Az OTKA T046762 számú pályázat által támogatott kutatás zárójelentése

Résztvevő kutató: Fodor János

1. A kutatás célja

A kutatás keretein belül az utóbbi időben előtérbe került különböző értékelési skálák (amelyek például a hétköznapi nyelv szavaival fejezik ki alternatívák egy véges halmazán az ezek között fennálló preferenciák erősségét, az egyes kritériumok fontosságát, stb) és a rajtuk értelmezhető különböző rendezett algebrai struktúrák körében természetes módon felmerülő alapkérdéseket szeretnénk megválaszolni. A függvényegyenletek, a nem-klasszikus (többértékű) logikák, valamint az algebra eszköztárának együttes felhasználásával szeretnénk meghatározni azt a legáltalánosabb matematikai keretet, ahol a klasszikus preferenciamodellezés fogalmai értelmezhetők, az ezekre vonatkozó eredmények pedig kiterjeszthetők. Ezáltal egységes keretbe lehetne foglalni az eddigi ismert megközelítéseket és eredményeket.

2. A legfontosabb eredmények

2.1. Aggregációs műveletek

2.1.1. Gyűrűszerű struktúra $]-1,1[$-en

Az [1] dolgozatban azt vizsgáltuk, hogy lehet-e a $]-1,1[$ intervallumon olyan műveleteket értelmezni, amelyekkel egy gyűrűszerű struktúrát kapunk. A problémát a döntéselmélet motiválta, ahol a fogalmakban és döntésekben természetes módon meglévő szimmetriát (pl. veszteség - nyereség) olyan skálák képesek megfelelő módon reprezentálni, amelyek szimmetrikusak az origóra. Ezen az intervallumon olyan műveleteket (szimmetrikus pszeudo-összeadás és pszeudo-szorzás) értelmeztünk, amelyek folytonos T t-normákra és S t-konormákra épülnek.

Legyen S t-konorma. Az $\ominus'_S$ *S-különbséget* a következő módon értelmezzük:

$$x \ominus'_S y := \inf\{z|S(y,z) \geq x\}. \tag{1}$$

Először a pszeudo-összeadást vezetjük be.

Definíció 1. Legyen S t-konorma. Az $\oplus$ *szimmetrikus pszeudo-összeadás* a $[-1, 1]$ intervallumon az alábbiak szerint értelmezett művelet:

(R1) Ha $x, y \geq 0$: $x \oplus y = S(x, y)$.

(R2) Ha $x, y \leq 0$: $x \oplus y = -S(-x, -y)$.

(R3) Ha $x \in [0, 1[, y \in]-1, 0]$: $x \oplus y = x \ominus_S (-y)$, ahol $\ominus_S$ az S-különbség szimmetrizált változata:

$$x \ominus_S y = \begin{cases} \inf\{z \mid S(y, z) \geq x\}, & \text{ha } x \geq y \\ -\inf\{z \mid S(x, z) \geq y\}, & \text{ha } x \leq y \\ 0, & \text{ha } x = y. \end{cases}$$

$x, y \geq 0$ esetén. Továbbá $1 \oplus (-1) = 1$ vagy -1.

(R4) Ha $x \leq 0, y \geq 0$: cseréljük fel x, y-t.

A pszeudo-szorzás kevésbé problematikus. Egy kommutatív, asszociatív műveletre van szükségünk, amelynek 1 egységeleme, 0 nulleleme, és előjele ugyanaz mint a szorzaté, vagyis

$$x \odot y = \operatorname{sign}(x \cdot y)\, T(|x|, |y|).$$

Ez a szabály természetes módon következik abból, hogy $\odot$ disztributív $\oplus$-ra nézve.

A következő definíciót javasoltuk.

Definíció 2. Legyen T t-norma. A $\odot$ *szimmetrikus pszeudo-szorzás* a $[-1, 1]$-en az alábbi módon értelmezett művelet:

(R5) Ha $x, y \geq 0$: $x \odot y = T(x, y)$.

(R6) Egyébként pedig $x \odot y = \operatorname{sign}(x \cdot y) T(|x|, |y|)$.

Ha $\oplus$ és $\odot$ fenti konstrukciója megvalósítható, és ha még $\odot$ disztributív $\oplus$-ra nézve, akkor a $(\,]-1, 1[, \oplus, \odot)$ algebrai struktúra gyűrű.

