

## Az „Arbitrázs és árazó funkcionálok pénzügyi piacokon” c. OTKA pályázat (F 49094) zárójelentése

Kutatásaimban tőzsdei származékos termékek (például opciók) árazását vizsgáltam. A pénzügyi matematika egyik alapfeltételezése az, hogy a piacok arbitrázsmentesek; ezért létezik helyes árazó funkcionál; sőt, általában ilyenek egész sokasága, melyből ki kell választani a számunkra legmegfelelőbbet.

A választás alapjául a befektetők kockázathoz való viszonya, illetve a piaci termékek ára és hozama közt megfigyelt összefüggések szolgálhatnak. A klasszikus elmélet árazó funkcionáljai olyan valószínűségi mértékek, melyekre nézve a részvényárfolyamok martingálok. Ez az elmélet azonban idealizálja a kereskedést, figyelmen kívül hagyva a portfóliókra vonatkozó megszorításokat, a tranzakciós költségeket, valamint a likviditási problémákat.

Az elvégzett kutatómunkát az előző bekezdésben felmerült szempontok szerint csoportosítva mutatom be.

### Optimális befektetések, folytonosság, kockázatkerülés

A mikroökonómia egy befektető pénzhez való viszonyát általában egy konkáv, monoton növekvő  $U$  ún. hasznossági függvényvel írja le. A függvény értelmezési tartománya lehet  $\mathbb{R}$  (pl.  $U(x) = -e^{-x}$ ) vagy  $\mathbb{R}_+$  (például  $U(x) = x^p$ ,  $0 < p < 1$ ). Az utóbbi esetben a veszteséges pozíciókat eleve kizárjuk vizsgálatainkból, ami általában könnyebb matematikához vezet.

Adott  $U$  hasznossági függvényből és adott részvényár-dinamikából többféle árazó mérték származtatható: a hasznosság-semleges ár, a minimális (általánosított) entrópia mérték vagy a Davis-féle ún. „helyes” ár. Itt most nem bocsátkozom definíciókba; elég megjegyezni, hogy ezen árfogalmak mindegyike pénzügyi-közgazdaságtani vagy információelméleti megfontolások alapján került bevezetésre.

Optimális befektetések létezését igazoltuk az eddigi legenyhébb feltételek mellett diszkrét időparaméterű modellekben a [28] és [29] cikkekben a  $\text{dom}(U) = \mathbb{R}$  ill. a  $\text{dom}(U) = \mathbb{R}_+$  esetben társszerzőmmel, Lukasz Stettnerrel. A [9] cikkben egy olyan algoritmust adtunk meg, amely portfóliónk növekedési rátáját optimalizálja hosszú távon, tranzakciós költségek mellett.

Ezután azt vizsgáltuk, vajon folytonosan függ-e az optimális befektetés az adott befektető hasznossági függvényétől. Matematikailag megfogalmazva: ha adva vannak a részvényárfolyamok és az  $U_n$  függvény sorozat tart  $U$ -hoz (pontonkénti konvergencia), akkor a kapcsolódó optimális befektetések konvergálnak-e (1 valószínűséggel) ?

Az első ilyen irányú eredményt [13] érte el a közismert Black-Scholes modellben, ahol az árfolyamat geometriai Brown-mozgást követ. Az  $U_n$  függvények értelmezési tartományát  $\mathbb{R}_+$ -nak feltételezték.

Kolléganőmmel, Laurence Carassus-sal diszkrét időparaméterű folyamatok egy széles osztályában és  $\mathbb{R}$ -en értelmezett hasznossági függvényekre igazoltuk ezt az eredményt. Beláttuk azt is, hogy a befektetők által számolt árak (hasznosság-semleges ill. Davis ár) is konvergálnak, sőt, a Davis-ár ugyanolyan gyorsan, ahogyan az  $U_n$  tart  $U$ -hoz (a pontos definíciót itt mellőzöm). Az eredmény gyakorlati tartalma az, hogy ha pontatlanul határozzuk is meg  $U$ -t, és utána ezzel a közelítéssel számolunk, a kapott árak hibája arányos a kezdeti becslés hibájával. Más szóval, a hasznossági függvényeken alapuló árazás robusztus az  $U$  perturbációira nézve.

