív hálók fedésőrző egyesítéshomomorf képei.

A fenti eredmény egyfajta kapcsolatot teremt a disztributív és a féligmoduláris hálók között. [21]-ben kimutattunk egy fordított irányú kapcsolatot is: minden D véges disztributív háló előáll egy olyan F véges féligmoduláris háló kongruenciahálójaként, amelyre J(F) egy- és kételemű láncok kardinális összege. A tétel nem javítható, hiszen ha J(F) egyelemű láncok kardinális összege (azaz antilánc), akkor F kongruenciahálója legfeljebb kételemű (azaz F egyszerű háló).

Grätzer G. és Kiss E. W. bizonyította 1986-ban, hogy minden véges féligmoduláris háló fedésőrző módon beágyazható egy alkalmas véges geometriai hálóba. [19]-ben sikerült ezt az eredményt a véges esetről a véges hosszúságúra kiterjeszteni.

Ad 6) További hálóelméleti eredmények

[12] teljesen elemi bizonyítást ad szabad hálók egy-két ismert tulajdonságára, a Whitman-feltételt is beleértve. [16]-ban azonosságokat felmutatva új módon igazoljuk Ralph Freeese azon ismert eredményét, hogy a síkbeli moduláris hálók varietásának kontinuum sok részvarietása van.

[23]-ban a szekcionálisan pszeudokomplementumos hálók kongruenciahálóit jellemeztük.

Egy 1-elemes S félháló főfilterein értelmezett rendezésfordító „lokális" permutációkat felhasználva S olyan algebrává tehető, amelyik [24] szerint kongruncia-disztributív és kongruencia-3-felcserélhető. Az ilyen algebrák varietásának egyetlen minimális részvarietása van, amely az ún. implikációs algebrákból származtatott S-ekből áll.

[22]-ben a szerzők a fogalomhálók ún. dobozelemeit jellemzik; a módszer algoritmust is ad a dobozelemek megkonstruálására.

[25]-ben leírjuk egy kvázirendezett (A,q) halmaz esetén a q kvázirendezést kiterjesztő olyan binér relációkat, amelyek invariánsak (A,q) endomorfizmusaira nézve.

Czédli és Szabó 1995-ben az involúciós hálók szerkezetére vonatkozó eredményük felhasználásával kimutatta, hogy Con(L) direkt négyzete és az L háló kvázirendezéseinek hálója izomorf. Ezen eredményt általánosítja [26] hálókról többségi algebrákra és azok további kísérő hálóira.

Ismert tény, hogy egy r ekvivalencia reláció segítségével definiált ún. durva halmazok egy nagyon speciális teljes Stone hálót alkotnak. Nem ismert, hogy milyen más r relációk vezetnek szintén hálóhoz. [27]-ben a szerzők kimutatják, hogy hálót, sőt disztributív de-Morgan hálót kapunk, ha r olyan kvázirendezés, hogy az r által indukált rendezett (faktor)halmazban nincs végtelen növő lánc.

A pályázat támogatásával készült,
az OTKA 49433-et feltüntető publikációk listája

Előre bocsátjuk, hogy a cikkek teljes szövege a szerzők honlapjairól érhető el:

http://www.math.u-szeged.hu/~czedli/
http://www.math.u-szeged.hu/~horvath/
http://www.uni-miskolc.hu/~matradi/
http://www.math.bme.hu/~schmidt/

[1] G. Czédli:: *2-uniform congruences in majority algebras and a closure operator*, Algebra Universalis, 57 (2007), 63-73. [2] G. Czédli, B. Seselja and A. Tepavcevic: *On the semidistributivity of elements in weak congruence lattices of algebras and groups*, Algebra Universalis 58 (2008) 349-355.

[3] G. Czédli:: *Idempotent Mal'cev conditions and 2-uniform congruences*, Algebra Universalis 59 (2008) 303-309.

[4] G. Czédli:: *Some varieties and convexities generated by fractal lattices*, Algebra Universalis, 60 (2009), 107-124.

