A kutatás címe: **Hiperbolikus dinamikai rendszerek: attraktorok és korreláció lecsengés**, érdeklődésünknek és munkásságunknak a hiperbolikus elméleten belüli két alapvető irányát tükrözte. Ennek megfelelően ezt a két kérdéskört külön tárgyaljuk.

I. BILIÁRDOK ÉS A LORENTZ-FOLYAMAT: KORRELÁCIÓ-LECSENGÉS ÉS SZOCHASZTIKUS TULAJDONSÁGOK.

ELŐZMÉNYEK:

1. 1998-ban jelent meg az Annals of Mathematics-ben Young áttörést jelentő torony-konstrukciója ([Y 98]), amelynek segítségével először sikerült exponenciális korreláció-csökkenést igazolni kétdimenziós szóró biliárdokra. Ehhez kapcsolódóan pályázati munkatervünk egyik fő célkitűzése volt exponenciális korrelációlecsengés bizonyítása magas dimenziós szóró biliárdok egy osztályára. Ezt Young módszere ill. annak Chernov által adott módosítása segítségével terveztük. A célt még 1998-ban tűztük ki, ám akkor számos olyan nehézségre derült fény - mindenek előtt a szingularitások struktúrájára vonatkozóan - ami a fő cél előtt feltétlenül megoldandó mellékproblémákra világított rá. Így a pályázati időszak előtt és alatt is közlemények sora született a magas dimenziós korrelációlecsengés irányában.

2. A Lorentz-folyamat — definiciója szerint — a tórikus biliárd $\mathbb{Z}^d$-kiterjesztése, és mint ilyen természetes — determinisztikus — dinamikai modellje a Brown-mozgásnak. Young torony-konstrukciója azt is lehetővé teszi, hogy a Lorentz folyamatra olyan valószínűségi állításokat bizonyítsunk, amelyek a Brown-mozgás sztochasztikus modelljére: a véletlen bolyongásra jólismertek. (Példa a centrális határeloszlástétel, amit a gyengébb, szubexponenciális korrelációlecsengés segítségével Bunimovich és Sinai már 1981-ben megmutattak. Mi itt finomabb tulajdonságokra, pl. lokális határeloszlástételekre és az ezekből adódó rekurrencia-tulajdonságokra (v. ö. Pólya klasszikus tétele) gondolunk.) Az utóbbi években a $d = 2$ esetben az ezirányú kutatások az érdeklődés középpontjába kerültek (l. [ESI]).

3. A pályázati ciklus közepén, 2006-ban készült el Chernov és Dolgopyat nagyívű munkája "Brownian Brownian motion" címmel (v. ö.

[ChD 07]), amely új eszközöket adott kezünkbe sztochasztikus tulajdonságok és speciálisan a szingularitási struktúra problémáinak kezelésére is. Teamünknek, a mű lektorai lévén, azonnal lehetősége lett az új és erős módszereket alkalmaznia – részben Dolgopyattal közös kutatásban.

EREDMÉNYEK:

1. **Korrelációlecsengés szinguláris hiperbolikus dinamikai rendszerekben**

   (a) A pályázati időszakban — elsőként — (kétdimenziós) puha biliárdok egy osztályára általánosítottuk Young és Chernov eredményét. Ez a munka - túl azon, hogy önmagában is érdekes probléma megoldása - egyrészt lehetővé tette a módszer technikai részleteinek maradéktalan megértését, másrészt módot adott egy olyan modell-család azonosítására, ahol a szingularitási struktúra egyszerűbb, mint a klasszikus biliárdok esetén, így a korrelációlecsengés bizonyítása során a technikai nehézségek egy része nem lép fel. Az eredményeket az [BT 04] cikkben foglaltuk össze.

   (b) Ezen vonal logikus folytatásaként magas dimenziós puha biliárdokat vizsgáltunk. Ezen rendszerek exponenciális korrelációlecsengésének bizonyítása az előzőekben leírtak szerint (bizonyos speciális esetekben) nélkülözhet bizonyos technikai nehézségeket. Más szempontból viszont a probléma nehezebb a klasszikus biliárdok eseténél, hiszen magas dimenziós puha biliárdok kaotikus viselkedését tekintve semmilyen korábbi eredményre nem támaszkodhattunk. Így első lépésként olyan rendszereket kellett keresnünk, ahol legalább a hiperbolicitás bizonyítható. Végül szinte minden olyan, a puha szórótesteket leíró potenciálra sikerült a hiperbolicitást bizonyítanunk, amire korábban két dimenzióban a hiperbolicitás ismert volt. Ezek az eredmények az [BT 06] cikkben jelentek meg.

