

Zárójelentés az  
Egyenlőtlenségek az algebrában és az analízisben  
című, T047373 számú OTKA pályázatról

Témavezető: Dr. Losonczi László egyetemi tanár

Kutatás időtartama: 2004.01.01–2007.12.31

A kutatásban 5 fő vett részt. A kutatócsoport tagjai:

dr. Bessenyei Mihály

dr. Czinder Péter

dr. Daróczy Zoltán

dr. Lakatos Pirooska

dr. Losonczi László

A pályázat keretében, és támogatásával munkatársaink 2004–2007 folyamán 18 cikket publikáltak nemzetközi referált folyóiratban, Czinder Péter PhD disszertációt írt és sikeresen védett (Páles Zsolt vezetése mellett), 4 cikküket közlésre elfogadták, 43 előadást tartottak hazai vagy külföldi konferencián, egyetemen, melyekből 32-n való részvételt a jelen OTKA pályázat részben, vagy teljesen támogatta.

A csoport munkatársai aktívan közreműködtek a "Conference on Inequalities and Applications '07" (Noszvaj, De La Motte Kastély, 2007. szept. 9–15, lásd <http://riesz.math.klte.hu/cia07/>) nemzetközi konferencia szervezésében és lebonyolításában, és a Birkhäuser Verlag kiadásában megjelenő konferenciakötet publikálására való előkészítésében.

Támogattuk előadók meghívását a Debreceni Egyetem Matematikai Intézetének szemináriumára, többek között az

Pham Ngoc Anh, tudományos főmunkatárs, Rényi Alfréd Matematikai Kutató Intézet, "Newton approximációja és immediate bővítések." DE., Matematikai Intézet, 2004 szeptember 23.

Schneider Csaba, tudományos főmunkatárs, SZTAKI, "Érdekes részcsoportok primitív koszorúsorozatokban." DE., Matematikai Intézet, 2004 november 4.

előadásokat.

Lakatos Pirooska és Losonczi László részt vettek a "Magyar algebristák országos találkozója" rendezvény szervezésében (Sikfőkút, Debreceni Egyetem Soó Rezső kutatóháza, 2006. okt., 2007. okt.).

A kutatási témában 2004.01.01–2007.12.31 között végzett munkát a munkatervben szereplő területek szerinti bontásban ismertetjük. A beszámolóban szereplő hivatkozások a jelentésben szereplő publikációs listára vonatkoznak.

### **3 fő területen végeztünk kutatásokat.**

#### **1. Középtértékekre vonatkozó egyenlőtlenségek és függvényegyenletek.**

Czinder és Páles [6], [7] és Czinder [9] cikkeikben a Gini és Stolarsky féle homogén közepek összehasonlításával foglalkoznak. [6]-ban a konvex függvényekre vonatkozó klasszikus Hermite-Hadamard egyenlőtlenség egy pontra nézve szimmetrikus függvényekre való kiterjesztését használják a szerzők arra, hogy (kétfváltozós) Gini és Stolarsky közepeket két oldalról becsüljenek azonos paraméterekkel bíró Gini és Stolarsky közepekkel. A [7] cikkben egy újabb kétoldali becslés szerepel a Gini közepekre, valamint a Gini közepek aszimptotikus tulajdonságai segítségével a közepek összehasonlítására egy új bizonyítás. A [9] cikkben a Gini és Stolarsky féle homogén

közepék összehasonlítását vizsgálják a szerzők, szükséges feltételeket adnak az összehasonlításra a paraméterek segítségével. Ezek a feltételek bizonyos speciális esetekben elegendők is. Czinder Péter [5] disszertációjában összefoglalja a Gini-Gini, Stolarsky- Stolarsky, és Gini- Stolarsky féle homogén közepék összehasonlításának eddigi eredményeit és értékes új eredményekkel gazdagítja ezt a területet. [18]-ban Losonczi az Elezovic és Pecaric által bevezetett kétváltozós integrálközepet általánosítja (kettőnél) több változóra, és jellemzi ezen középértékek szub- és szuperadditivitását. Daróczy-Maksa-Páles [13] és Daróczy [14] az

$$(1) \quad f(M_1(x, y)) + f(M_2(x, y)) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in I)$$

