A 047340 sz. OTKA kutatás zárójelentése

Summary of research in OTKA grant 047340.

A kutatásaink több irányban folytak: 1. normális valószínűségek kiszámítása, régebbi eljárások kiterjesztése másmilyen eloszlásokra, 2. új algoritmusok, vagy régi eljárások továbbfejlesztése a sztochasztikus modellek optimalizálására, és 3. a diszkrét momentum problémák területén is elértünk eredményeket.

1. Valószínűségek kiszámítása.

1/1 A sztochasztikus programozásban fontos valószínűségek kiszámításának eljárásait gyorsítottuk fel (Deák), amivel lehetővé vált 1000 dimenziós normális eloszlású valószínűségek meghatározása néhány konvex test esetén (természetesen ezek az eljárások használhatók több konvex test egyesítésével kapott halmazokra). A nagyszámú tesztfeladat megoldása során egy érdekes eredményt is kaptunk: az eljárások hatékonysága nem romlik magasabb dimenzióban.

1/2 A valószínűségek kiszámításának egy új eljárását dolgoztuk ki, amely polihedrális szita formulákon alapszik (Szántai, Hujter, Bukszár). Sztochasztikus hálózatokkal kapcsolatos, ritkán bekövetkező események kereszt entrópia alkalmazásán alapuló valószínűségbecslését is elvégeztük (Szántai). A Dirichlet eloszlással kapcsolatos valószínűségek számítási, illetve hatékony becslési eljárásait fejlesztettük ki, valamint PERT modellezéssel foglalkoztunk (Szántai).

1/3. Új szükséges feltételek megadása a többdimenziós gamma eloszlás illeszthetőségére.
Azt már Prékopa és Szántai is megmutatták, hogy az általuk bevezetett többdimenziós gamma-eloszlás nem feltétlenül illeszthető tetszőleges, nemnegatív tapasztalati kovariancamátrixú adathalmazhoz. Később Szántai a kovarianciamátrix elemeire vonatkozó szükséges feltételeket fogalmazott meg az illeszthetőségre vonatkozóan. Ezekről a 4-nél nem nagyobb dimenziós eloszlások esetében meg tudta mutatni, hogy elégségesek is. Nagyobb dimenzió esetén e szükséges feltételek elégségessége nyitott kérdés maradt. Kéri és Szántai most megmutatták, hogy magasabb dimenzióban a Szántai által megadottakon kívül további szükséges feltételeket is könnyen meg lehet adni. A mai fejlettebb számítástechnikai eszközök birtokában megadták az 5 és a 6 dimenziós esetekre is az illeszthetőség elégséges feltételeit. Ennek során kiderült, hogy 5 dimenzió esetén a szükséges és elégséges feltételek összességére még tetszetős, kerek meghatározás adható, 6 dimenzió esetén azonban e feltételek oly módon bővülnek, hogy már nem összegezhetők a 4 és 5 dimenziós esethez hasonlóan és kezdenek szinte kaotikusnak látszó formát ölteni. Megkísérelték a 7 dimenziós eset megoldását is, de az elvégzendő számítás gépidő igénye a vártnál jóval tetemesebb lenne.

1/4 Többdimenziós valószínűség eloszlásoknak a komponensek közti kapcsolatok feltárásán és hipergráfokkal történő modellezésén alapuló approximációja. A mindennapi döntéshozatalt gyakran kell bizonytalan feltételek között meghozni. A figyelembe veendő előfeltételek gyakran valószínűségi változók, ezért intenzíven kell foglalkozni a többdimenziós valószínűségi vektorváltozók komponensei közötti kapcsolatok rendszerével. Szántai és Kovács a többdimenziós valószínűségeloszlások olyan approximációját dolgozták ki, amely figyelembe veszi a komponensek közti kapcsolati rendszereket és bizonyos hipergráf struktúrákat követ. Ez az eljárás a többdimenziós valószínűségi vektorváltozónak csak az egy-, két- és háromdimenziós peremeloszlásait használja. Képletet adtak annak meghatározására, hogy a közelítő eloszlás milyen jól közelíti a valódit. Bebizonyították, hogy az új módon szerkesztett közelítő eloszlások között mindig létezik olyan, amelyik a Chow-Liu-féle fán alapuló közelítő eloszlásnál jobb közelítést ad. Konkrét teszt feladatokon illusztrálták a kidolgozott eljárásuk gyakorlati alkalmazhatóságát.

