Zárójelentés a TS044782 sz.
A polinomiális-inverz kép módszer és annak alkalmazásai a matematikai analízisben
c. „Tudományos Iskola" OTKA pályázatról

Témavezető: Dr. Totik Vilmos

A pályázat erősen kapcsolódik a komplex függvénytanhoz, a sorelmélethez és potenciálelmélethez. A kutatás az alábbi főbb kérdések köré csoportosult.

1. Harmonikus mértékek és Green függvények becslése végtelenszer összefüggő tartományon

A fő kutatási eredményeket egy elkészült, és a Memoirs of the American Mathematical Society könyvsorozatban 2006-ban megjelenő monográfia (Totik V., Metric Properties of Harmonic Measures) tartalmazza ([1]). Ennek alapkérdése, hogy metrikus tulajdonságok hogyan befolyásolják Green függvények és harmonikus mértékek simaságát. Elsősorban Green függvények, egyensúlyi mértékek és harmonikus mértékek pontos becsléseit tekintjük olyan tartományokon, amelyek végtelen sokszorosan összefüggők. Ilyen tartományokra nagyon kevés ismert pl. a harmonikus mértékekről, így a felhasználandó eredményeket is meg kell találni és igazolni kell.

A $\mathbf{C} \setminus E$ Green függvényének simaságát azzal a

$$\Theta_E(t) = |[0,t] \setminus E^*|$$

függvénnyel mérjük, amelynél E^* azon r sugarak halmaza amelyekre az origó körüli r sugarú kör metszi az E halmazt. Mármost igazolásra került, hogy

$$g_{\mathbf{C}\setminus E}(z) \le C\sqrt{|z|}\int_{|z|}^{1} \frac{\Theta_E(t)^2}{t^3}\,dt, \tag{5}$$

és ez már pontos abban az értelemben, hogy minden Θ monoton növekvő függvényhez van olyan $E \subseteq [0,1]$ halmaz, hogy $\Theta_E(t) \le \Theta(t)$, és

$$g_{\mathbf{C}\setminus E}(-r) \ge c\sqrt{r}\int_{r}^{1} \frac{\Theta(t)^2}{t^3}\,dt.$$

Hasonló állítások igazak egyensúlyi mértékekre. Ha μ_E az egyensúlyi mérték, akkor

$$\mu_E([0,\delta]) \le C\sqrt{\delta}\exp\left(C\int_{\delta}^{1} \frac{\Theta_E(t)^2}{t^3}\,dt\right),$$

valamilyen abszolút C konstanssal, és ez már pontos abban az értelemben, hogy ha Θ adott, akkor van olyan E, hogy $\Theta_E(t) \le \Theta(t)$ minden t-re, de

$$\mu_E([0,\delta]) \ge c\sqrt{\delta}\exp\left(c\int_\delta^1 \frac{\Theta_E(t)^2}{t^3}dt\right)$$

igaz minden δ-ra valamilyen $c > 0$ konstanssal. Teljesen analóg eredmények igazak harmonikus mértékek becslésére kompakt $E \subset \mathbf{C}$ esetén.

A fentemlített monográfiában a másik végletet is megvizsgáltuk, amikoris Lebesgue mértékre nézve a halmaz nagyon kicsi, viszont szép struktúrával rendelkezik. Ezen Cantor-típusú halmazokra vonatkozó eredmények párhuzamosnak mondhatók a sűrűséget használó eredményekkel, de megengedik, hogy a halmaz (mérték szempontjából) egyáltalán ne legyen sűrű, akár nullamértékű is lehet. Legyen $\{\epsilon_n\}$ egy sorozat a $[0,1)$ intervallumból, és készítsük el ezzel a sorozattal a szokásos Cantor halmaz megfelelőjét azzal a változtatással, hogy az n-edik lépésben a még megmaradó (2^n darab) intervallumok középső ϵ_n-ed részeit távolítjuk el (az $\epsilon_n = 1/3$ választással adódik az eredeti Cantor halmazt). Az derült ki, hogy az így megkonstruált E halmazra $\mathbf{C} \setminus E$ Green függvénye akkor és csakis akkor Lip 1/2 (ennél simább nem lehet) ha $\sum_n \epsilon_n^2 < \infty$. Ezen eredmény erősségét mutatja, hogy az $\epsilon_n = 1/n$ választással olyan nullmértékű kompakt halmazt kapunk, amelyre a Green függvény optimális simaságú.

A fenti eredményeket alkalmaztuk Bernstein és Markov típusú egyenlőtlenségekre; Phragmén-Lindelöf típusú tételekre; gyorsan csökkenő polinomokra és Remez és Schur típusú egyenlőtlenségekre.

A beszámoló végén, mellékletként az I. Függelékben, csatoljuk az [1] monográfia főbb eredményeinek összefoglalóját (maga a monográfia 163 oldalas, szükség esetén az is elérhető). Bár ez a monográfia még csak kézirat formában létezett eddig, már eddig is több dolgozatot motivált (pl. V. V. Andrievskii, The highest smoothness of the Green function implies the highest density of a set, *Arkiv för Matematik*, **42**(2004), 217-238; V. V. Andrievskii, On the Green function for a complement of a finite number of real intervals, *Constr. Approx.*, **20**(2004), 4, 565–583; V. V. Andrievskii V.V., On sparse sets with the Green function of the highest smoothness, *Comput. Methods Funct. Theory* (to appear); V. V. Andrievskii, On optimal smoothness of the Green function for the complement of a Cantor-type set, *Constr. Approx.* (to appear)).