A problémát azóta többen tárgyalták folytonos ill. diszkrét idejű modellekben (lásd [22], [21], [17], [19] és [20]), hivatkozva a mi eredményünkre is. Ezidáig a miénk az egyetlen cikk, amely a  $\text{dom}(U) = \mathbb{R}$  esetet tárgyalja, a többi közlemény mind a pozitív tengelyen definiált hasznossági függvényekkel foglalkozik.

A befektető hasznossági függvényétől független az ún. szintetizálási költség (angolul „superhedging/superreplication price”). Ez a legkisebb kezdeti tőke amiből 1 valószínűséggel (azaz kockázatmentesen) biztosítható az adott származékos termék (opciós szerződés) kifizetése. A befektetők szubjektív kockázatkerülését az  $r(x) = -U''(x)/U'(x)$  függvénnyel szokás jellemezni. Természetesen fölmerül a kérdés: vajon ha ez a függvény (pontonként) végtelenhez tart, abból következik-e, hogy egy adott opció hasznosság-semleges ára a szintetizálási költséghez tart?

A kezdeti eredmények mind az exponenciális függvényekre születtek, azaz ha  $U_\alpha(x) = -e^{-\alpha x}$ . Ilyenkor  $r_\alpha(x) = \alpha$  konstans. Speciális modellosztályok vizsgálata után ([31]) a [8] cikkben belátták, hogy  $\alpha \rightarrow \infty$  esetén a hasznosság-semleges árak tartanak a szintetizálási költséghez midőn a részvényárak általános (lokálisan korlátos) szemimartingál folyamatot követnek (és nincs arbitrázs).

A [1] értekezésben hasznossági függvények néhány más osztályára is kiterjesztették ezt az eredményt. Továbbra is nyitott kérdés volt azonban, mi történik általános  $U_n$  függvényt sorozat esetén ha  $r_n(x) \rightarrow \infty$  minden  $x$ -re.

Először a [2] cikkben sikerült egy ilyen eredményt igazolnunk a  $\text{dom}(U_n) = \mathbb{R}_+$  esetre, diszkrét időparaméterű piacmodellek egy nagy osztályára. A  $\text{dom}(U_n) = \mathbb{R}$  eset jóval bonyolultabbnak bizonyult, ezt a [4] közleményben sikerült belátnunk, valamint azt is bizonyítottuk, hogy az optimális stratégiák sorozatának egyik (alkalmas módon definiált) torlódási pontja szintetizálja az opciót (azaz megfelelően kereskedve portfóliónk értéke 1 valószínűséggel legalább az opció értéke lesz). Hasonló eredményeket korábban csak egy lépéses modellekben ([6]) illetve véges valószínűségi mezőkön ([10]) értek el. Konvergencia általában nem remélhető (lásd [6] ellenpéldáját).

A [4] és [3] cikkek részben hosszadalmas direkt becsléseken alapulnak. Felhasználva a [28] cikk eredményeit, belátjuk, hogy az adott feltételek mellett a feladat helyesen kitűzött (azaz a maximális elérhető hasznosság véges), valamint

az optimális stratégiák ( $n$ -ben egyenletesen) korlátosak. A [4] és [2] közleményekben egy másik fontos felhasznált tény a kereskedéssel elérhető portfólió értékek halmazának zártsága (valószínűségi változók egy alkalmas terében); ez a funkcionálanalízis technikáinak egyik alapvető alkalmazása a pénzügyi matematikában. A [3] közleményben lényeges szerepet játszik az implicit függvény tétel egy „egyenletes” változata.

