

## 1. FOURIER ANALIZIS (MR 42)

(a) *Fourier integrálok statisztikus konvergenciája*

Legyen  $s : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  mérhető függvény. Akkor mondjuk, hogy  $s$ -nek a statisztikus limesze  $\infty$ -ben  $\ell$ , jelben:  $\text{st-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} s(\nu) = \ell$ , ha minden  $\varepsilon > 0$ -ra

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} |\{\nu \in (0, a) : |s(\nu) - \ell| > \varepsilon\}| = 0,$$

ahol az  $|\cdot|$  szimbolummal a Lebesgue mértéket jelöljük. Ez a Cauchy értelemben vett határérték általánosítása (gyengítése), amely azonban az előbbieket szinte minden tulajdonságával rendelkezik; lásd [Analysis, 24(2004), 1-18].

Az  $f \in L^1(\mathbb{R})$  függvény Fourier transzformáltját az

$$\widehat{f}(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx} dx, \quad t \in \mathbb{R},$$

képlettel definiálják, míg a Fourier integrál definíciója:

$$f(x) \sim \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t) e^{itx} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alapvető probléma, hogy milyen feltételek mellett helyettesíthető a “ $\sim$ ” jel az “=” jellel a legutóbbi képletben, legalább is majdnem minden  $x$ -re. Mivel általában  $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$ , ezért az

$$s_\nu(f; x) := \int_{-\nu}^{\nu} \widehat{f}(t) e^{itx} dt = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \frac{\sin \nu t}{t} dt$$

ún. Dirichlet integrál konvergenciáját vizsgáljuk. A Fourier sorokra vonatkozó Kolmogorov példához hasonlóan megadható olyan  $f \in L^1(\mathbb{R})$  függvény, amelyre

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} |s_\nu(f; x)| = \infty \quad \text{m.m.}$$

Bizonyítottuk [Analysis, 24 (2004), 1-18], hogy ha  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , akkor

$$\text{st-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} s_\nu(f, x) = f(x) \quad \text{m.m.}$$

Továbbá, ha  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$  folytonos az  $I$  nyitott intervallumon, akkor a

$$\text{st-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} s_\nu(f, x) = f(x)$$

határérték lokálisan egyenletesen áll fenn az  $I$  intervallumon.

(b) *A maximál Fejér operátor a valós  $H^1(\mathbb{R})$  Hardy téren*

A Dirichlet integrál Fejér közepét a

$$\sigma_N(f; x) := \frac{1}{N} \int_0^N s_\nu(f; x) d\nu = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \frac{1 - \cos Nt}{t^2} dt$$

képlettel, míg a maximál Fejér operátort a

$$\sigma_*(f; x) := \sup_{0 < N < \infty} |\sigma_N(f; x)|, \quad x \in \mathbb{R},$$

képlettel definiálják.

Bizonyítottuk [J. Fourier Anal. Appl., 10(2004), 27-50], hogy ha  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , akkor  $f \in H^1(\mathbb{R})$  akkor és csak akkor áll fenn, ha  $\sigma_*(f) \in L^1(\mathbb{R})$ , amelynek teljesülése esetén

$$\|f\|_{H^1} \sim \|\sigma_* f\|_{L^1}.$$

(c) *A maximál konjugált és Hilbert operátorok nem korlátosak a valós  $H^1$  Hardy térből az  $L^1$  térbe.* Az  $f \in L^1(\mathbb{T})$  függvény  $\tilde{f}$  konjugált függvényét az

$$\tilde{f}(x) := (\text{P.V.}) \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t) \frac{1}{2} \cot \frac{t}{2} dt$$

képlettel, míg a maximál konjugált operátort az

$$\tilde{f}_*(x) := \sup_{0 < h < \pi} \left| \frac{1}{\pi} \int_{|h| < |t| < \pi} f(x-t) \frac{1}{2} \cot \frac{t}{2} dt \right|, \quad x \in \mathbb{T},$$

képlettel definiálják.