2. A polinom-inverz kép módszer és polinom-approximáció

Ugyancsak az [1] monográfia tartalmazza a pályázat címében szereplő polinomiális-inverz kép módszer egy alkalmazását. Ennek segítségével sikerült az alábbi eredményt igazolni. Jelölje $\mathcal{E}_n(f,E)$ az f függvény E halmazon legfeljebb n-ed fokú polinomokkal vett legjobb approximációjának hibáját. Bernstein híres, majd' egy évszázados tétele szerint ha p pozitív de nem páros egész szám, akkor

$$\lim_{n\to\infty} n^p \mathcal{E}_n(|x|^p, [-1,1]) = \sigma_p$$

létezik, pozitív, és véges, továbbá $x_0 \in (-1,1)$-re

$$\lim_{n\to\infty} n^p \mathcal{E}_n(|x-x_0|^p, [-1,1]) = (1-x_0^2)^{p/2}\sigma_p.$$

Mármost tetszőleges kompakt halmazra a polinomiális-inverz kép módszerrel ennek kiterjesztéseként igazoltuk: ha $E \subset \mathbf{R}$ kompakt és $x_0 \in E$ az E belső pontja, akkor

$$\lim_{n\to\infty} n^p \mathcal{E}_n(|x-x_0|^p, E) = (\pi\omega_E(x_0))^{-p}\sigma_p,$$

ahol ω_E az egyensúlyi mérték sűrűségét jelöli.

Cantor halmazokra a megfelelő kérdéskörben kaptuk, hogy ha E az $\{\epsilon_i\}$ paraméterekkel előállított Cantor halmaz, akkor ($p>0$ nem egész esetén)

$$\liminf_{n\to\infty} n^{2p}\mathcal{E}_n(x^p, E) > 0.$$

akkor és csakis akkor áll fenn, ha $\sum_i \epsilon_i^2 < \infty$.

A polinom-inverz kép módszerről a témavezető a Fourth European Congress of Mathematicians konferencián meghívott előadást tartott (ld. [35]).

3. Polinom-inverz kép módszer és polinom-egyenlőtlenségek

Ugyancsak a polinom-inverz kép módszert alkalmaztuk a komplex sík görbéin illetve görbékkel határolt tartományain Bernstein-Markov típusú eredmények igazolására. Ez a módszer működik lemniszkáták esetén [24], és onnan általános halmazokra lemniszkátával való közelítéssel sikerült továbblépni [26]. Ennek lényege a Hilbert-féle lemniszkáta-tétel kiterjesztése érintkező lemniszkáták esetére. A lemniszkáta-tétel azt mondja ki, hogy két görbesereg közé, amelyekből az egyik a másik belsejében van, mindig elhelyezhető lemniszkáta (egy polinom szintvonala). Az említett kiterjesztés szerint ez még akkor is megtehető, ha a görbék véges sok pontban érintik egymást, de ott a görbületük különböző, ld. [26]. A fő eredmény ezen a területen a következő: ha K bizonyos tulajdonságú kompakt halmaz a síkon (K belsejének a lezártja K, és K komplementere összefüggő), és $z_0 \in \partial K$ a K határának egy pontja amely környezetében K határa C^2-sima, akkor

$$|P_n'(z_0)| \le (1+o(1))n\frac{\partial g_{\mathbf{C}\setminus K}(z,\infty)}{\partial \mathbf{n}_{z_0}}\|P_n\|_K,$$

ahol P_n tetszőleges n-ed fokú polinom, $g_{\mathbf{C}\setminus K}(z,\infty)$ a K komplementerének Green függvénye végtelen pólussal, a jobb oldalon e Green függvénynek a normális iránti deriváltja szerepel, és a $o(1)$ egy olyan mennyiséget jelöl, ami független P_n-től, és P_n-ben egyenletesen tart 0-hoz ha $n \to \infty$. Itt a $\partial g_{\mathbf{C}\setminus K}(z,\infty)/\partial \mathbf{n}_{z_0}$ faktor pontos, semmilyen kisebbel nem cserélhető fel, és az is igaz, hogy a $o(1)$ tag sem hagyható el. A fenti becslés tehát sima határ esetén megadja az aszimptotikusan pontos Markov faktort, ami, általánosságát tekintve, igen figyelemre méltő eredmény.

Egy kapcsolódó terület L^p-egyenlőtlenség bizonyítása ezzel a módszerrel. A kezdeti lépések biztatók arra, hogy ez a módszer sikerrel alkalmazható ebben az irányban is; de az ez irányú folyó kutatások még nem záródtak le.

4. Green függvények Hölder-folytonossága

Sikerült egy fontos problémát megoldanunk: ez Green függvények Hölder folytonosságának jellemzése határpontokban. Az eredmények a Lennart Carlesonnal közös [1] dolgozatban kerültek publikálásra 2004-ben. Ez egyrészt egy Wiener típusú karakterizációját adja annak, hogy ha a határ a $[0,1]$ intervallumnak része, akkor mikor lesz a Green függvény Lip $1/2$ az origó körül, másrészt jellemzi a Lip α simaságot (valamilyen pozitív $\alpha > 0$-ra) pl. olyan tartományok esetén amelyek teljesítik a kúpfeltételt. Jelölje $D_r = \{z \,|\, |z| < r\}$ az origó középpontú r sugarú körlapot, és egy síkbeli E kompakt halmazra legyen

$$E^n = E \cap (\overline{D}_{2^{-n+1}} \setminus D_{2^{-n}}) = \left\{ z \in E \,\middle|\, 2^{-n} \le |z| \le 2^{-n+1} \right\}$$

valamint

$$\mathcal{N}_E(\epsilon) = \{ n \in \mathbf{N} \,|\, \operatorname{cap}(E^n) \ge \epsilon 2^{-n} \}.$$

[1]-ben az egyik fő probléma a releváns Green függvény Hölder-folytonosságának, jellemzése, azaz

$$g_\Omega(z,\infty) \le C|z|^\kappa$$

mikor igaz valamilyen C, κ számokkal. Itt Ω az E komplementerének végtelen komponense, és $g_\Omega(z,\infty)$ ennek Green függvénye végtelen távoli pólussal. Igaz ármost a következő tétel. Legyen E olyan kompakt halmaz a síkon amelyre a 0 pont az Ω határpontja. Feltételezzük továbbá, hogy Ω tartalmaz egy 0 csúcsú kúpot, vagy pedig van olyan $\gamma < 1/4$, hogy

$$\operatorname{cap}(E \cap \overline{D}_r) \le \gamma r, \qquad 0 < r < r_0 \tag{1}$$

fennáll valamilyen $r_0 > 0$-val (itt $\operatorname{cap}(\cdot)$ a logaritmikus kapacitást jelöli). Ekkor a következők ekvivalensek:

a) A g_Ω Green függvény Hölder-folytonos 0-ban.

b) $\mathcal{N}_E(\epsilon)$ pozitív alsó sűrűségű valamilyen $\epsilon > 0$-ra.