[5] G. Czédli:: *The product of von Neumann n-frames, its characteristic, and modular fractal lattices*, Algebra Universalis, published online (February 10, 2009), DOI: 10.1007/s00012-009-2107-3, 2009.

[6] G. Czédli:: *The number of rectangular islands by means of distributive lattices*, European Journal of Combinatorics 30 (2009), 208-215.

[7] G. Czédli:: *Stronger association rules for positive attributes*, Novi Sad Journal of Mathematics 38 (2008), 103-110.

[8] G. Czédli and E.T. Schmidt: *How to derive finite semimodular lattices from distributive lattices?*, Acta Mathematica Hungarica, 121/3 (2008) 277-282.

[9] G. Czédli: *On averaging Frankl's conjecture for large union-closed sets*, Journal of Combinatorial Theory - Series A, 116 (2009), 724-729.

[10] G. Czédli: *A fixed point theorem for stronger association rules and its computational aspects*, Acta Cybernetica, to appear.

[11] G. Czédli and E. T. Schmidt: *Frankl's conjecture for large semimodular and planar semimodular lattices*, Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica 47 (2008), 47-53.

[12] G. Czédli: *A visual approach to test lattices*, Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica, to appear.

[13] G. Czédli and E. T. Schmidt: *CDW-independent subsets in distributive lattices*, Acta Sci. Math. (Szeged), to appear.

[14] G. Czédli, M. Hartmann and E.T. Schmidt: *CD-independent subsets in distributive lattices*, Publicationes Mathematicae Debrecen, 74/1-2 (2009), 127-134.

[15] G. Czédli, M. Maróti and E. T. Schmidt: *On the scope of averaging for Frankl's conjecture*, Order, to appear.

[16] G. Czédli and M. Maróti: *Two notes on the variety generated by planar modular lattices*, Order, to appear.

[17] G. Czédli: *A stronger association rule in lattices, posets and databases*, Order, submitted.

[18] G. Czédli, M. Erné, B. Seselja and A. Tepavcevic: *Characteristic triangles of closure operators with applications in general algebra*, Algebra Universalis, submitted.

[19] G. Czédli and E. T. Schmidt: *A cover-preserving embedding of semimodular lattices into geometric lattices*, Advances in Mathematics, submitted.

[20] G. Czédli and M. Maróti: *On the height of order ideals*, Mathematica Bohemica, submitted.

[21] G. Czédli and E. T. Schmidt: *Finite distributive lattices are congruence lattices of almost-geometric lattices*, Algebra Universalis, submitted.

[22] Attila Körei and SÁndor Radeleczki: *Box elements in a concept lattice*, ICFCA06 Conference Dresden, Conference Suplement, pp. 97-109. Editors: B. Ganter and L. Kwuida. Verlag. Allgemeine Wissenschaft, Drezda, 2006.

[23] I. Chajda and S. Radeleczki: *On congruences of algebras defined on sectionally pseudocomplemented lattices*, Proceedings of the 6-th International Conference on Algebra and Model Theory, Novosibirsk, August 2006. pp. 8-23., 2005.

[24] I. Chajda and S. Radeleczki: *Semilattices with sectionally antitone bijections*, Novi Sad J. Math. Vol. 35, No 1, 93 - 101, 2005.

[25] Pöschel, R. and Radeleczki, S.: *Endomorphisms of quasiorders and related lattices*, Contributions to General Algebra, 18 (2008), 113 - 128.

[26] R. Pöschel and S. Radeleczki: *Related structures with involution*, Acta Math. Hungarica, to appear.

[27] J. Järvinen, S. Radeleczki and L. Veres: *Rough sets determined by quasiorders*, Order, submitted.

[28] E. K. Horváth, Z. Németh, G. PluhÁr: *The number of triangular islands on a triangular grid*, Periodica Mathematica Hungarica, to appear.

[29] E. K. Horváth, G. HorvÁth, Z. Németh, Cs. Szabó: *The number of square islands on a rectangular sea*, Acta Sci. Math., submitted.