Az eredmények igazolása során az alábbi négy esetet tekintettük, ezzel az összes folytonos t-konormát lefedve:

1. S szigorú t-konorma;
2. S nilpotens t-konorma;
3. S a maximum művelet;

4. S folytonos Archimédeszi t-konormák lexikografikus összege (vagyis az előző három eset kombinációja).

Tétel 1. *Legyen S szigorú t-konorma, $\oplus$ pedig az S alapján definiált pszeudo-összeadás. Ekkor*

(i) $(\,]-1,1[, \oplus)$ *Ábel-csoport.*

(ii) Nincs olyan $\odot$ pszeudo-szorzás, amellyel $(\,]-1,1[, \oplus, \odot)$ *gyűrű.*

Egyszerű megfontolások alapján megmutattuk, hogy ha S nilpotens, vagy $S = \max$, vagy S a fentiek lexikografikus szorzata, akkora a kapott pszeudo-összeadás nem asszociatív.

Az eredményekből levonható következtetés: a $T = \min$ és $S = \max$ alapján kapott ún. szimmetrikus minimum és maximum tekinthető a legjobb konstrukciónak.

2.1.2. Racionális uninormák

Korábbi munkáinkban alapvető eredményeket közöltünk egy asszociatív, részben kompenzatív aggregációs műveletcsaládról, az uninormákról, lásd pl. [4] áttekintést. A [2] dolgozatban meghatároztuk az összes valódi racionális uninormát.

Definíció 3. Egy $U : [0,1]^2 \to [0,1]$ függvényt *uninormának* nevezünk, ha U asszociatív, szimmetrikus, nemcsökkenő, és van olyan $e \in [0,1]$, hogy $U(e,x) = x$ minden $x \in [0,1]$ esetén.

Egy U uninormát valamely $e \in]0,1[$ egységelemmel *racionálisnak* nevezünk, ha felírható

$$U(x,y) = \frac{P_n(x,y)}{P_m(x,y)} \tag{2}$$

alakban, ahol P_n és P_m rendre n-ed fokú, illetve m-edfokú polinomok. Egy uninormát *valódinak* nevezünk, ha egységeleme szigorúan 0 és 1 között van.

Tétel 2. *Legyen U valódi racionális uninorma e egységelemmel. Ekkor U az alábbi alakú $(x,y) \in [0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$ esetén:*

$$U_e(x,y) = \frac{(1-e)xy}{(1-e)xy + e(1-x)(1-y)}, \tag{3}$$

továbbá vagy $U(0,1) = U(1,0) = 0$, vagy $U(0,1) = U(1,0) = 1$.

2.1.3. Migratív t-normák

A [3] dolgozatban egy érdekes problémát vizsgáltunk és oldottunk meg.

Definíció 4. Legyen $\alpha \in]0,1[$. Egy $T\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ függvényt *α-migratívnak* nevezünk, ha teljesül

$$T(\alpha x, y) = T(x, \alpha y) \quad \text{minden } x, y \in [0,1] \text{ esetén.} \tag{4}$$

Hogyan jellemezhetők azok a t-normák, amelyek α-migratívak valamely $\alpha \in]0,1[$ esetén? Nyilvánvaló, hogy a szorzat t-norma kielégíti a 4 Definíció feltételeit.

Legyen T folytonos t-norma. Ekkor belátható, hogy ha T α-migratív, akkor szükségképpen szigorú is. Vagyis van olyan szigorúan csökkenő folytonos $t\colon [0,1] \to [0,\infty]$ függvény, amelyre $t(1) = 0$ és $t(0) = \infty$, és amellyel $T(x,y) = t^{-1}(t(x) + t(y))$.

Ekkor a migratív tulajdonság felírható a t additív generátorra vonatkozó függvényegyenletként:

$$t(\alpha x) = t(\alpha) + t(x) \quad \text{minden } x \in [0,1] \text{ esetén.} \tag{5}$$

A megoldást az alábbi tétel szolgáltatja.