Továbbá **b)**-ből **a)** minden feltétel nélkül igaz, de a fordított implikációhoz kell további feltétel, mint pl. a kúpfeltétel vagy (1).

[1] másik fő tétele az optimális Hölder $1/2$ tulajdonság karakterizációja a számegyenesen: Legyen $E \subset [0,1]$, $I_k = [0, 2^{-k}]$, és rögzített $0 < \epsilon < 1/3$-al legyen

$$E_k = (E \cap I_k) \cup [0, \epsilon 2^{-k}] \cup [(1-\epsilon)2^{-k}, 2^{-k}],$$

valamint $\theta_k = 2^k(\operatorname{cap}(I_k) - \operatorname{cap}(E_k))$. Ekkor a $g_{\overline{\mathbf{C}} \setminus E}$ Green függvény akkor és csakis akkor Hölder $1/2$ folytonos az origóban, ha $\sum_k \theta_k < \infty$.

Hasonló kérdéseket magasabb dimenzióban és Newton-potenciálra Toókos Ferenc vizsgált. [32] karakterizációt ad kúpfeltétel mellett Hölder-folytonosságra, amellyel megoldja M. Mazy'a egy 40 éves problémáját. [33] quantitatív becsléseket tartalmaz a halmaz sűrűségére a Green függvényen keresztül, amely eredmények általánosítják V. V. Andrievskii megfelelő tételét, miszerint a Green függvény optimális (Hölder $1/2$) simasága maga után vonja, hogy az adott pontban a halmaz 1 sűrűségű kapacitás szempontjából (Lebesgue-mértékre nézve akár 0 sűrűségű is lehet).

[34] három dolog ekvivalenciáját igazolja:

- A Green függvény $g_{\mathbf{C}\setminus E}(z,\infty)$ Lip 1 a z_0-ban (lehető legsimább viselkedés)
- $|P_n'(z_0)| \le Cn\|P_n\|_E$ (minimális, $O(n)$ nagyságú lokális Markov konstansok)
- $\mu_E(D_r(z_0)) \le Cr$, ahol μ_E az E egyensúlyi mértéke (Lipshitz-típusú feltétel az egyensúlyi mértékre).

5. Ortogonális polinomok

Egy Turán Pál által kezdeményezett kérdéskör végleges megoldásaként Barry Simon és a témavezető igazolta ([30]) a következőt. Legyen $1 \le n < N$, legyen adott egy Φ_n 1 főegyütthatós polinom amelynek minden zérushelye az egységkörben van, legyen továbbá $a_1, \ldots, a_{N-n}$ $N-n$ pont az egységkörben. Ekkor van olyan μ mérték az egységkörön, hogy a μ-hoz tartozó n-edik ortogonális polinom éppen Φ_n, és a megfelelő N-edik ortogonális polinomnak az $a_1, \ldots, a_{N-n}$ mind zérushelyei. Jelben: ha $\Phi_n(\mu, z)$ a μ-hoz tartozó n-ed fokú (1 főegyütthatós) polinom, akkor $\Phi_n(\mu, z) \equiv \Phi_n(z)$ és $\Phi_N(\mu, a_j) = 0$, $1 \le j \le N-n$; azaz az n-ed fokú polinom, és e mellett az N-ed fokú polinom $N-n$ zérushelye szabadon előírható.

Ebből az eredményből következik univerzális mérték létezése az egységkörön: van olyan μ, hogy bármely, az egységkörlemezen adott ν valószínűségi mértékhez van olyan $\{n_k\}$ sorozat, hogy a $\Phi_{n_k}(\mu, z)$ aszimptotikus zéruseloszlása éppen a ν mérték. Turán eredeti kérdése az volt, hogy van-e olyan μ az egységkörön, hogy a hozzá tartozó ortogonális polinomok zérushelyei az egységkörben sűrűn helyezkednek el.

[2] egy új módszert fejlesztett ki ortogonális polinomok zérushely-eloszlásának vizsgálatára. Az eddigi módszerektől eltérően ez közvetlenül használja az ortogonalitást, és előnye az, hogy nem pozitív definit belső szorzat esetén, valamint a Green esetben is alkalmazható.

A [29] dolgozatban egy új módszert adtunk annak igazolására, hogy ha a mérték tarója $[-1, 1]$ plusz egy sorozat amelynek csak ± 1 a torlódási pontja, akkor a rekurziós együtthatók $1/2$-hez ill. 0-hoz tartanak. Ez a bizonyítás tette később lehetővé (B. Simon által) hogy az analóg problémát köríven megoldják.

További ortogonális polinomokkal kapcsolatos támogatott dolgozatok a [36] és [5].