és

$$(2) \quad 2f(M_3(x, y)) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in I)$$

egyenletek kapcsolatát vizsgálja, ahol  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ismeretlen függvény,  $M_1, M_2$  súlyozott kváziaritmetikai középértékek,  $M_3$  az  $M_1$  és  $M_2$  közepék Gauss kompozíciója. Ismeretes, hogy (2) minden megoldása megoldása (1)-nek is. Jellemzik azokat az  $M_1, M_2$  és  $M_3$  közepet melyekre (1) minden megoldása megoldása (2)-nek. Daróczy társszerzőkkel írt [15] cikkében az

$$f(px + (1-p)y) + f((1-p)x + py) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in I)$$

egyenletet vizsgálja, ahol  $0 < p < 1$ , és  $f$  egy  $I$  intervallumon definiált ismeretlen függvény. A  $p$  paraméter algebrai tulajdonságai jellemzik azt, hogy ez az egyenlet ekvivalens-e a Jensen egyenlettel, vagy sem.

A közelmúltban Páles Zsolt észrevette, hogy középértékek egy széles osztálya egységesen kezelhető, ha a Cauchy középérték definícióját úgy általánosítjuk, hogy benne a Lebesgue mértéket egy tetszőleges valószínűségi mértékre cseréljük. Ez esetben ugyan nem várható az összehasonlítási probléma teljes megoldása, de Losonczi és Páles szükséges feltételeket és elegendő feltételeket találtak az összehasonlításra. Ezek további tanulmányozása már egy újabb pályázat keretében folyik. Losonczi a [19] cikkben megoldja a Cauchy, és súlyfüggvénnyel súlyozott kétváltozós közepék egyenlőségproblémáját, egységesen kezelve e közepet. A [21], [23] cikkekben a kétváltozós homogén közepék meghatározása található meg: a nem-szimmetrikus esetben [21], egy mértéktől és két függvénytől függő homogén közepet erős differenciálhatósági és egy (a mértékre vonatkozó) momentumfeltétel mellett sikerült az összes homogén közép meghatározása, szimmetrikus közepet esetén [23], xcsak a súlyfüggvénnyel súlyozott és a Cauchy közepet sikerült ugyanezt megtenni.

## 2. Reciprok és szelfinverzív polinomok zérushelyeinek eloszlása.

Lakatos és Losonczi a [16] cikkben (az együtthatóiban lineáris) elegendő feltételt találtak arra, hogy egy szelfinverzív polinom összes zérushelye az egységkörvonalon legyen, továbbá megadták a zérushelyeket elválasztó pontokat és pontosan meghatározták azt, hogy többszörös zérushelyek milyen esetekben lépnek fel. Korábbi hasonló típusú eredmények páratlan fokú polinomokra való élesítését tárgyalja Losonczi és Schinzel [22] publikációja. Lakatos és Losonczi a [17]-ben azt igazolják, hogy ha

$$P_m(z) = \sum_{k=0}^m A_k z^k \quad (z \in \mathbb{C})$$

valós együtthatós reciprok polinom, pozitív főegyütthatóval, melyre

$$(3) \quad |A_m + B| \geq \sum_{k=1}^{m-1} |A_k + B - A_m|$$

teljesül, valamely  $B$ -vel, úgy, hogy  $A_m B \geq 0$ ,  $|A_m| \geq |B|$ , akkor  $P_m$  zérushelyei mind az egységkörvonalon vannak, és az elhelyezkedésük is leírható. Ebből következik, hogy  $P_m$  és a  $z^{2m} - 1$  polinom zérushelyei kölcsönösen elválasztják egymást (circular interlacing tulajdonság).

Lakatos a közlésre elfogadott [2] cikkében egy új módszert talált bizonyos speciális gráfok által meghatározott Coxeter transzformáció spektrálsugarának becslésére, és alkalmazta ezt általánosított csillag gráfokra. Losonczi a [20] cikkben jellemzi azokat a reciprok polinomokat melyek

zérushelyei az egységkörvonalon vannak, majd ezen jellemzés segítségével e polinomok együtthatóira egyenlőtlenségeket bizonyít. Lakatos és Losonczi szelfinverzív polinomok együtthatóira egy újabb, a (3) feltételt speciális esetként tartalmazó elegendő feltételt talált arra, hogy a polinom összes zérushelye az egységkörvonalon legyen, sőt sikerült a zérushelyek elhelyezkedését is leírni. Az ezzel kapcsolatos cikk közlésre be van nyújtva.