Bizonyítottuk [Acta Math. Hungar., 109 (2005), 53-63], hogy megadható olyan  $f \in H^1(\mathbb{T})$  függvény, amelyre

$$\|\tilde{f}_*\|_{L(\mathbb{T})} = \infty.$$

Hasonló tételt bizonyítottunk az

$$\tilde{f}_*(x) := \sup_{0 < h < \infty} \left| \frac{1}{\pi} \int_{|t| > h} \frac{f(x-t)}{t} dt \right|, \quad x \in \mathbb{R},$$

maximál Hilbert operátorra is, ahol  $f \in H^1(\mathbb{R})$ .

(d) *Abszolút konvergens Fourier sorok és klasszikus függvényosztályok*

Legyen  $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\}$  komplex számoknak olyan mindkét irányban végtelen sorozata, amelyre

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| < \infty.$$

Ekkor a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} =: f(x)$$

trigonometrikus sor egyenletesen konvergens és ezért összegfüggvényének Fourier sora.

Többek között a következő két tételt bizonyítottuk [J. Math. Anal. App., 324(2006), 1168-1177].

1. Tétel. (i) Ha valamely  $0 < \alpha \leq 1$ -re

$$(1) \quad \sum_{|k| \leq n} |kc_k| = O(n^{1-\alpha}),$$

akkor  $\sum |c_k| < \infty$  és

$$f(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \in \text{Lip}(\alpha).$$

(ii) Megfordítva, ha  $kc_k \geq 0$  minden  $k$ -ra,  $\sum |c_k| < \infty$  és valamely  $0 < \alpha \leq 1$ -re  $f \in \text{Lip}(\alpha)$ , akkor (1) fennáll.

Ezt a tételt R.P. Boas bizonyította szinusz és koszinusz sorokra nemnegatív együtt-hatók esetén.

2. Tétel. (i) Ha valamely  $0 < \alpha \leq 2$ -re

$$(2) \quad \sum_{|k| \leq n} k^2 |c_k| = O(n^{2-\alpha}),$$

akkor  $\sum |c_k| < \infty$  és  $f \in \text{Zyg}(\alpha)$ .

(ii) Megfordítva, ha  $c_k \geq 0$  minden  $k$ -ra,  $\sum |c_k| < \infty$  és valamely  $0 < \alpha \leq 2$ -re  $f \in \text{Zyg}(\alpha)$ , akkor (2) fennáll.

Ezt a tételt R.P. Boas bizonyította  $\alpha = 1$ -re szinusz és koszinusz sorokra nemnegatív együtt-hatók esetén.

## 2. FUNKCIONÁLANALÍZIS (MR 46)

Legyen  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  tetszőleges mértéktér pozitív  $\mu$  mértékkel. Beppo Levi klasszikus monoton konvergenztétele az  $L^2 = L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$  Lebesgue térre a következőképpen fogalmazható: Ha m.m.  $x \in X$ -re

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \quad \text{és} \quad \sup_{n \geq 1} \int_X f_n^2 d\mu < \infty,$$

akkor létezik olyan  $f \in L^2$  függvény, amelyhez az  $\{f_n\}$  sorozat pontonként m.m. és  $L^2$ -normában is konvergál.

Legyen  $H$  szeparábilis komplex Hilbert tér,  $\phi$  egy hű, normál állapot [faithful, normal state] a  $H$ -n értelmezett korlátos lineáris operátorok  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  algebráján. Ekkor  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  az

$$\langle A|B \rangle := \phi(B^* A), \quad A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$

belső szorzattal ellátva komplex prehilbert tér.