6. Beágyazási tételek

Különböző beágyazási tételek szerepelnek az [6]–[9] és [27] dolgozatokban. Ezek a sorelmélethez és approximációelmélethez kapcsolódnak, és Leindler László e terület legkiemelkedőbb képviselője. [6] egyik eredménye a következő. Legyen $p \geq 1$, ω folytonossági modulus és $\{\lambda_n\}$ olyan sorozat amelyre $\omega(1/n) = O((n\lambda_n)^{-1/p})$. Ha $f(x) = \sum_n b_n \sin nx$ olyan színusz-sor amelyre

$$\sum_{k=m}^{\infty} |b_{n+1} - b_n| = O(n^{-1}\omega(n^{-1})), \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

akkor

$$\sum_n \lambda_n |s_n(x) - f(x)|^p \leq K < \infty.$$

Ez a tétel bizonyos együtthatófeltétellel definiált sorok és (erős) approximációs osztályok között létesít beágyazási relációt. Az eredmény pontos, ez szintén [6]-ben kerül igazolásra.

[7] erős közepek nagyságrendjével definiált approximációs osztályok és az ún. $W^r H^\omega$ simasági osztályok közötti beágyazást tárgyal. Az eredmények S. M. Mazhar tételeit általánosítják.

A [8] dolgozat szükséges és elegendő feltételt ad a $H^\omega \subset \Lambda\{\varphi_k\}BV$ beágyazásra. Itt H^ω azon függvények halmaza amelyek folytonossági modulusát ω majorálja, és $\Lambda\{\varphi_k\}BV$ két $\Lambda = \{\lambda_k\}$ és $\{\varphi_k\}$ sorozatra azon f függvények halmaza, amelyeknek ún. $\Lambda\{\varphi_k\}$-totális variációja

$$\sup \sum_k \varphi_k(|f(b_k) - f(a_k)|)\lambda_k^{-1}$$

véges. Az említett szükséges és elegendő feltétel az, hogy

$$\sum_k \varphi_k(\omega(t_k))\lambda_k^{-1} < \infty$$

minden $t_k \geq 0$, $\sum_k t_k \leq 1$ feltételt kielégítő $\{t_k\}$ sorozatra. Ez messzemenően általánosítja U. Goginava és M. V. Medvedeva idevágó eredményeit.

[9] S. Tikhonov eredményeit élesíti Fourier-sorokkal és erős approximációval kapcsolatos beágyazásokról.

Ugyancsak approximációs osztályok és simasági osztályok szoros kapcsolatát tárgyalja beágyazásokon keresztül a [27] dolgozat. Azt igazolja, hogy az, hogy az r-edik derivált simasági modulusát ω majorálja (ez a $W^r H^\omega$ osztály) azzal ekvivalens, hogy az r-edik derivált legjobb trigonometrikus polinom-approximációja $\omega(1/n)$-rendű. Ugyanakkor, ez utóbbi nem ekvivalens azzal, hogy magának a függvénynek az approximációja $n^{-r}\omega(1/n)$ rendű (itt egyirányú beágyazás áll fenn).

7. Sorelmélet

A monotonitás különféle általánosításaival és azok összehasonlíthatóságával foglalkozik a [10] dolgozat. [12] a monotonitás egy újfajta általánosítását tárgyalja, és azt színusz-sorok konvergencia-tulajdonságainál használja fel. [11] színusz és koszinusz sorokkal kapcsolatban alkalmazza a korlátos változású sorozatok egy újfajta általánosítását. [15] színusz és koszínusz-sorok integrálhatóságát tárgyalja az együtthatók általánosított korlátos variációja mellett. [13] más jellegű együtthatófeltételek mellett tárgyalja Fourier-sorok approximációját.

[17] pozitív operátor-sorozatokat vizsgál Hilbert-tereken. Ezekre a klasszikus sorelméleti tételek nem igazak, pl. a szerzőknek sikerült megadni egy olyan növekbő pozitív operátor-sorozatot, amelynek van L^2-norma konvergens részsorozata, de az egész sorozat nem konvergál.

[18] ismeretterjesztő dolgozat végtelen sorok és szorzatok kapcsolatáról.

[16] ún. $|\overline{N}, p_n|_k$ abszolút szummálhatóságra ad elegendő feltételt, mely egy korábbi eredményt élesít abban az értelemben, hogy egy lényeges feltételt kihagy a korábbiak közül. Az eredmény azon múlik, hogy ha $\{\lambda_n\}$ olyan valós sorozat amelyre

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|/n < \infty,$$

és van olyan pozitív kvázi-növekvő $\{X_n\}$ sorozat amellyel

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty,$$

akkor $\lambda_n \to 0$.

[14] szintén abszolút szummációt tárgyal általános feltételek mellett.

8. Statisztikus konvergencia

Ez egy viszonylag újkeletű dolog, amely a konvergenciának olyan általánosítása, ahol az indexek egy nulla mértékű halmaza elhanyagolható. Fourier-sorokkal kapcsolatban ez kézenfekvő fogalom, és az utóbbi években jelentős irodalma alakult ki. Többszörös sorokra Móricz Ferenc általánosította a statisztikus konvergencia fogalmát. A [19]–[22] e témában írt dolgozatok.

[19] azt vizsgálja, hogy többszörös sorok esetén statisztikus szummálhatóságból milyen további feltételek mellett következik statisztikus konvergencia.

[20] a statisztikus konvergenciát használja annak igazolására, hogy ha $f \in L \log^+ L(\mathbf{T}^2)$, akkor a Fourier-sor téglalap-részletösszegeiből álló kettős sorozat (regulárisan) statisztikusan konvergál f-hez majdnem mindenütt. [21] hasonló eredményt igazol akárhány dimenzióban az $f \in L^p$, $p > 1$ feltétel mellett, továbbá azt vizsgálja, hogy a statisztikus limesz iterációval hogyan számítható ki.

Végezetül [22] a statisztikus határérték fogalmát kiterjeszti függvényekre, és ezt alkalmazza többváltozós Fourier-integrálokra.