Tétel 3. *Legyen t egy szigorú t-norma additív generátora. Ekkor t pontosan akkor elégíti ki a (5) függvényegyenletet, ha van olyan folytonos, szigorúan csökkenő, az $[\alpha, 1]$ intervallumon értelmezett nemnegatív t_0 függvény, amelyre $t_0(\alpha) < +\infty$, $t_0(1) = 0$, és*

$$t(x) = k \cdot t_0(\alpha) + t_0\left(\frac{x}{\alpha^k}\right) \quad \text{ha } x \in \left]\alpha^{k+1}, \alpha^k\right], \tag{6}$$

ahol k nemnegatív egész.

2.2. Preferenciák

2.2.1. Preferenciák generátorai

Megmutattuk, hogy fuzzy preferenciastruktúrák konstrukciója csak az indifferencia generátor választásán múlik. Karakterizáltuk azokat az eseteket, amikor az indifferencia generátor i) kommutatív kvázi-kopula, ii) Frank-féle t-normák lexikografikus összege, iii) speciális Frank-féle t-norma, lásd [5].

Legyen $s \in [0,\infty]$. Az alábbi módon értelmezett T^s t-normákból álló $\{T^s\}_{s\in[0,\infty]}$ halmazt *Frank-féle* t-norma-családnak nevezzük ($x, y \in [0,1]$):

$$T^s(x,y) = \begin{cases} \min\{x,y\}, & \text{ha } s = 0; \\ xy, & \text{ha } s = 1; \\ \log_s\left(1 + \frac{(s^x-1)(s^y-1)}{s-1}\right), & \text{ha } s \in]0,1[\cup]1,+\infty[; \\ \max\{x+y-1, 0\}, & \text{ha } s = +\infty; \end{cases} .$$

Legyen φ a $[0,1]$ automorfizmusa, T egy t-norma. Ekkor $T_\varphi(x,y) := \varphi^{-1}(T(\varphi(x), \varphi(y))$.

Legyen φ a $[0,1]$ egy automorfizmusa, és tekintsük a $(T_\varphi^\infty, S_\varphi^\infty, N_\varphi)$ De Morgan hármast.

Definíció 5. A $[0,1]^2$-ről $[0,1]$-be képező (p,i,j) függvények rendezett hármasát *generátor-hármasnak* nevezzük, ha bármely az alternatívák A halmazán értelmezett R reflexív fuzzy reláció esetén az alábbi módon definiált (P,I,J) relációk

$$\begin{aligned} P(a,b) &= p(R(a,b),R(b,a)) \\ I(a,b) &= i(R(a,b),R(b,a)) \\ J(a,b) &= j(R(a,b),R(b,a)) \end{aligned}$$

olyan φ-fuzzy preferenciastruktúrát alkotnak A-n, amelyre $P \cup_\varphi^\infty I = R$ is teljesül.

Könnyen belátható, hogy (p,i,j) pontosan akkor generátor-hármas, ha $i(1,1) = 1$, és bármely $x,y \in [0,1]$ esetén teljesül, hogy $i(x,y) = i(y,x)$, $\varphi(p(x,y)) + \varphi(p(y,x)) + \varphi(i(x,y)) + \varphi(j(x,y)) = 1$, és $\varphi(p(x,y)) + \varphi(i(x,y)) = \varphi(x)$.

Az utolsó két egyenlőségből pedig azonnal adódik, hogy bármely $x,y \in [0,1]$ esetén

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \varphi^{-1}[\varphi(x) - \varphi(i(x,y))], \\ j(x,y) &= \varphi^{-1}[\varphi(i(x,y)) - (\varphi(x) + \varphi(y) - 1)]. \end{aligned}$$

Egy (p,i,j) generátor-hármast *monotonnak* nevezünk, ha p növekvő az első, és csökkenő a második változójában, i növekvő, j csökkenő mindkét változójában. Ez éppen a korábbi (PA) axióma [5]. A monoton esetet karakterizáljuk a következő tételben.

Tétel 4. *Egy (p,i,j) generátor-hármas pontosan akkor monoton, ha az i függvény növekvő mindkét változójában, és az i φ^{-1}-transzformáltja Lipschitz-folytonos 1 paraméterrel.*

A következő tételben olyan generátor-hármasokat írunk le, amelyek t-normákkal kapcsolatosak.