Teljesen más módszerrel sikerült [4] eredményét általános (lokálisan korlátos) szemimartingál árfolyamatok esetére kiterjeszteni, a készülő [5] cikkben.

### **Arbitrázs nagy piacokon**

Az úttörő [30] cikkben a szerző olyan piacokat tekintett, melyeken „nagyon sok” (matematikailag megszámlálhatóan végtelen számú) termék van jelen. A gyakorlati életben például a különböző lejáratú kötvények sokasága modellezhető így. A [30] cikk fő eredménye szerint a piac arbitrázsmentességéből következik, hogy az egyes termékek hozama közel lineáris függvénye a tőzsdeindexszel való korrelációjuknak.

Ez az észrevétel a mikroökonómia egyik sarokkövévé vált, amivel rengeteg közgazdaságtani cikk foglalkozott. A matematikai elméletet Yu. M. Kabanov és D. O. Kramkov új szempontok szerint tárgyalta, lásd a [14] cikket (illetve annak irodalomjegyzékét). A [30] konkrét modelljét részletesen vizsgáltam a [23] és [24] cikkeimben. Sikerült a régebbi, [30]-ban szereplő arbitrázs-fogalom és a modern pénzügyi matematikában használt definíció ekvivalenciáját belátnom, valamint martingálmérték létezését igazolnom, lásd még a [25] áttekintő cikket is.

A Ross-féle modell hátránya, hogy igen szegényes kovariancia-struktúrát feltételez a piacról: minden egyes termék korrelált a tőzsdeindexszel (amit 0. terméként szokás szerepeltetni), de máskülönben saját, független véletlen forrás hajtja meg a dinamikáját. (Kicsit precízebben: az  $i$ . termék hozama a 0. termék hozamának és  $\varepsilon_i$ -nek lineáris kombinációja, ahol  $\varepsilon_i$ -k független valószínűségi változók. A [30]-beli modell megenged véges sok faktort is, azaz több „tőzsdeindex”-et, de ez még mindig csak egy nagyon speciális modellosztályt ölel fel és a gyakorlatban faktoranalízist tesz szükségessé.)

Tényleges kötvénypiacok vizsgálatához elengedhetetlennek tűnik az általános kovariancia-struktúra vizsgálata. A [27] cikkem első lépésként olyan nagy piacokat vizsgál, ahol a termékek hozamai lognormális eloszlásúak tetszőleges kovarianciamátrixszal. Feltételt adtam a piac paramétereire (hozamok és korrelációk), mely elégséges (és plusz feltevések mellett szükséges is) ekvivalens martingálmérték (azaz árazó funkcionál) létezésére ebben a modellben. A feltétel empirikusan tesztelhető valódi hozam adatokon, faktoranalízist nem igényel és általánosítja a [30] cikk jól ismert összefüggéseit.

A tétel egyik iránya véges dimenziós mértékcsere és egy kompaktsági lemmán alapul, a másik irány pedig a Parseval-egyenlőtlenségen.

## Arbitrázs és árazás az idealizált modelleken túl

A szabványos modellek figyelmen kívül hagyják a piac *súrlódásait*, azaz a különböző likviditási gondokat és a tranzakciós költségeket. A valóságot pontosabban leíró modellek vizsgálatával is foglalkoztam. A szabványos, súrlódásmentes modellekben (lásd [18]) az optimális befektetésekkel kapcsolatos problémák kulcsa gyakran nem a dinamikus programozás elve, hanem az ún. duális feladat vizsgálata. A kérdés most az, mik a duális objektumok (azaz árazó funkcionálok) tranzakciós költségek megléte esetén ?

Diszkrét idejű modellekben kielégítő eredményeket értek el [16], [15] és [32]: az arbitrázsmentesség arányos tranzakció költségek esetén (pl. a bróker részese-dése mindig 1%) ekvivalens az ún. konzisztens árazási rendszerek létezésével (a [32] cikk által bevezetett terminológiával élve). A [15] cikk fő eredményére új bizonyítási módszert javasoltam [26]-ban.