9. Különböző dolgozatok Fourier-sorokkal és approximációval kapcsolatban

[4] azt igazolja, hogy a maximális konjugált és Hilbert-operátorok nem korlátosak a valós Hardy térből L^1-be (itt akár a körön, akár $\mathbf{R}$-en lehetünk).

[23] valós $H^1(\mathbf{R}^n)$ Hardy terekben és a $BMO(\mathbf{R}^n)$ terekben vizsgálja Hausdorff-operátorok korlátosságát. Ezen operátorok és bizonyos Riesz-transzformáltak felcserélhetősége az itt kapott eredmények alapja.

[28] pontos becsléseket ad általánosított Lipschitz függvények esetén bizonyos Fourier-közepek approximációs rendjére.

[37] a következő szép (Kroó Andrástól és A. Shnoltól származó) problémával kapcsolatban ér el kimagasló eredményeket: Ha adott egy $K \subset \mathbf{R}^n$ centrálszimmetrikus konvex tartomány, akkor annak határán minden páros folytonos függvény egyenletesen approximálható-e homogén polinomokkal? [37] igazolja, hogy a válasz "Igen" ha

- $n = 2$, vagy
- K C^2-sima, vagy
- K politóp.

A [3] dolgozat külső erőtér jelenlétében képzett egyensúlyi mérték tarójának és simaságának vizsgálatával foglalkozik. Ezek határozzák meg a $w^n P_n$ alakú súlyozott polinomokkal történő approximáció viselkedését, ahol $\log 1/w$ éppen a külső erőtér. Ebben a dolgozatban korábbi eredmények lényeges általánosításaként bevezetésre kerülnek általánosított konvex függvények, és ezen feltétel mellett sikerült belátni, hogy az egyensúlyi mérték tartója ekkor mindig egy I_w intervallum. Ez a helyzet pl. ha $\log\log 1/w$ konvex (korábban ez csak $\log 1/w$ konvexitása esetén volt ismert). Ugyanezen feltétel mellett az is igaz, hogy azok és csakis azok a folytonos függvények approximálhatók, amelyek eltűnnek I_w-n kívül.

10. Számítógéppel támogatott matematika

Bár a fő kutatástól kissé távol esik, megemlítjük, hogy Kovács Zoltán társvezetésével intenzív kutatások folynak a matematika WEB-es megjelenítésére, illetve WEB-en keresztül történő alkalmazására (WEB Mathematics Interface a rendszer neve, és széles körben elérhető). Erről egy rövid beszámoló a II. Függelékben található.

11. Konferenciák

A pályázat támogatásával 2003. nyarán Szegeden, 2004. nyarán Kecskeméten, majd 2005. nyarán Debrecenben került sor doktoranduszok és fiatal kutatók számára potenciálelméleti nyári iskolára (főszervező és ötletgazda Révész Szilárd), amelyekre az egész országból (sőt az utolsóra az USA-ból, Kanadából, Lengyelországból és Új-Zélandról is) érkeztek résztvevők. Ezen nyári iskolákon egy-egy héten keresztül magas szinvonalú előadások hangzottak el többek között a pályázatban szereplő kutatóktól (pl. a témavezető három előadással szerepelt ezeken a nyári iskolákon, és a résztvevő fiatal kutatók közül is Toókos Ferenc, Nagy Béla, Benkő Dávid és Varjú Péter mindannyian 1-2-3 előadást tartottak).

2005-ben került sor a Fejér Lipót és Riesz Frigyes születésének 125. évfordulóját ünneplő konferenciára Egerben. Erre a világ minden részéből érkeztek matematikusok, többük témája szorosan kapcsolódik a jelen pályázathoz. A konferencia főszervezője a pályázat témavezetője volt, és a pályázatban résztvevők többsége aktívan kivette részét a konferencia sikerében.

12. Fiatal kutatók tevékenysége

A pályázatban résztvevők között több doktorandusz volt. Doktori kutatásaikhoz a pályázat jelentősen hozzájárult. Az elkészített disszertációk:

- Toókos Ferenc, Green függvények simasága (védés 2005. december; témavezető Totik Vilmos)
- Nagy Béla, Aszimptotikus Bernstein-típusú egyenlőtlenségek (védés 2006. február; témavezető Totik Vilmos)
- Fekete Árpád, Statisztikus konvergencia (védés előreláthatólag 2006. május; témavezető Móricz Ferenc)
- Benkő Dávid, Az egyensúlyi mérték és Saff sejtése (védés előreláthatólag 2006. május; témavezető Totik Vilmos)

Bár a pályázatból utazást nem lehetett megvalósítani, a támogatás jelentősen hozzájárult ezen fiatalok szakmai fejlődéséhez, és ahhoz, hogy eredményeiket nemzetközi fórumokon is bemutathassák.

13. A pályázati összeg felhasználása

A pályázat keretében két kutató alkalmazására került sor (Nagy Béla és Kovács Zoltán). Mindketten fiatal matematikusok, és intenzíven dolgoztak a pályázattal összefüggő területeken.

E két alkalmazáson kívül a (Kuratórium által csökkentett) pályázati összeget könyvek és folyóiratok, valamint számítástechnikai eszközök beszerzésére fordítottuk (ld. a pénzügyi beszámolót). A pályázat témájával kapcsolatos irodalom beszerzése jelentősen segített a Bolyai Intézet könyvtárának beszerzési gondjain.

14. Pályázati támogatással készült közlemények

Könyv

[1] V. Totik, *Metric properties of harmonic measures*, Memoirs of the American Mathematical Society, 2006.

Folyóiratcikkek

[1] L. Carleson and V. Totik, Hölder continuity of Green's functions, *Acta Sci. Math.*, **70**(2004), 557–608.

[2] L. Baratchart, R. Küstner and V. Totik, Zero distribution via orthogonality *Annales de lÍnstitut Fourier*, **55**(2005), 1455–1499.