   (c) Az említett [ChD 07] dolgozat gondolatával az általuk két dimenzióban bevezetett metrikát tudtuk úgy általánosítani a magas dimenziós esetre, hogy a dinamika iteráltjainak használata lényegében elkerülhetővé vált, így csak az egylépéses dinamika sima szingularitásait kellett kezelni. Ennek segítségével végre sikerült elérnünk az 1998-ban kitűzött célt, és exponenciális korrelációlecsengést bizonyítani az eredetileg tervezett magas dimenziós szóró biliárd osztályra: nevezetesen azokra a sarokpont nélküli, véges horizontú szóró biliárdokra, amikre teljesül az úgynevezett "szubexponenciális komplexitási feltétel". Ez a korrelációlecsengés témájában egyértelműen a pályázati ciklus fő eredménye, mely a [BT 08] cikkben jelenik meg.

(d) Az előbbi eredmény bizonyítása során az a szokatlan helyzet állt elő, hogy hiperbolikus biliárdok egy széles osztályára rendelkezésre állt az exponenciális korrelációlecsengés bizonyításának minden technikai feltétele, kivéve az ergodicitást. Ennek az az oka, hogy a szingularitások általunk felfedezett bonyolult struktúrája sokáig az ergodicitás bizonyítását is csak algebrai szórótestek esetén engedte meg, ami az előbbi eredménynek nem feltétele. Ezért megalkottuk az ergodicitásnak egy új bizonyítását, ami - algebra helyett - azokra az erős geometriai tulajdonságokra épít, amik a korrelációlecsengés bizonyításához is kellettek. Így az előbbi eredményben érintett (és nem algebrai) rendszerekre párhuzamosan nyert bizonyítást az ergodicitás és az exponenciális korrelációlecsengés. Ezzel az eredménnyel válik - reményeink szerint - lehetővé a közeli jövőben az is, hogy a korábban említett magas dimenziós puha biliárdok vizsgálatában tovább lépjünk, hiszen itt is nyitott az ergodicitás kérdése. Az eredményt Pavel Bachurin társszerzőnkkel közösen a [BBT 08] cikkben közöljük.

(e) Az eddig vázolt eredményekre - és azok közvetlen előzményeire - épül Tóth Imre Péter 2006-ban született doktori disszertációja: Ergodicity and Correlation Decay in Billiards. Lelőhely: http://www.math.bme.hu/ mogy/publications/

2. **A Brown mozgás dinamikai elmélete: a Lorentz-folyamat sztochasztikus tulajdonságai.**

   (a) Befejeztük végtelen horizontú síkbiliárdban a lokális határeloszlás tétel, és a rekurrencia bizonyítását. Ezek a kérdések a korábbi véges horizontú eset (v. ö. [SzV04]) szerves folytatásának tekinthetők, azonban számos új problémát vet fel a végtelen horizont miatti nem-korlátos szabad úthossz. Bleher 1992-es nevezetes sejtését igazolva erre a függvényre, pontosabban összegeire, bizonyítottunk szuperdiffúzív (konkrétan $\sqrt{n \log n}$) skálázás mellett normális határeloszlást. Továbbá az ennél jóval finomabb lokális határeloszlást, valamint ennek alkalmazásaként a rekurrenciát is bebizonyítottuk. Az eredmények, melyek megfelelnek a korábbi várakozásoknak, a [SzV07] dolgozatban lettek publikálva.

(b) A kutatás folytatásaként az a kérdés vetődött fel, hogy a limesz-folyamat, a brown-mozgás, milyen egyéb tulajdonságai figyelhetők meg a Lorentz-folyamaton. Már az előbbiekben emlegetett rekurrencia is ilyen jellegű kérdésfelvetés volt, a továbbiakban még finomabb valószínűségi kérdésekre koncentráltunk.

Dmitry Dolgopyat-tal együttműködve a következő kérdésekkel foglalkoztunk:

- Első visszatérés idejének aszimptotikája,
- Lokális idő határeloszlása,
- Integrálható függvény ergodikus átlagának határeloszlása,
- Távolról indított részecske, origó körüli halmaz első elérési idejének aszimptotikája
- Az első elérés féziseloszlásának aszimptotikája.