### 3. Klasszikus egyenlőtlenségek .

Czinder [8] cikkében a klasszikus Hermite-Hadamard (H-H) egyenlőtlenség két lehetséges kiterjesztését fejti ki. Ezek alkalmazásaként a Gini- és Stolarsky-közepre nyerhetők érdekes egyenlőtlenségek. Bessenyei részben Páles Zsolttal közösen az [1], [2], [3], [4] cikkekben H-H típusú egyenlőtlenségeket vizsgál: az első cikkben harmadrendű konvex függvényekre, [2], [3]-ban konvex függvények különböző általánosításainak és a H-H egyenlőtlenségek kapcsolatát tárgyalják, míg [4] szimplexeken vizsgálja a H-H egyenlőtlenséget. Daróczy és Páles [12]-ben a Jensen és Wright konvexitást általánosítva bevezetik az  $(M; p, q)$ -konvexitást, és megmutatják, hogy folytonossági feltevések mellett ez az új konvexitási fogalom ekvivalens a konvexitással.

#### OTKA támogatással megjelent publikációk:

(a ♣ -kel jelölt publikációkban a jelen OTKA száma nincs feltüntetve.)

[1] M. Bessenyei, Hermite-Hadamard-type inequalities for generalized 3-convex functions, *Publ. Math. Debrecen* 65 (2004), 223-232.

[2] ♣ M. Bessenyei and Zs. Páles, Hermite-Hadamard inequalities for generalized convex functions, *Aequationes Math.*, 69 (2005), 32-40..

[3] M. Bessenyei and Zs. Páles, Characterization of convexity via Hadamard's inequality, *Math. Inequal. Appl.*, 9 (2006), 53-62.

[4.] M. Bessenyei, The Hermite-Hadamard inequality on simplices, *Amer. Math. Monthly*, 115 (2008), 339-345.

[5] ♣ P. Czinder, Egyenlőtlenségek Gini és Stolarsky közepekre. PhD-értekezés, Matematikai Intézet, Debreceni Egyetem, Debrecen, 2005.

[6] P. Czinder and Zs. Páles, An extension of the Hermite-Hadamard inequality and an application for the Gini and Stolarsky means, *J. Inequal. Pure Appl. Math.* 5 (2004), no.2, Article 42, pp. 8 (electronic).

[7] P. Czinder and Zs. Páles, Local monotonicity properties of two variable Gini means and the comparison theorem revisited, *J. Math. Anal. Appl.* 301 (2005), 427-438.

[8] P. Czinder, A weighted Hermite-Hadamard-type inequality for convex-concave symmetric functions, *Publ. Math. Debrecen* 68 (2006), 215-224.

[9] ♣ P. Czinder, Zs. Páles, Some comparison inequalities for Gini and Stolarsky means, *Math. Inequal. Appl.* 9 (2006), 607-616.

[10] Z. Daróczy, Quasi-arithmetic elements of a given class of means, *Publ.Math. Debrecen* 65 (2004), 317-322.

[11] ♣ Z. Daróczy and G. Hajdu, On linear combinations of weighted quasi-arithmetic means, *Aequationes Math.*, 69 (2005), 58-67.

[12] Z. Daróczy and Zs. Páles, Generalized convexity and comparison of mean values, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 71 (2005), 105-116.

[13] ♣ Z. Daróczy, Gy. Maksa, and Zs. Páles, Functional equations involving means and their Gauss composition, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 134 (2006), 521-530.

[14] Z. Daróczy, Functional equations involving weighted quasi-arithmetic means and their Gauss composition, *Ann. Univ. Sci. Budapest Sect. Comput.* 7 (2007), 45-55.

- [15] Z. Daróczy, K. Lajkó, L. Lovas, Gy. Maksa, Zs. Páles, Functional equations involving means, *Acta Math. Hungar.* 116 (2007), :79-87.
- [16] P. Lakatos and L. Losonczi, Self-inversive polynomials whose zeros are on the unit circle, *Publ.Math. Debrecen* 65 (2004), 409-420.
- [17] P. Lakatos, L. Losonczi, Circular interlacing with reciprocal polynomials, *Math. Inequal. Appl.* 10 (2007), 761-769.
- [18] L. Losonczi, Sub- and superadditive integral means, *J. Math. Anal. Appl.*, 307 (2005), 444-454.
- [19] L. Losonczi, Equality of two variable means revisited, *Aequationes Math.* 71 (2006), 228-245.
- [20] L. Losonczi, On reciprocal polynomials with zeros of modulus one, *Math. Inequal. Appl.* 9 (2006), 289-298.
- [21] L. Losonczi, Homogeneous non-symmetric means of two variables, *Demonstratio Math.* 4 (2007), 169-180.
- [22] L. Losonczi, A. Schinzel, Self-inversive polynomials of odd degree, *Ramanujan J.* 14 (2007), 305-320.
- [23] L. Losonczi, Homogeneous symmetric means of two variables, *Aequationes Math.* 74 (2007), 262-281.