[3] D. Benko, The support of the equilibrium measure, *Acta Sci. Math.*, **70**(2004), 35–55

[4] G. Brown, D. Feng and F. Móricz, The maximal conjugate and Hilbert operators on real Hardy spaces, *Acta Math. Hungar.*, **109**(2005), 53-63.

[5] L. Golinskii and V. Totik, Orthogonal polynomials from Jacobi to Simon, Simonfest (megjelenik egy AMS kiadványban)

[6] L. Leindler, Embedding results regarding strong approximation of sine series, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **71**(2005), 91-103.

[7] L. Leindler, Embedding results pertaining to strong approximation of Fourier series. IV., *Analysis Mathematica*, 31 (2005), 175-182.

[8] L. Leindler, On embedding of the class H^ω, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, **5**(2004), 2-5.

[9] L. Leindler, Embedding results pertaining to strong approximation of Fourier series. V., *Anal. Math.*, 2007.

[10] L. Leindler, On the relationships of seven numerical sequences, *Acta Math. Hung.*, 2007.

[11] L. Leindler, A newer class of numerical sequences and its applications to sine and cosine series, *Anal. Math.*, 2007.

[12] L. Leindler, A new extension of monotone sequences and its applications, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 2006.

[13] L. Leindler, A note on the best approximation of sine and cosine series, *Analysis Math.* 2006.

[14] L. Leindler, A recent note on the absolute Riesz summability factors, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 2006.

[15] L. Leindler, Integrability of sine and cosine series having coefficients of a new class, *The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **1**(2004), 1-9.

[16] L. Leindler, A note on the absolute Riesz summability factors, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, **6**(2005), 1-5.

[17] F. Móricz, The classical monotone convergence theorem of Beppo Levi fails in noncommutative L_2-spaces, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **133**(2005), 2559-2567.

[18] F. Móricz, Valós és komplex számok végtelen szorzatai, *Polygon*, **14**(2005), 20-43.

[19] F. Móricz, Tauberian conditions for double sequences that are statistically summable by weighted means, *Sarajevo Journal of Mathematics*, **14**(2005), 197-210.

[20] F. Móricz, Regular statistical convergence of double sequences, *Colloquium Mathematicum*, **102**(2005), 218-227.

[21] F. Móricz, Regular statistical convergence of multiple sequences, *Analysis Math.*, **25**(2005), 171-182.

[22] F. Móricz, Strong Cesàro summability and statistical limit of double Fourier integrals, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **71**(2005), 159-174.

[23] F. Móricz, Multivariate Hausdorff operators on the spaces $H^1(R^n)$ and BMO(R^n), *Analysis Mathematica*, **31**(2005), 31-41.

[24] B. Nagy, Asymptotic Bernstein inequality on lemniscates, *J. Math. Anal. Appl.*, **301**(2005), 449-456.

[25] B. Nagy, Higher order sharpness of the generalized Hilbert's lemniscate theorem, Approximation theory XI: Gatlinburg 2004, 319–326, Mod. Methods Math., Nashboro Press, Brentwood, TN, 2005

[26] B. Nagy and V. Totik, Sharpening of Hilbert's lemniscate theorem, *J. Anal. Math.*, **96**(2005), 191–223.

[27] J. Németh, Embedding relations and generalized Lipschitz-classes, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **71** (2005), 175-180.

[28] J. Németh, A remark on the degree of approximation of continuous functions, *Acta Math. Hungar.*, **106(1-2)**(2005), 83-88.

[29] P. Nevai and V. Totik, Denisov's theorem on recurrence coefficients, *J. Approx. Theory*, **127**(2004), 240–245.

[30] B. Simon and V. Totik, Limits of zeros of orthogonal polynomials on the circle, *Mathematische Nachrichten*, **278**(2005), 1615–1620.

[31] I. Szalay, Explision and compressin by numbers, *International Journal of Applied Mathematics*, **19**(2005)

[32] F. Toókos, Smoothness of Green's functions and density of sets, *Acta Sci. Math.*, **71**(2005), 117–146.

[33] F. Toókos, A Wiener-type condition for Hölder continuity, *Acta Math. Hungarica*, 2006

[34] F. Toókos and V. Totik, Markov inequality and Green functions, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, Serie II, **76**(2005), 91–102.

[35] V. Totik, Equilibrium measures and polynomials, Proceedings of the 4th European Congress of Mathematics, Stockholm, Sweden, 2004, A. Laptev editor, European Mathematical Society, 2005, 501–515.

[36] V. Totik, Orthogonal polynomials, *Surveys in Approximation Theory*, **1**(2005), 70–125.

[37] P. Varjú, Approximation by homogeneous polynomials, *Constr. Approx.* (megjelenés alatt)

Disszertációk

[1] Toókos Ferenc, Green függvények simasága, 2005.

[2] Nagy Béla, Aszimptotikus Bernstein-tipusú egyenlőtlenségek, 2006.

[3] Fekete Árpád, Statisztikus konvergencia, 2006.

[4] Benkő Dávid, Az egyensúlyi mérték és Saff sejtése,2006.

15. I. Függelék: Metric properties of harmonic measures (összefoglaló)

Totik Vilmos

Megjelenik 2006-ban az American Mathematical Society *Memoirs* sorozatában

Abstract

Smoothness properties of Green functions and harmonic measures on infinitely connected domains $\mathbf{C} \setminus E$ is investigated. The smoothness at a boundary point S is measured in terms of the (linear Lebesgue) density function $\Theta_E(t)$ of the circular projection of the boundary onto a half line emanating from S. We shall use the density condition

$$\int \frac{\Theta_E(t)^2}{t^3} dt < \infty, \tag{0.2}$$

which will result in optimal order of smoothness. The results are also closely connected with estimates for the distribution of equilibrium measures of compact sets. Disregarding constants, the estimates are sharp, although for sets with some special structure the structure may lead to a better smoothness. In this connection it is proven that for Cantor type sets $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$ formed with parameters $\{\epsilon_i\}$ the Green function of $\mathbf{C} \setminus \mathcal{C}$ is of (optimal) Lip 1/2 smooth if and only if $\sum_i \epsilon_i^2 < \infty$. In particular, this results in a set (say $C(1/2, 1/3, 1/4, \ldots)$) which is of zero Lebesgue measure but the Green function of its complement is in the Lip 1/2 class.