Ezekkel a kérdésekkel csak véges horizont esetén foglalkoztunk, mind a síkbeli Lorentz-folyamatra, mind a Lorentz-csatornára, mind diszkrét, mind folytonos időben, valamint két részecske találkozásának idejét is vizsgáltuk.

Minden esetben az egyszerű szimmetrikus bolyongás ismert eredményei bizonyultak a helyes válasznak. Az eredményeket a [DSzV08] cikkben publikáltuk.

(c) A továbbiakban a nem-periodikus Lorentz-folyamatok azon eseteit vizsgáltuk, amik előállnak periodikus rendszerek véges perturbációjaként. A következő négy modellben bizonyítottuk a gyenge invariancia elvet:

- Síkbeli, periodikus Lorentz folyamat véges sok ütközőjét megváltoztatjuk (erre vonatkozott Sinai 1981-es sejtése);

- Tükröző falat vezetünk be a periodikus Lorentz-folyamatban, a falat metsző ütközőket eltávolítjuk.
- Periodikus Lorentz-csatornában vezetünk be tükröző falat,
- Periodikus Lorentz-csatornában Gauss-termosztátos, kompakt tartójú külső teret vezetünk be

Mindegyik esetben feltevés volt, hogy a kiindulási periodikus modell véges horizontú kellett legyen. Az eredményeket a [DSzV09] kéziratban írtuk le.

3. **Rokon eredmények**

   (a) **Nem-egyenletesen hiperbolikus biliárdok statisztikus tulajdonságai**

   Igen fontos példa a Bunyimovics stadion, amely a végtelen horizontú Lorentz folyamathoz hasonlóan $O(1/n)$ nagyságrendű korrelációcsökkenést, valamint nem-standard határeloszlástételt mutat. A Bunyimovics stadion részletes vizsgálatával, ezen belül a nem-standard határeloszlástétel bizonyításával foglalkozik Bálint Péter és Sebastien Gouezel közös dolgozata ([BG 06]). A közleményben kidolgozásra kerülő általános módszerek (pl. Young toronyokhoz kapcsolódó operátorok perturbatív vizsgálata) szoros kapcsolatban állnak Szász Domokos és Varjú Tamás Lorentz folyamatra vonatkozó eredményeivel ([SzV04], [SzV07]).

   (b) **Forgatható ütközőkkel rendelkező Lorentz gáz (vagy rotor modell)**.

   A modell vizsgálata felé tett első lépésként érdemes megvizsgálni, hogyan jelentkezik a rotor kölcsönhatás egyszerűbb biliárdgeometriákban. Bálint Péter és Serge Troubetzkoy munkájában ([BTr 04a]) a – hagyományos biliárd kölcsönhatás esetén integrálható – körgyűrű alakú tartományban vezeti be a rotor kölcsönhatást. Ennek hatására az integrálható jelleg felbomlik, és a geometriai paraméterek megválasztásától függő, változatos ergodikus viselkedést kapunk.

   (c) Az alábbi eredmény Szász Domokosnak és Simányi Nándornak a kemény golyó rendszerek ergodicitására vonatkozó korábbi kutatásaihoz kapcsolódik:

Kemény golyó rendszereket hagyományosan a tóruszon vizsgálnak, a fizikai alkalmazások szempontjából azonban fontos, és a megmaradó mennyiségek számának csökkenése miatt nehéz kérdés a másmilyen alakú tartományok (zárt határfeltételek) esetére való kiterjesztés. Bálint Péter és Serge Troubetzkoy közös munkája ([BTr 04b]) két kemény korong dinamikai rendszerére bizonyít hiperbolicitást és ergodicitást, integrálható sokszög alakú tartomány (azaz négyzet, szabályos háromszög illetve ezek felezésével kapott derékszögű háromszögek) esetére. A módszer egy izomorf hengerbiliárd vizsgálata.

(d) A következő eredmény a BME Sztochasztika Tanszék munkatársainak - Szász Domokosnak és Tóth Bálintnak - korábbi kutatásaihoz kapcsolódik:

A jelölt részecske asszimptotikus viselkedését vizsgáltuk az 1 dimenziós Rayleigh gázban, kis tömeg határesetben ([BTT07]). A problémát visszavezettük egy olyan 1 dimenziós rendszer vizsgálatára, amelyben két kitüntetett szomszédos részecske között taszító potenciál hat. Az új modellt matematikailag szigorú eszközökkel, valamint számítógépes szimulációkkal vizsgálva érdekes, részben a korábbi kutatásokat új megvilágításba helyező eredmények adódtak a jelölt részecske asszimptotikus szórásával kapcsolatban.