Folytonos idejű modelleket vizsgáltunk arányos tranzakciós költségekkel kol-légáimmal, Paolo Guasonival és Walter Schachermayerrel együtt. Sikeresült duális változókat (=árazó funkcionálok) konstruálnunk a [11] cikkben egy széles folya-matosztályra, mely tartalmazza például a geometriai frakcionális Brown-mozgást is. Eredményünk jelentős visszhangra talált, a [7] cikken kívül már legalább 3 kéziratban közlemény hivatkozik rá. Új modellekre is kiterjesztettük a diffúziós árfolyamatokra jól ismert állítást, hogy tranzakciós költségek esetén egy európai vételi opció csak triviális kereskedéssel szintetizálható (azaz meg kell venni az adott részvényt a kereskedési periódus elején), lásd pl. [33]. További ilyen irányú vizsgálatainkat tartalmazza a [12] cikk.

Mind [11], mind [12] magja egy direkt rekurzív konstrukció. Előnye, hogy igen általánosan működik, viszont nem szolgáltat analitikusan kezelhető folya-matokat (pl. sztochasztikus differenciálegyenletet).

A fentebb ismertetett programot az OTKA 2005-től 2008-ig támogatta. E ku-tatás gyümölcsei a [2], [3], [4], [9], [11], [12], [26], [27], [28], [29] cikkek, vala-mint a [5] még kéziratban lévő közlemény. Az OTKA támogatás lehetővé tette, hogy számos külföldi konferencián ismertessem ezeket az eredményeket és kon-zultáljak szakterületem külföldi művelőivel. Szeretném ez úton is kifejezni hálás köszönetemet.

Budapest, 2009. február 10.

Rásonyi Miklós

## Hivatkozások

- [1] B. Bouchard. *Stochastic control and applications in finance*. PhD thesis, Université Paris 9, 2000.

- [2] L. Carassus, M. Rásonyi: Convergence of utility indifference prices to the superreplication price. *Mathematical Methods of Operations Research*, vol. 64, 145–154, 2006.
- [3] L. Carassus, M. Rásonyi: Optimal strategies and utility-based price converge when agents' preferences do. *Mathematics of Operations Research*, vol. 32, 102–117, 2007.
- [4] L. Carassus, M. Rásonyi: Convergence of utility indifference prices to the superreplication price: the whole real line case. *Acta Applicandae Mathematicae*, vol. 96, 119–135, 2007.
- [5] L. Carassus, M. Rásonyi: Risk-averse asymptotics for reservation prices. *Manuscript*, 2009.
- [6] Cheridito, P. and Summer, Ch. Utility-maximizing strategies under increasing risk aversion. *Finance Stoch.*, 10, 147–158, 2006.
- [7] A. Cherny: Brownian moving averages have conditional full support. *Ann. Appl. Probab.*, **18**, 1825–1830, 2008.
- [8] F. Delbaen, P. Grandits, T. Rheinländer, D. Samperi, M. Schweizer, Ch. Stricker Exponential hedging and entropic penalties. *Math. Finance*, **12**, 99–123, 2002.
- [9] L. Gerencsér, M. Rásonyi, Cs. Szepesvári, Zs. Vágó Logoptimal currency portfolios and control Lyapunov exponents. *Proceedings of the 44th Conference on Decision and Control, 12-15 December, Sevilla, 1765–1769*, 2005.
- [10] Grandits, P. and Summer, Ch. Risk-averse asymptotics and the optional decomposition. *Theory Probab. Appl.*, **51**, 325–334, 2007.
- [11] P. Guasoni, M. Rásonyi and W. Schachermayer: Consistent price systems and face-lifting pricing under transaction costs, *Annals of Applied Probability*, **18**, 491–520, 2008.
- [12] P. Guasoni, M. Rásonyi and W. Schachermayer: The fundamental theorem of asset pricing for continuous processes under small transaction costs. *Forthcoming in Annals of Finance*, 2009.
- [13] E. Jouini and C. Napp, Convergence of utility functions and convergence of optimal strategies, *Finance Stoch.* **8**, 133-144, 2004.
- [14] Yu. M. Kabanov, D. O. Kramkov, Asymptotic arbitrage in large financial markets. *Finance Stoch.* **2**, 143–172, 1998.