### Közlésre elfogadott cikkek

- [1] M. Bessenyei and B. Nagy, Figural Numbers as Sequences with Finite Differences, in: *Finite Differences* (szerkesztik: Nikos E. Mastorakis, Olga Martin).
- [2] P. Lakatos, Spectral properties of Coxeter transformation, *The Southeast Asian Bulletin of Mathematics*.
- [3] L. Losonczi, Szelfinverzív polinomok zérushelyeiről, *MTA Közlemények*.
- [4] L. Losonczi, Homogén középértékek, *MTA Közlemények*.

### Előadások 2004-2007

(a ♠ -kel jelölt konferenciákon való részvételt részben vagy teljesen a jelen OTKA támogatta.)

- [1] M. Bessenyei, Hermite-Hadamard inequalities for generalized 3-convex functions, *The 4th Debrecen-Katowice Winter Seminar, Mátraháza, 2004 február 4-7.*
- [2] M. Bessenyei, Hermite-Hadamard inequalities for generalized convex functions, *Seminar talk, University of Bielsko-Biala, Department of Mathematics, Poland, 2004 március 31.*
- [3]♠ M. Bessenyei, Hermite-Hadamard inequalities for generalized convex functions, *The 42nd International Symposium on Functional Equations, Opava, Czech Republic, 2004 június 20-27.*
- [4] M. Bessenyei, Hermite-Hadamard típusú egyenlőtlenségek általánosított konvex függvényekre, *MTA, Budapest, 2004 május 12.*
- [5] M. Bessenyei. Characterizations of convexity via Hadamard's inequality, *5th Katowice–Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Bedlewo, Lengyelország, 2005. február 2–5.*
- [6] ♠ M. Bessenyei. Characterizations of convexity via Hadamard's inequality, *43rd International Symposium on Functional Equations, Batz-sur-Mer, Franciaország, 2005. május 15–21.*
- [7] ♠ M. Bessenyei. Hermite-Hadamard type inequalities for generalized convex functions, *8th Symposium on Generalized Convexity and Generalized Monotonicity, Varese, Olaszország, 2005. június 4–8.*
- [8] ♠ M. Bessenyei, Hadamard's inequality on simplices, *The 44th International Symposium on Functional Equations, Louisville, USA, 2006. május 14-20.*