II. HIPERBOLIKUS RENDSZEREK ATTRAKTORAI:

ELŐZMÉNYEK

Az iterált függvény rendszerek (IFS) olyan dinamikai rendszerek amikor adott egy bizonyos metrikus teret (esetünkben az egyenest) önmagába képező véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok folytonos függvény és azon valószínűségek listája, melyek ezen függvényeknek az iteráció során az előfordulását meghatározzák. Ezen függvények vagy mindegyike kontrakció vagy legalább a rendszer együttesen átlagosan összehúzó. IFS-ek elméletének számtalan alkalmazása van az információ elméletben, képtömörítésben és a természettudományokban. A dinamikus rendszerek elméletében az IFS-ek legtermészetesebben úgy fordulnak elő mint valamely tágító leképezés lokális inverzeiből álló függvények rendszere. Az IFS függvényeinek iterálása során kapjuk az adott IFS attraktorát és az attraktoron értelmezett úgy nevezett invariáns mértékeket. Ezen objektumok Hausdorff dimenzióját illetve az invariáns mértékek esetében az abszolút folytonosságot vizsgáltuk a [FST 06], [ST 06], [T 08] cikkekben.

A tangenciális homoklinikus pontok létezésének fontos szerepe van a felületen vett sima diffeomorfizmusok dinamikájának megértése szempontjából. Palis és Takens ilyen diffeomorfizmusok egy paraméteres családjában vizsgálta, hogy milyen nagy azon paraméterek halmaza, amelyekre tangenciális homoklinikus pontok léteznek. Az volt a sejtésük, hogy vagy az igaz, hogy ezen paraméter halmaz "nagy" abban az értelemben, hogy tartalmaz egy intervallumot vagy pedig kicsi abban az értelemben, hogy Lebesgue szerint nulla mértékű. Ezen sejtés közvetlen kapcsolatba hozható azzal a kérdéssel, hogy legalábbis tipikusan igaz-e hogy az egyenesen vett Cantor halmazok algebrai különbség halmaza vagy tartalmaz intervallumot vagy Lebesgue szerint nulla mértékű. Ezt a kérdést vizsgálta Simon Károly Michel Dekking-el közös dolgozatában a véletlen Cantor halmazok esetére a [DS 08] cikkben.

EREDMÉNYEK:

1. A [FST 06] cikkünkben olyan iterált függvény rendszereket (IFS) vizsgálunk az egyenesen, melyek nem kontraktív leképezésekből állnak. Olyan példákkal foglakoztunk, amelyekben lehetséges, egy az IFS minden függvényére közös átlagosan taszító fix pont. Bebizonyítjuk, hogy noha általában végtelensok invariáns mérték van, ezek közül egy olyan van ami nem atomos és felső becslést adunk ezen mérték Hausdorff dimenziójára.

2. A [ST 06] cikkünk Solomyak-nak a végtelen Bernoulli konvoluciók abszolút folytonosságára vonatkozó tételének általánosítását tartalmazza. Nevezetesen igazoljuk, hogy ha $m \geq 2$ és ν_λ az $Y_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ véletlen összeg eloszlása, ahol $a_n \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ azonos $1/m$ valószínűséggel választva minden lépésben függetlenül. Akkor Lebesgue majdnem minden $\lambda \in (1/m, 1)$-re a ν_λ mérték abszolút folytonos a Lebesgue mértékre

A [T 08] cikkben Tóth Hajnal a fentihez hasonló problémát vizsgált azzal a különbséggel, hogy itt a valószínűségek különbözőek. Nevezetesen tekinti az $S_1(x) = \lambda x - 1, S_2(x) = \lambda x + 1$ IFS-t, ahol az $S_1(x)$-et p az $S_2(x)$-et $1 - p$ valószínűséggel alkalmazzuk. Peres és Solomyak megmutatták, hogy ha p nem nagyon tér el 1/2-től akkor azt kapjuk amit várunk. Vagyis ha $1/3 < p < 2/3$, akkor a fenti IFS-re és legalábbis Lebesgue majdnem minden λ-ra az invariáns mérték abszolút folytonos ha az entropia/ Lyapunov exponens hányados nagyobb mint 1 és szinguláris egyébként. Ezen eredménynek minden $0 < p < 1$-re való kiterjesztésében ért el részeredményt Tóth Hajnal.