2. Sztochasztikus programozási feladatok megoldó algoritmusai.
2/1 Felhasználtuk a kifejlesztett valószínűségi korlátokat arra, hogy egy, a valószínűséggel korlátos modellt megoldó algoritmust fejlesszünk ki (Bukszár). Nevezetesen az algoritmus egy lépésében a megengedett megoldások halmazában benne, vagy azt tartalmazó közelítő halmazt konstruáltunk, majd az eredeti feladatban a megoldások halmazát a közelítő halmazzal helyettesítettük. Az eredeti feladat optimális megoldását véges sok lépésben lehet elérni. Korlátaink két tulajdonsága miatt lehet ezeket alkalmazni az algoritmusban:
a.) Minden korláthoz egy szorosabb korlát adható kevés számítási költséggel, tehát egy iteratív javítást lehet elérni, amíg a kívánt pontosságot el nem érjük. b.) A korlátok csak néhány metszet-valószínűségen alapulnak.

2/2 Egy nemrégiben kifejlesztett eljárást, a szukcesszív regressziós approximációkat alkalmaztuk néhány sztochasztikus programozási feladatra (Deák), ezek között szerepelt a hagyományos valószínűséggel korlátozott model és a kétlépcsős model is. Az eljárás alapötlete az, hogy a zajos (csak Monte Carlo módszerrel kiszámítható) függvényeket helyettesítjük regressziós görbékkel. A regressziós görbék az optimum közelében az iteratív eljárás előrehaladtával egyre pontosabbak lesznek, és emiatt tetszőleges pontosság elérhető. A már régebben megvalósított valószínűséggel korlátozott és kétlépcsős feladatok után kidolgoztuk az eljárást olyan egyenletrendszerekre, illetőleg lineáris programozási feladatokra, amelyek minden paramétere véletlen lehet. Továbbá kijavítottuk az eljárás egyik hiányosságát: szemidefinít programozással el lehet érni, hogy a közelítő függvények pozitív definítek legyenek (Deák, Prékopa).

2/3 Egy olyan dekompozíciós eljárást dolgoztunk ki kétlépcsős sztochasztikus programozási feladatok megoldására, amelyben a regularizáció a megengedettségre is kiterjed (Fábián). Dekompozíciós eljárásokat dolgoztam ki arra az esetre, amikor sok egyidejű CVaR-korlát szerepel sztochasztikus programozási feladatokban. A másodrendű sztochasztikus dominancia kezelésére vágósíkos eljárást adtunk.

2/4 Olyan valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási feladat megoldására fejlesztettünk ki algoritmust, ahol a valószínűségi változók nem a valószínűségi korlát egyenlőtlenségrendszerének jobboldalán, hanem az eseményt definiáló egyenlőtlenség-rendszer baloldalán, egymással is "keveredve" helyezkednek el (Vizvári). Legjobb tudomásunk szerint ez újszerű feladat a sztochasztikus programozáson belül.
Tekintettük ennek a döntési változók szempontjából folytonos és diszkrét változatát. Mindkét változatot mezőgazdasági elemzésre használtuk. A folytonos változat országos síntű elemzésre szolgál, nevezetesen arra, hogy mennyire hatékonyan használjuk a termőföldet, a diszkrét változat meg egy gazdaság optimális vetési tervének meghatározását modellezi.

3. A diszkrét momentumproblémák. A többváltozós diszkrét momentum probléma (TDMP) megoldása területén új eredményeink a következők: duál megengedett bázisstruktúra tételek, és ezek segítségével közelítések a TDMP célfüggvényére (Mádi-Nagy, Prékopa). A feladat struktúráját kihasználó hatékonyabb megoldó algoritmust dolgoztunk ki. A kétváltozós bázisstruktúra tételeket többváltozós esetre általánosítottuk. A TDMP megoldása hatékonyságát tovább javítottuk az egyváltozós DMP módszerek segítségével.

A TDMP alkalmazásai területén: véletlen vektorváltozók függvényei várható értékére új korlátokat adtunk a peremeloszlások és néhány vegyes momentum ismeretében. Eddigi eredményeinket felhasználva a többváltozós hasznosság becslése is elvégezhető.

Kutatásainkról néhány statisztikai adatot is megadunk. Több mint 40 publikációban adtuk közre eredményeinket, ezek együttes impakt faktora 4.36 volt. Több mint 70 előadást tartottunk, (ebből harmincnál több külföldi konferenciákon történt). Ketten MTA doktora címet nyertek el (Deák, Szántai).

Summary of research in OTKA grant 047340

Our research extended to different fields: 1. computing normal probabilities, extending older algorithms for other distributions, 2. new algorithms or modifications of known techniques for optimizing stochastic models, 3. new results were obtained concerning the discrete moment problems.

1. Computing normal probabilities, extending older algorithms for other distributions.
1/1. Procedures of computing probabilities that are important in stochastic programming were improved (Deák), and by this it become possible to compute 1000 dimensional normal probabilities in case of some convex bodies (naturally these procedures can be used in case of the non-convex union of some convex bodies). During the solution of a great number of test problems an interesting result was obtained: the efficiencies of the procedures do not deteriorate in higher dimensions.