Tétel 5. *Legyen (p,i,j) olyan generátor-hármas, melyben i t-norma. Ekkor az alábbi állítások páronként ekvivalensek:*

(i) *az $(x,y) \mapsto j(\mathcal{N}_\varphi(x), \mathcal{N}_\varphi(y))$ függvény t-norma;*

(ii) *az $(x,y) \mapsto p(x, \mathcal{N}_\varphi(y))$ függvény szimmetrikus;*

(iii) *i előáll Frank-féle t-normák φ-transzformáltjainak lexikografikus összegeként.*

A generátor-hármasokról szóló utolsó tétellel a kör bezárul: visszajutunk az általunk korábban felépített axiomatikus megközelítés legfontosabb tételéhez, lásd [11].

Tétel 6. *Legyen (p,i,j) olyan generátor-hármas, melyben i t-norma. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) *az* $(x, y) \mapsto p(x, \mathcal{N}_\varphi(y))$ *függvény t-norma;*

(ii) i *egy Frank-féle t-norma* φ*-transzformáltja.*

2.2.2. Fuzzy gyenge rendezések

A gyenge rendezések a preferenciamodellezés alapvető részéhez tartoznak. Egy $\lesssim$ bináris relációt egy adott X nem-üres halmazon *gyenge rendezésnek* nevezünk, ha az alábbi két felétel teljesül minden $x, y, z \in X$ esetén:

$$\begin{array}{ll} \text{ha } x \lesssim y \text{ és } y \lesssim z \text{ akkor } x \lesssim z & \text{(tranzitivitás)} \\ x \lesssim y \text{ vagy } y \lesssim x & \text{(teljesség)} \end{array}$$

Jól ismert az alábbi klasszikus eredmény.

Tétel 7. *Egy* $\lesssim$ *bináris reláció az* X *nem-üres halmazon pontosan akkor gyenge rendezés, ha van olyan lineárisan rendezett nem-üres* $(Y, \preceq)$ *halmaz és* $f : X \to Y$ *leképezés, amellyel* $\lesssim$ *az alábbi alakban reprezentálható bármely* $x, y \in X$ *esetén:*

$$x \lesssim y \quad \textit{akkor és csak akkor, ha} \quad f(x) \preceq f(y) \tag{7}$$

Adott nem-üres X halmaz esetén egy $R : X^2 \to [0, 1]$ bináris fuzzy relációt *(fuzzy) gyenge* T*-rendezésnek* nevezünk, ha az alábbi két tulajdonság teljesül minden $x, y, z \in X$ esetén, ahol T egy balról folytonos t-normát jelöl:

$$\begin{array}{ll} T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z) & (T\text{-tranzitivitás}) \\ R(x, y) = 1 \text{ or } R(y, x) = 1 & \text{(erős teljesség).} \end{array}$$

Egy $R : X^2 \to [0, 1]$ bináris fuzzy reláció

- *reflexív* ha $R(x, x) = 1$ minden $x \in X$ esetén,
- *szimmetrikus* ha $R(x, y) = R(y, x)$ minden $x, y \in X$ esetén,
- T*-tranzitív* ha $T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z)$ minden $x, y, z \in X$ esetén,
- *erősen teljes* ha $\max(R(x, y), R(y, x)) = 1$ minden $x, y \in X$ esetén.

Azokat a fuzzy relációkat amelyek reflexívek és T-tranzitívak T*-előrendezéseknek* nevezzük. A szimmetrikus T-előrendezéseket T*-ekvivalenciáknak* hívjuk. Amint azt már említettük, az erősen teljes T-előrendezéseket *gyengek* T*-rendezéseknek* nevezzük. Adott $E : X^2 \to [0, 1]$ T-ekvivalencia esetén egy $L : X^2 \to [0, 1]$ fuzzy relációt T*-*E*-rendezésnek* nevezünk, ha L T-tranzitív és az alábbi két feltételt is teljesíti:

- E-*reflexivitás:* $E(x,y) \leq L(x,y)$ minden $x,y \in X$ esetén,
- T-E-*antiszimmetria:* $T(L(x,y), L(y,x)) \leq E(x,y)$ minden $x,y \in X$ esetén.

Először értékelőfüggvényen alapuló reprezentációt mutatunk be.

Tétel 8. *Egy $R : X^2 \to [0,1]$ fuzzy reláció pontosan akkor gyenge T-rendezés, ha van olyan nem-üres Y halmaz, egy $E : Y^2 \to [0,1]$ T-ekvivalencia, egy $L : Y^2 \to [0,1]$ erősen teljes T-E-rendezés, és egy $f : X \to Y$ leképezés úgy, hogy a következő egyenlőség teljesül minden $x,y \in X$ esetén:*

$$R(x,y) = L(f(x), f(y)). \tag{8}$$

Legyen $\vec{T}$ a balról folytonos T t-normából képzett reziduális implikáció.