3. A cikkben [DS 08] az intervallumon definiált véletlen Cantor halmazokat tekintünk. Arra a kérdésre keresünk választ, hogy ha a Hausdorff dimenziók összege nagyobb mint 1, akkor vajon teljesül-e egy valószínűséggel, hogy a véletlen Cantor halmazok különbsége tartalmaz intervallumot? Ha a dimenziók összege 1-nél kisebb erre nincs esély. Eredményünk nem akkor és csak akkor jellegű de sok érdekes kérdést tisztáz. A cikkben olyan determinisztikus önhasonló Cantor halmazokra is tekintettünk, melyek $f_i(x) = \frac{1}{M} \cdot x + \frac{i}{M}, i \in \{0, \dots M - 1\}$ alakú függvényekből álló IFS generál. Ebben az esetben a kérdést teljesen megválaszoltuk.

Hivatkozások

[BBT 08] Pavel Bachurin, Bálint Péter, Tóth Imre Péter: *Local ergodicity for systems with growth properties including multi-dimensional dispersing billiards*; Israel Journal of Mathematics, megjelenés alatt.

[BG 06] Bálint Péter, Sebastien Gouezel: *Limit theorems in the stadium billiard*; Communications in Mathematical Physics, 263 (2006) 461-512.

[BT 04] P. Bálint, P. Tóth: *Mixing and its rate in 'soft' and'hard' billiards motivated by the Lorentz Process*, Physica D 187, 128-135 (2004).

[BT 06] Bálint Péter, Tóth Imre Péter: *Hyperbolicity in multi-dimensional Hamiltonian sytems with applications to soft billiards;* Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A, 15, 37-59 (2006).

[BT 08] Bálint Péter, Tóth Imre Péter: *Exponential decay of correlations in multi-dimensional dispersing billiards;* Annales Henri Poincaré, megjelenés alatt.

[BTr 04a] Bálint Péter, Serge Troubetzkoy: *Rotor interaction in the annulus billiard;* Journal of Statistical Physics 117, 681-702 (2004)

[BTr 04b] Bálint Péter, Serge Troubetzkoy: *Ergodicity of two hard balls in integrable polygons;* Nonlinearity 17, 2069-2090 (2004)

[BTT07] Bálint Péter, Tóth Bálint, Tóth Péter: *On the zero mass limit of tagged particle diffusion in the 1-d Rayleigh gas*; Journal of Statistical Physics, 127, 657-675 (2007)

[ChD 07] N. Chernov and D. Dolgopyat *Brownian Brownian Motion–1,* pp. 200, to appear in Memoirs AMS.

[DS 08] M. Dekking, K. Simon, *On the size of the algebraic difference of two random Cantor sets.* Random Structures and Algorithms. 32 (2008) 205-222.

[DSzV08] Dmitry Dolgopyat, Szász Domokos, Varjú Tamás: *Recurrence Properties of Planar Lorentz Process*, Duke Mathematical Journal (2008) vol 142 no 2:241-281

[DSzV09] Dmitry Dolgopyat, Szász Domokos, Varjú Tamás: *Limit Theorems for Locally Perturbed Planar Lorentz Processes*, beküldve a Duke Mathematical Journal-hez.

[ESI] Trimester *Hyperbolic Dynamical Systems* in Erwin Schrödinger International Institute for Mathematical Physics, May-July 2008.

[FST 06] A.H. Fan, K. Simon, H.R. Toth, *Contracting on average random IFS with repelling fixpoint.* Journal of Stat. Phys. J. Stat. Phys. 122 (2006), no. 1, 169–193.

[ST 06] K. Simon, H.R. Tóth, *The absolute continuity of the distribution of random sums with digits* $\{0, 1, \ldots, m-1\}$*.* Real Anal. Exchange 30 (2004/05), no. 1, 397–409. 122 (2006), no. 1, 169–193.

[SzV04] Szász Domokos, Varjú Tamás: *Local limit theorem for the Lorentz process and its recurrence in the plane,* Ergodic Theory and Dynamical Systems, 24, 257-278, 2004

[SzV07] Szász Domokos, Varjú Tamás: *Limit Laws and Recurrence for the Planar Lorentz Process with Infinite Horizon*, Journal of Statistical Physics (2007) 129: 59-80

[T 08] Tóth, Hajnal R. *Infinite Bernoulli convolutions with different probabilities.* Discrete Contin. Dyn. Syst. 21 (2008), no. 2, 595–600.

[Y 98] Young L.–S. *Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity*, Ann. Math. **147** (1998) 585–650.