The conditions can be extended to ensure higher order of smoothness. Applications are given for Phragmén-Lindelöf type theorems on infinitely connected domains; for Markov and Bernstein type polynomial inequalities for general compact sets; for fast decreasing polynomials on compact sets; for Remez and Schur type inequalities and to polynomial approximation of $|x - x_0|^p$ on compact sets. Most of the results have two faces: on the one hand the density condition (0.2) used in the estimates of harmonic measures and Green functions is sufficient for the classical results to be valid for such more general compact sets. On the other hand, they are also valid for the aforementioned Cantor sets (for which (0.2) does not hold). It is quite remarkable, that though (0.2) is not necessary in strict sense, in all of our applications it turns out that regarding the density of the set, this condition cannot be weakened.

1. Introduction

In this paper we are interested in smoothness properties of Green functions and harmonic measures on infinitely connected domains. Several applications will be given in different directions, such as Phragmén-Lindelöf type theorems; Markov and Bernstein type polynomial inequalities; fast decreasing polynomials; Remez and Schur type inequalities and polynomial approximation of $|x-x_0|^p$; all these on general compact sets.

Let E be a compact set on the complex plane, Ω the unbounded component of $\mathbf{C}\setminus E$ and $g_\Omega(z)=g_\Omega(z,\infty)$ the Green function of Ω with pole at infinity (if the Green function does not exist, set g_Ω to be identically ∞). Suppose that 0 is a boundary point of Ω, and our interest is in the smoothness of the Green function g_Ω at 0. We shall measure the density of E at 0 via the circular projection

$$E^c=\{r\,|\,C_r(0)\cap E\neq\emptyset\} \tag{1.1}$$

of E onto the positive real line, where $C_r(a)$ denotes the circle with radius r about the point a. More precisely the density is measured by the function

$$\Theta_E(t)=\Theta(t)=|[0,t]\setminus E^c|,$$

where $|\cdot|$ denotes linear Lebesgue measure. A theorem of Beurling [1, Theorem 3-6] implies that we have for $x>0$ the inequality

$$g_\Omega(-x)\le g_{\mathbf{C}\setminus E^c}(-x),$$

i.e. among those sets E that have a given circular projection E^c the worst behavior of the Green function occurs for $E=E^c$. Furthermore, if $E^c\subseteq[0,A]$, then

$$g_{\mathbf{C}\setminus E^c}(z)\ge g_{\mathbf{C}\setminus[0,A]}(z)=\log\left|(2z/A-1)+\sqrt{(2z/A-1)^2-1}\right|,$$

which has a $\sqrt{x}$ behavior for $z=-x$, $x>0$ around the origin. Thus, in terms of $\Theta_E(t)$ the best we can hope for the Green function is a Lip 1/2 behavior around the origin. We shall be interested in (possibly best) conditions on Θ that guarantee this optimal behavior.

There is a general estimate for harmonic measures/Green functions due to M. Tsuji [18, Theorem III.67, p. 112]: if E is a subset of the unit disk and E is of positive capacity, then

$$g_\Omega(z)\le C\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{r\in E^c\cap[|z|,1]}\frac{dr}{r}\right),$$

and here integration by parts gives that the right hand side equals (modulo a factor that is bounded away from zero and infinity)

$$\sqrt{|z|}\exp\left(\frac{1}{2}\int_{|z|}^1\frac{\Theta_E(u)}{u^2}du\right).$$

This shows that if

$$\int_0^1\frac{\Theta(u)}{u^2}du<\infty, \tag{1.2}$$

then the Green function is in Lip 1/2 about the origin. We shall see however, that already the condition

$$\int_0^1 \frac{\Theta(u)^2}{u^3} du < \infty \tag{1.3}$$

implies the Lip 1/2 property (recall that $\Theta(u) \leq u$, so (1.3) is a weaker condition than (1.2)), and this is already the best condition in a certain sense. There cannot be a necessary and sufficient condition for the optimal smoothness in terms of the metric measure $\Theta(t)$, since a structure in the set can result in much better estimates for the Green function than what one can get for general sets. In fact, in Chapter 5 we shall characterize those Cantor type sets E for which $g_{\mathbf{C}\setminus E}$ is Lip 1/2 smooth, and as a result we shall get sets $E \subseteq [0,1]$ of Linear Lebesgue measure 0 for which $g_{\mathbf{C}\setminus E}$ is Lip 1/2 smooth (for such sets $\Theta_E(u) \equiv u$, hence (1.3) is not satisfied).

There have been several motivations for this work. One was the extension of some well-known polynomial inequalities to general compact sets. T. Erdélyi, A. Kroó and J. Szabados in [8] introduced the density function Θ_E and with it they proved a local version of the Markov inequality (see Chapter 7). Our original motivation was to find the correct form of this local result, and this is where the condition (1.3) emerged. Later it has turned out that the same condition is decisive in many other problems, as is manifested in the different parts of this work. During writing we came across the book [24] by R. K. Vasiliev, where the same condition (1.3) (in a different form) is used in polynomial approximation on general sets. We shall elaborate on Vasiliev's results in Chapter 10.

The main results of this work are about smoothness properties of Green functions and harmonic measures on infinitely connected domains $\mathbf{C} \setminus E$ and on distribution of equilibrium measures of compact sets, as well as several applications of these. Disregarding constants, the estimates will turn out to be sharp, although for sets with some special structure, namely for Cantor-type sets, the structure leads to better results. Applications are given for Phragmén-Lindelöf type theorems on infinitely connected domains; for Markov and Bernstein type polynomial inequalities for general compact sets; for fast decreasing polynomials on compact sets; for Remez and Schur type inequalities and to polynomial approximation of $|x - x_0|^p$ on compact sets.