- [15] Kabanov, Yu. M. , Rásonyi, M. and Stricker, Ch. No-arbitrage criteria for financial markets with efficient friction. *Finance Stoch.*, **6**, 371–382, 2002.
- [16] Kabanov, Yu. M. and Stricker, Ch. The Harrison-Pliska arbitrage pricing theorem under transaction costs. *J. Math. Econom.*, **35**, 185–196, 2001.
- [17] C. Kardaras, G. Žitković. Stability of the utility maximization problem with random endowment in incomplete markets. *Preprint*. 2007.  
<http://www.ma.utexas.edu/users/gordanz/publications/index.html>
- [18] D. Kramkov, W. Schachermayer. The condition on the Asymptotic Elasticity of Utility Functions and Optimal Investment in Incomplete Markets. *Annals of Applied Probability*, **9**, 904–950, 1999.
- [19] R. Kucharski. Convergence of optimal strategies in a discrete time market with finite horizon. *Applicationes Mathematicae*, **33**, 85–93, 2006.
- [20] R. Kucharski. Convergence of optimal strategies under proportional transaction costs. *Advances in mathematics of finance*. Ed. Lukasz Stettner, Banach Center Publications **83**, 183–193, 2008.
- [21] K. Larsen. Continuity of utility-maximization with respect to preferences. *To appear in Mathematical Finance*. 2009.  
<http://www.andrew.cmu.edu/user/kasperl/>
- [22] K. Larsen, G. Žitković: Stability of utility-maximization in incomplete markets. *Stochastic Processes and their Applications*, **117**, 1642–1662, 2007.
- [23] M. Rásonyi: Equivalent martingale measures for large financial markets in discrete time. *Mathematical Methods of Operations Research*, vol. 58, 401–415, 2003.
- [24] M. Rásonyi: Arbitrage pricing theory and risk-neutral measures. *Decisions in Economics and Finance*, vol. 27, 109–123, 2004.
- [25] M. Rásonyi: Arbitrázs nagy pénzügyi piacokon. *SZIGMA*, vol. 35, 123–130, 2004.
- [26] M. Rásonyi: New methods in the arbitrage theory of financial markets with transaction costs, *Séminaire de Probabilités XLI*, Lecture Notes in Mathematics **1934**, 455–462, Springer, Berlin, 2008.
- [27] M. Rásonyi: A note on arbitrage in term structure. *Decisions in Economics and Finance*, **31**, 73–79, 2008.

- [28] M. Rásonyi, L. Stettner: On utility maximization in discrete-time market models. *Annals of Applied Probability*, vol. 15, 1367–1395, 2005.
- [29] L. Stettner, M. Rásonyi: On the existence of optimal portfolios for the utility maximization problem in discrete time financial market models. In: "From stochastic calculus to mathematical finance- the Shiryaev Festschrift", Ed. Yu. M. Kabanov, R. Liptser, J. Stoyanov, 589–608, Springer, 2006.
- [30] S. A. Ross: The arbitrage theory of asset pricing. *Journal of Economic Theory*, **13**, 341–360, 1976.
- [31] R. Rouge, N. El Karoui. Pricing via utility maximization and entropy. *Math. Finance*, **10**, 259-276, 2000.
- [32] Schachermayer, W. The fundamental theorem of asset pricing under proportional transaction costs in finite discrete time. *Math. Finance*, **14**, 19–48, 2004.
- [33] Soner, H. M., Shreve, S. E., and Cvitanić, J. There is no nontrivial hedging portfolio for option pricing with transaction costs. *Ann. Appl. Probab.* **5**, 2, 327–355, 1995.