Ennek teljessé tételét  $L^2 = L^2(\phi)$ -vel, belső szorzatát  $(\cdot|\cdot)$ -vel és normáját  $\|\cdot\|$ -vel jelöljük. A híres Gelfand-Naimark-Segal reprezentációs tétel szerint megadható olyan  $\pi$  egy-egyértelmű \*-homomorfizmus  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ -ból az  $L^2$ -en értelmezett korlátos lineáris operátorok  $\mathcal{L}(L^2)$  algebrájába és egy ciklikus, szeparáló [cyclic, separating]  $\omega \in L^2$  vektor, amelyekre

$$\phi(A) = (\pi(A)\omega|\omega), \quad A \in \mathcal{L}(H).$$

Bizonyítottuk [Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), 2559-2567], hogy Beppo Levi klasszikus monoton konvergencia tétele nem érvényes a nemkommutatív  $L^2$ -térben.

Tétel. Tetszőleges szeparábilis komplex  $H$  Hilbert téren megadható operátoroknak olyan monoton növekvő  $(A_n : n = 1, 2, \dots)$  sorozata, amelyre

$$\sup_{n \geq 1} \phi(A_n^2) < \infty,$$

de nem létezik olyan  $\xi \in L^2$  vektor, amelyre az alábbi két határérték bármelyike is fennállna:

$$\pi(A_n)\omega \xrightarrow{b} \xi \quad \text{és} \quad \|\pi(A_n)\omega - \xi\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Itt  $\xrightarrow{b}$  az ún. nyáláb [bundle] konvergenciát jelöli, amely a m.m. konvergenciát helyettesíti nemkommutatív terekben, és amelyet E. Hensz, R. Jajte és A. Paszkiewicz vezettek be, lásd [Studia Math., 120 (1996), 23-46].

### 3. APPROXIMÁCIÓLEMÉLET (MR 41)

Az alábbi függvényosztályokat Leindler László vezette be, lásd [Acta Sci. Math. Szeged, 43 (1981), 301-309]:

$$(H^\omega)^* := \{f \in C(\mathbb{T}) : \omega_2(f; t) = O(\omega(t))\},$$

ahol  $\omega = \omega(t)$  adott folytonossági modulus,  $\omega_2(f; t)$  pedig az  $f$  függvény símasági modulusa;

$$H(\omega; \beta, p) := \{f \in C(\mathbb{T}) : h_n(f; \beta, p) = O(\omega(\frac{1}{n}))\},$$

ahol  $\beta$  és  $p$  pozitív számok és

$$h_n(f; \beta, p) := \left\| \left\{ \frac{1}{(n+1)^\beta} \sum_{k=0}^n (k+1)^{\beta-1} |s_k(f; x) - f(x)|^p \right\}^{1/p} \right\|,$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $s_k(f; x)$  az  $f$  függvény Fourier sorának  $k$ -edik részletösszege, és  $\|\cdot\|$  a folytonos függvények  $C(\mathbb{T})$  terében értelmezett maximum norma.

Leindler László szintén bevezette a folytonos függvények  $\Omega_\alpha$ -val jelölt részosztályait  $0 \leq \alpha \leq 1$  esetén, amelyeket általánosított Lipschitz osztályoknak nevezett. A definíció természetes módon kiterjeszthető tetszőleges  $\alpha > 1$ -re is.

Bizonyítottuk a következő tételt [Acta Sci. Math. Szeged, 73 (2007), 637-647]. Ha  $\omega \in \Omega_\alpha$  valamely  $0 < \alpha < 2$ -re,  $\beta$  és  $p$  tetszőleges pozitív számok, akkor  $\beta > \alpha p$  esetén fennáll

$$H(\omega; \beta, p) \equiv (H^\omega)^*;$$

míg  $\beta \leq \alpha p$  esetén fennáll

$$H(\omega; \beta, p) \subseteq (H^\omega)^*.$$

Ez a tétel Leindler László tételét terjeszti ki az  $\alpha = 1$  esetről a  $0 < \alpha < 2$  esetekre.