Állítás 1. *Adott $f : X \to [0,1]$ függvény esetén az*

$$R(x,y) = \vec{T}\big(f(x), f(y)\big) \tag{9}$$

formula segítségével értelmezett $R : X^2 \to [0,1]$ fuzzy reláció gyenge T-rendezés.

Definíció 6. Egy $R : X^2 \to [0,1]$ gyenge T-rendezést *reprezentálhatónak* nevezünk, ha van olyan $f : X \to [0,1]$ generátorfüggvény, hogy a (9) egyenlőség teljesül.

Tétel 9. *Legyen T folytonos. Ekkor egy R gyenge T-rendezés pontosan akkor reprezentálható, ha az alábbi függvény generátorfüggvénye R-nek:*

$$\bar{f}(x) = \inf_{z \in X} R(z,x).$$

Most a tartalmazási reláción alapuló jellemzést mutatjuk be. Tekintsük az X-en értelmezett fuzzy halmazok $\mathcal{F}(X)$ összességét. Adott T balról folytonos t-norma esetén az alábbi két fuzzy reláció értelmezhető $\mathcal{F}(X)$-en:

$$\mathrm{INCL}_T(A,B) = \inf_{x \in X} \vec{T}(A(x), B(x))$$
$$\mathrm{SIM}_T(A,B) = \inf_{x \in X} \overleftrightarrow{T}(A(x), B(x))$$

Tétel 10. *Tekintsük az $R : X^2 \to [0,1]$ fuzzy relációt. Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:*

(i) *R gyenge T-rendezés.*

(ii) *Fuzzy halmazoknak van olyan nem üres $S \subseteq \mathcal{F}(X)$ családja, amelyek lineárisan rendezettek a $\subseteq$ részhalmaz relációra nézve, és egy $\varphi : X \to [0,1]$ leképezés úgy, hogy a következő reprezentáció teljesül minden $x,y \in X$ esetén:*

$$R(x,y) = \mathrm{INCL}_T(\varphi(x), \varphi(y)) \tag{10}$$

Most rátérünk a fuzzy ekvivalencia-relációk és hagyományos lineáris rendezések dekompozícióján alapuló reprezentációs eredményre.

Definíció 7. Legyen $\preceq$ egy hagyományos rendezés X-en és legyen $E : X^2 \to [0,1]$ egy fuzzy ekvivalencia reláció. Azt mondjuk, hogy E *kompatibilis* $\preceq$*-vel*, ha az alábbi egyenlőtlenség teljesül minden három elemű $x \preceq y \preceq z$ X-beli láncra:

$$E(x,z) \leq \min(E(x,y), E(y,z))$$

Tétel 11. *Tekintsünk egy $R : X^2 \to [0,1]$ fuzzy relációt. A következő két állítás ekvivalens:*

(i) R gyenge T-rendezés.

(ii) Van olyan hagyományos lineáris rendezés $\preceq$ és ezzel kompatibilis E T-ekvivalencia, hogy R az alábbi alakban reprezentálható:

$$R(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{\textit{ha} } x \preceq y \\ E(x,y) & \text{\textit{egyébként}} \end{cases} \tag{11}$$

2.2.3. Egy általános keret fuzzy preferenciastruktúrák számára

A korábbi [11] axiomatikus megközelítésünket újra tanulmányozva kiderült, hogy a preferenciastruktúrák alapjául szolgáló logikai műveletek tulajdonságai közül az alábbi szükséges feltétel [7]:

$$T(x,y) \leq z \quad \Longleftrightarrow \quad T(x, N(z)) \leq N(y) \tag{12}$$

minden $(x,y,z) \in [0,1]^3$ esetén. Itt T t-norma, N pedig erős negáció. Ez a tulajdonság éppen az R- illetve S-implikációk egyenlőségének jellemzésére szolgált a [10] cikkünkben. Ezt az algebrai tulajdonságot később geometriailag lehetett jellemezni, és így a forgatás-invariancia nevet kapta. Egy olyan t-normát, amelyre teljesül (12), N-re nézve forgatás-invariánsnak nevezünk. Belátható az alábbi két tétel.