1/2 A new method, based on polyhedral exclusion-inclusion was developed (Szántai, Hujter). Also, a new estimatior of rare events probabilities in stochastic networks on the base of using the concept of the crossentropy was worked out (Szántai). Furthermore the probability calculation and estimation for the evaluation of probabilities in case of Dirichlet distribution was developed, and results concerning PERT modeling was obtained (Szántai).

1/3. Prékopa and Szántai proved that their newly introduced multivariate gamma distribution not always can be fitted to empirical data when the empirical covariance matrix has all nonnegative components. Szántai gave necessary conditions of the fitting and the sufficiency of these conditions was proved for dimensions less than or equal 4. For higher dimensions the question of sufficiency of the necessary conditions remained an open question. Kéri and Szántai nowadays formulated further necessary conditions. This way they prove that the necessary conditions given earlier are not sufficient. Using the more efficient computation tools they were able to give the sufficient conditions for dimensions 5 and 6 as well. However, for higher dimensions they have only necessary conditions and the sufficiency of these conditions remained an open question.

1/4. Most everyday reasoning and decision making is based on uncertain premises. The premises or attributes, which one must take into consideration, are random variables, so that one often have to deal with a high dimensional multivariate random vector. Szántai and Edith Kovács constructed an approximation of a high dimensional multivariate probability distribution that is based on the dependence structure between the random variables and on a certain clustering of the graph describing this structure. Their method uses just one, two and three dimensional probability distributions. They gave a formula that expresses how well the constructed approximation fits to the real probability distribution. It was proved that every time there exists a probability distribution constructed this way, that fits to reality at least as well as the approximation constructed from the Chow - Liu tree. Some examples were also given that show how efficient is the approximation in application areas like pattern recognition and feature selection.

2. New algorithms for optimizing stochastic models

2/1. We utilized some of our probabilistic bounds to develop a method (Bukszár) that solves probabilistic constrained stochastic optimization problems (SOP). In particular, in a step of the algorithm an auxiliary set containing or being contained by the set of feasible solutions is constructed, and the SOP whose feasible set of solutions is replaced with the auxiliary set is solved. The optimal solution of the original SOP is reached in finite number of steps. The following two features of our bounds make them applicable in the above algorithm:
a.) To each bound a tighter one can be given algorithmically at low computational cost, which enables us to apply an iterative improvement on the bounds until the desired accuracy is attained. b.) They rely on only a few intersection probabilities.

2/2. A recently developed algorithm, called successive regression approximations was applied to some stochastic programming problems (Deák), among them the traditional probabilistic constrained model and the two-stage model as well. The basic idea in this algorithm is that the noisy function values (computable only by Monte Carlo techniques) are replaced by a regression approximation. These regression functions in the neighbourhood of the optimum become more and more accurate as the iterative algorithm proceeds and by this the accuracy of the solution can be increased. The earlier obtained procedures for the probabilistic constrained and two-stage models were modified to fit the algorithm for solving systems of linear equations, and linear programming problems, where any of the parameters can be random variables. Furthermore, a possible flaw of the procedure was fixed: by using semidefinite optimization techniques the positive definiteness of the approximating function can be ensured (Deák, Prékopa).

2/3 We have worked out a decomposition method for two-stage stochastic programming problems, where this method regularization extends to feasibility issues. (Fábián). We have proposed decomposition schemes for handling multiple CVaR-constraints in stochastic programming problems. Also, a new cutting-plane type method was developed for handling Second-order Stochastic Dominance.

2/4 We developed a new algorithm for a probabilistic constrained stochastic programming model, where the random variables were placed not on the right hand side of the system of inequalities in the probabilistic constraint, but on the left hand side, mixed up with other components (Vizvari). As far as we know this is a new type in stochastic programming. We considered two version of the model: where the decision were continuous and discrete. Both versions were used for agricultural analysis. The continuous version was used for national analysis, namely to show how efficient is the usage of the arable land, while the discrete version was used to decide on the optimal sowing plan on a farm.

3. The discrete moment problems.

Solution of the multivariate discrete moment problem (MDMP): theorems on dual feasible bases and approximation of the objective function value of MDMP by the aid of them (Mádi-

Nagy, Prekopa). We have developed more effective solution technique based on the structure of MDMP. We generalized the bivariate results for higher dimensions, achieving increasy of efficiency. Also the solution method of the univariate DMP was applied for MDMP.
The applications of the MDMP: by developing bounds on the expectations of functions of random vectors with given marginals and some moments, we extended the possible application fields, for example by approximating the expected multiattribute utility.

Finally some statistics concerning our research are given. Our results were published in more than 40 papers, research reports and proceedings, the sum of the impact factors is 4.36. The researchers of this project gave more than 70 lectures in the four year time interval of the grant (among these more than 30 lectures were given at international conferences). Two researchers defended their dissertation submitted for the title Doctor of the Hungarian Academy of Sciences (Deák, Szántai).