- [9] M. Bessenyei, Hadamard's inequality on simplices, 6th Debrecen-Katowice Winter Seminar, Berekfürdő, 2006. február 1-4.
- [10] M. Bessenyei, Some geometric properties of Beckenbach structures with applications on Hermite-Hadamard type inequalities, The 7. Katowice-Debrecen Winter Seminar, Bedlewo (Poland), January 31-February 3, 2007.
- [11] ♠ M. Bessenyei, Hermite-Hadamard-type inequalities for Beckenbach-convex functions, The 45. International Symposium on Functional Equations, Bielsko-Biala (Poland), June 24-July 1, 2007.
- [12] ♠ M. Bessenyei, Hermite-Hadamard-type inequalities for Beckenbach-convex functions, Conference on Inequalities and Applications, Noszvaj (Hungary), September 9-15, 2007.
- [13] ♠ P. Czinder, An extension of the Hermite-Hadamard inequality and an application for the Gini and Stolarsky means, The 4th Debrecen-Katowice Winter Seminar, Mátraháza, 2004 február 4-7.
- [14] Z. Daróczy, Quasi-arithmetic elements of a given class of means, The 42nd International Symposium on Functional Equations, Opava, Czech Republic, 2004 június 20-27.
- [15] Z. Daróczy, Remarks and problems on functional equations, 5th Katowice-Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Bedlewo, Lengyelország, 2005. február 2-5.
- [16] ♠ Z. Daróczy, Functional equations involving means, The 44nd International Symposium on Functional Equations, Louisville, USA, 2006. május 14-20. (közös eredmény Lajkó, K., Lovas L., Maksa Gy., Páles Zs.-tal)
- [17] Z. Daróczy, On the equality of means, 6th Debrecen-Katowice Winter Seminar, Berekfürdő, 2006. február 1-4. (közös eredmény Páles Zs.-tal)
- [18] ♠ Z. Daróczy, On a family of functional equations with parameters, ISFE 45, Bialsko-Biala, Poland, 2007. jul. 24-30.
- [19] ♠ Z. Daróczy, A characterization of nonconvexity and its applications, Conference on Inequalities and Applications '07, Noszvaj, De La Motte Castle, Hungary, 2007. szept. 9-15. (közös eredmény Páles Zs.-tal)
- [20] ♠ P. Lakatos, Spectral properties of Coxeter transformation, Special session on Linear Algebra at the AMS Meeting in Athens, Ohio, USA, 2004 március 26-27. ; Abstracts. p. 134.
- [21] ♠ P. Lakatos, On a new construction of PV numbers, Number Theory Seminar at the Carleton University, Ottawa, Canada, 2004 március 31.
- [22] ♠ P. Lakatos, Spectral radii of Coxeter transformation of generalized stars, ICRA XI. Patzcuaro, Querentaro, Mexico, 2004 Aug. 10-21.
- [23] ♠ P. Lakatos. Zeros of reciprocal polynomials, Seminar talk at the Simon Frazer University, Vancouver, 2005. március 7.
- [24] ♠ P. Lakatos. Zeros of reciprocal polynomials, Number theory Seminar, Carleton University, Ottawa 2005. március 16.
- [25] ♠ P. Lakatos. On zeros of selfinversive and reciprocal polynomials, 5th International Algebraic Conference in Ukraine, Odessa, 2005. július 20-27.
- [26] ♠ P. Lakatos, Coxeter polynomials and their applications, Carleton University, Algebra Seminar talk on January 19, 2006.
- [27] ♠ P. Lakatos, Spectral properties of Coxeter transformation, International Conference on Mathematics, July 25-27, 2006, Ulaanbaatar, Mongolia.
- [28] ♠ P. Lakatos, Circular interlacing with reciprocal polynomials, 6th Joint Conference on Mathematics and Computer Science, Pécs, 2006. július 12-15. (közös eredmény Losonczy, L-val)
- [30] ♠ P. Lakatos, A Coxeter transzformáció spektruma, Salem és PV számok. Rényi Alfréd Matematikai Kutató Intézet, 2007 március 12

- [31] ♠ P. Lakatos, Bounds for the spectral radius of Coxeter transformation, Conference "Algebras, Representations and Applications", Sao Paulo, Brazil, August 26th - 31st, 2007.
- [32] ♠ L. Losonczi, Szelfinverzív polinomok zérushelyeiről, MTA, Budapest, 2004 május 12.
- [33] ♠ L. Losonczi, On the zeros of some self-inversive polynomials of odd degree, 5th Joint Conference on Mathematics and Computer Science, Debrecen, 2004 június 9-12. (közös eredmény A. Schinzel-lel)
- [34] ♠ L. Losonczi, Equality of two variable means revisited, The 42nd International Symposium on Functional Equations, Opava, Czech Republic, 2004 június 20-27.
- [35] ♠ L. Losonczi, Homogeneity of two variable means, 43rd International Symposium on Functional Equations, Batz-sur-Mer, Franciaország, 2005. május 15-21.
- [36] ♠ L. Losonczi, Conditional convexity and its applications, 8th Symposium on Generalized Convexity and Generalized Monotonicity, Varese, Olaszország, 2005. június 4-8.
- [37] L. Losonczi, Inequalities for two-variable means depending on a measure, 6th Debrecen-Katowice Winter Seminar, Berekfürdő, 2006. február 1-4.
- [38] ♠ Losonczi, L., Homogén középértékek, MTA, Tud. ülészak, Budapest, 2006 május 8.
- [39] ♠ L. Losonczi, Comparison and subadditivity in a class of means. The 44nd International Symposium on Functional Equations, Louisville, USA, 2006. május 14-20.
- [40] ♠ L. Losonczi, Homogeneous two-variable symmetric means, 6th Joint Conference on Mathematics and Computer Science, Pécs, 2006. július 12-15.
- [41] ♠ L. Losonczi, Polynomials with all zeros on the unit circle, The 11th Internat. Conf. on Functional Equations and Inequalities, Bedlewo, Poland, 2006. szept. 17-23.
- [42] ♠ L. Losonczi, Symmetric means of two variables, ISFE 45, Bialsko-Biala, Poland, 2007. jul.24-30.
- [43] ♠ L. Losonczi, Polynomials all of whose zeros are on the unit circle, Conference on Inequalities and Applications '07, Noszvaj, De La Motte Castle, Hungary, 2007. szept. 9-15.