Tétel 12. *Ha T forgatás-invariáns valamely N erős negációra nézve, akkor T balról folytonos.*

Tétel 13. *Egy balról folytonos T t-norma és egy N erős negáció esetén az alábbi három tulajdonság egymással páronként ekvivalens:*

(1) T forgatás-invariáns N-re nézve;

(2) $I_T(x,y) = z$ pontosan akkor, ha$T(x, N(y)) = N(z)$ bármely $(x,y,z) \in [0,1]^3$ esetén;

(3) $I_T(x,0) = N(x)$ minden $x \in [0,1]$ esetén.

A forgatás-invariancia tulajdonság önmagában még nem elegendő a fuzzy preferenciastruktúrák számára. Arra is szükség van, hogy T folytonos legyen a $\{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid T(x, y) > 0\}$ halmazon. Ekkor ugyanis érvényes az alábbi eredmény.

Tétel 14. *Legyen T forgatás-invariáns t-norma N-re nézve. Tegyük fel, hogy T folytonos a $\{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid T(x, y) > 0\}$ halmazon. Ekkor tetszőleges olyan $x, y \in [0, 1]$ esetén, amelyre $0 < T(x, y) < x$ igaz, teljesül az alábbi egyenlőség is:*

$$T(x, N(T(x, y))) = N(y). \tag{13}$$

Ezen alapokra építve a [11] számos, az additív preferenciákra vonatkozó eredménye kiterjeszthető: többek között a preferenciastruktúrák definíciója, létezésük, karakterizációjuk és konstrukciójuk, valamint néhány speciális klasszikus preferenciastruktúra kiterjesztése. Ezeknek a részletezésétől most eltekintünk.

Szeretnénk hangsúlyozni, hogy ez a logikai keret egyúttal általánosítása az általunk korábban vizsgált maxitív preferenciáknak is. Tehát a fenti keret egy eléggé általános, ugyanakkor még kezelhető hátteret jelent a preferenciastruktúrák számára.

3. A támogatás feltüntetésével született legfontosabb publikációk

Megjegyzés: a listán szereplő két utolsó hivatkozás korábbi munkánk, de szükség volt megemlítésükre az összefoglalóban.

[1] M. Grabisch, B. De Baets and J. Fodor, The quest for rings on bipolar scales, *Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* **12** (2004) 499–512.

[2] J. Fodor and I.J. Rudas, Rational uninorms, In: *Proceedings of the 11th International Fuzzy System Association World Congress* (July 28–31, 2005, Beijing, China) Vol.I., pp. 104–107.

[3] J. Fodor and I.J. Rudas, On migrative t-norms that are continuous, *Fuzzy Sets and Systems*, *Fuzzy Sets and Systems* **158** (2007) 1692–1697.

[4] J. Fodor and B. De Baets, Uninorms basics, in: P.P. Wang, D. Ruan, E.E. Kerre (Eds.) Fuzzy Logic – A Spectrum of Theoretical & Practical Issues (Springer, 2007), pp. 51–66.

[5] J. Fodor and B. De Baets, Fuzzy Preference Modelling: Fundamentals and Recent Advances, in: H. Bustince, F. Herrera and J. Montero, Eds., Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models (Studies in Soft Computing Vol. 220, Springer Verlag, 2008), pp. 205–215.

[6] U. Bodenhofer, B. De Baets and J. Fodor, A Compendium on Fuzzy Weak Orders: Representations and Constructions, *Fuzzy Sets and Systems* **158** (2007) 811–829.

[7] J. Fodor, A general framework for fuzzy preference modelling, 2008, submitted.

[8] K. Maes, B. De Baets and J. Fodor, The unique role of the Łukasiewicz-triplet in the theory of fuzzified normal forms, *Fuzzy Sets and Systems* **153** (2005) 161–179.

[9] I.J. Rudas and J. Fodor, Information aggregation: non-conventional approaches, In: *Proc. Of the 2nd International Symposium on Computational Intelligence and Intelligent Informatics* (October 14–16, 2005, Tunis-Gammarth, Tunisia), pp. 1–7.

[10] J.C. Fodor, A new look at fuzzy connectives, *Fuzzy Sets and Systems* **57** (1993) 141–148.

[11] J. Fodor and M. Roubens, Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support (Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1994), 272 pp.