#### 4. SZUMMÁLHATÓSÁG (MR 40)

(a) *J. Karamata elegendő Tauber feltételének élesítése szükséges és elegendő Tauber feltétellé*

Legyen  $P$  az  $\mathbb{R}_+$  félegyenesen értelmezett monoton nemcsökkenő függvény,

$$P(0) = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \infty.$$

Adott komplex-értékű  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$  függvényre vezessük be a következő jelöléseket:

$$s(x) := \int_0^x f(y)dy \quad \text{és} \quad \sigma(t) := \frac{1}{P(t)} \int_0^t s(x)dP(x), \quad t > 0,$$

feltéve, hogy  $P(t) > 0$ . Az

$$(3) \quad \int_0^\infty f(x)dx$$

formális integrált  $(W, P)$ -szummálhatónak [summable by weighted mean method determined by  $P$ ] nevezzük, ha a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \ell$$

véges határérték létezik. Nyilvánvaló, hogy ha az

$$(4) \quad \int_0^{\rightarrow \infty} f(x)dx := \lim_{x \rightarrow \infty} s(x) = \ell$$

improprius integrál létezik, akkor az  $(W, P)$ -szummálható is ugyanezen  $\ell$  értékhez.

Legyen  $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  szigorúan monoton növekvő, folytonos függvény, amelyre

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \infty.$$

A  $\rho$  függvényt  $P$ -re nézve megengedett függvénynek nevezzük, ha

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{P(\rho(t))}{P(t)} > 1.$$

Jelöljük  $\Lambda$ -val a  $P$ -re nézve a megengedett függvények összességét.

Bizonyítottuk [Publ. Math. Debrecen 67(2005), 65-78], hogy a (4) improprius integrál létezése akkor és csak akkor következik a (3) formális integrál  $(W, P)$ -szummálhatóságából, ha

$$\inf_{\rho \in \Lambda} \limsup_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{P(\rho(t)) - P(t)} \int_t^{\rho(t)} \{s(x) - s(t)\} dP(x) \right| = 0.$$

J. Karamata alábbi tétele [Bull. Acad. Serbe 2 (1935), 169-205] nyilván korolláriuma fentebbi tételünknek: Ha a (3) formális integrál  $(W, P)$ -szummálható és  $s$  lassan oszcillál [slowly oscillating]  $P$ -re nézve, amelyen azt értjük, hogy

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1+} \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{t \leq x \leq T} |s(x) - s(t)| = 0,$$

ahol

$$T := P^{-1}(\lambda P(t)), \quad t > 0;$$

akkor a (4) improprius integrál létezik.

(b) *I. J. Schoenberg Tauber tételének kiterjesztése számsorozatokról mérhető függvények sorozataira*

H. Fast [Colloq. Math., 2 (1951), 241-244] vezette be a statisztikus konvergencia fogalmát az  $\{s_k : k = 1, 2, \dots\} \subset \mathbb{C}$  számsorozatokra. Akkor írjuk, hogy

$$\text{st} - \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \ell,$$

ha minden  $\varepsilon > 0$ -ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{1 \leq k \leq n : |s_k - \xi| > \varepsilon\}| = 0.$$

I.J. Schoenberg bizonyította [Amer. Math. Monthly, 66(1959), 361-375], hogy valós számoknak egy  $(s_k)$  sorozata akkor és csak akkor konvergál statisztikusan  $\ell$ -hez, ha minden  $t \in \mathbb{R}$ -re fennáll

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{its_k} = e^{it\ell}.$$

Bizonyítottuk [Acta Math. Hungar., 114 (2007), 235-246], hogy egy  $s : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  mérhető függvényre akkor és csak akkor létezik a

$$\text{st} - \lim_{\nu \rightarrow \infty} s(\nu) = \ell$$

véges statisztikus határérték, ha minden  $t \in \mathbb{R}$ -re fennáll

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \int_0^a e^{its(\nu)} d\nu = \ell.$$

Ezt a tételt tetszőleges vektor-értékű  $s : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mérhető függvényekre is kiterjesztettük, ahol  $m$  és  $n$  adott természetes számok.