This work has two faces. On the one hand we shall work with the density function Θ_E and prove results under condition (1.3). In all problems the finiteness of the integral in (1.3) will be sufficient for the given result to hold, while without exception this finiteness turns out to be crucial, i.e. it cannot be replaced by any weaker condition. The other face of this work is about Cantor type sets. Their structure implies stronger results than the ones one can get using the density function Θ_E. If we form a Cantor type set with parameters $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ (see Chapter 5), then the results that hold under the condition (1.3) will be true if and only if $\sum_i \epsilon_i^2 < \infty$. Since this allows the set E to have zero measure (indeed, such a Cantor set is of zero measure if and only if $\sum_i \epsilon_i = \infty$), here we witness a family of compact sets for which the main results are true even though the sets can be of zero measure (for such sets (1.3) does not hold).

2. Metric properties of harmonic measures, Green functions and equilibrium measures

Let P be a point on the plane and let $C_r(P)$ resp. $\Delta_r(P)$ denote the circle resp. the open disk with center at P and with radius r.

Suppose that E is a compact set on the plane. We shall measure the density of E at P by the function

$$\Theta_{E,P}(t) = |[0,r] \setminus \{r \,|\, C_r(P) \cap E \neq \emptyset\}|, \tag{2.1}$$

where $|\cdot|$ denotes linear Lebesgue measure. Thus, the larger E is, the smaller is the function $\Theta_{E,P}$, and a very small $\Theta_{E,P}(t)$ means that for most $r \in [0,t]$ the circle $C_r(P)$ intersects E. In what follows without loss of generality we may assume that E is a subset of the unit disk and P is the origin, in which case we write $\Theta_E(t) = \Theta_{E,0}(t)$.

We recall the definition of harmonic measures. Let G be a domain with bounded boundary and $F \subseteq \partial G$ a closed subset of its boundary. The harmonic measure $\omega(z, F, G)$ is the unique harmonic function in G that lies between 0 and 1 and has boundary values (with the exception of a set of zero capacity) that are equal 1 on F and 0 on $\partial G \setminus F$. In local behavior of harmonic measures we can always assume that G is a domain obtained by removing from a disk a compact set. Exactly as for Green functions, if $G = \Delta_1(0) \setminus E$ where $E \subseteq [0,1]$, $0 \in E$ is a compact set, then for $z = -r$, $r > 0$ we have $\omega(z, C_1(0), \Delta_1(0) \setminus E) \geq c\sqrt{r}$, i.e. such a harmonic measure cannot be smoother than Lip 1/2 about the origin. The first theorem gives an estimate for local smoothness of harmonic measures about a point of the boundary.

2.1. Theorem. *There are absolute constants C, D such that if E is a compact subset of the unit disk of positive capacity and $0 < |z| < 1$, then*

$$\omega(z, C_1(0), \Delta_1(0) \setminus E) \leq C\sqrt{|z|} \exp\left(D \int_{|z|}^{1} \frac{\Theta_E^2(u)}{u^3} du \right), \tag{2.2}$$

where Θ_E is the Θ function (2.1) *with respect to E and the origin.*

This implies that for any $0 < r < 1$

$$\omega(0, C_1(0), \Delta_1(0) \setminus E) \leq C\sqrt{r} \exp\left(D \int_{r}^{1} \frac{\Theta_E^2(u)}{u^3} du \right). \tag{2.3}$$

Actually (2.2) and (2.3) are equivalent.

In particular, if

$$\int_0^1 \frac{\Theta_E^2(u)}{u^3} du < \infty, \tag{2.4}$$

then the harmonic measure $\omega(z, C_1(0), \Delta_1(0) \setminus E)$ satisfies a Lip 1/2 condition at the origin:

$$\omega(z, C_1(0), \Delta_1(0) \setminus E) \leq C|z|^{1/2}. \tag{2.5}$$

Let

$$E^c = \{r \mid C_r(0) \cap E \neq \emptyset\} \tag{2.6}$$

be the circular projection of E onto the positive half line defined in (1.1), and let $\tau_k = 2^k |[2^{-k}, 2^{-k+1}] \setminus E^c|$ be the relative size of the complement of E^c in the interval $[2^{-k}, 2^{-k+1}]$. Then condition (2.4) is equivalent to

$$\sum_k \tau_k^2 < \infty,$$

which shows that in order that (2.4) holds, the circular projection E^c should „cover most of the intervals" $[2^{-k}, 2^{-k+1}]$, $k = 1, 2, \ldots$.

For Green functions the preceding theorem takes the following form.

2.2. Theorem. *There are absolute constants C, D such that if E is a compact subset of the unit disk of positive capacity and $0 < |z| < 1$, then*

$$g_{\mathbf{C}\setminus E}(z) \leq C\sqrt{|z|} \exp\left(D \int_{|z|}^1 \frac{\Theta_E^2(u)}{u^3} du\right) \log \frac{2}{\mathrm{cap}(E)}. \tag{2.7}$$

It follows that for any $0 < r < 1$ we have

$$g_{\mathbf{C}\setminus E}(0) \leq C\sqrt{r} \exp\left(D \int_r^1 \frac{\Theta_E^2(u)}{u^3} du\right) \log \frac{2}{\mathrm{cap}(E)}. \tag{2.8}$$

Actually we shall prove (2.8) first and deduce (2.7) from it.

In particular, if (2.4) holds, then the Green function $g_{\mathbf{C}\setminus E}$ satisfies a local Lip $1/2$ condition at the origin:

$$g_{\mathbf{C}\setminus E}(z) \leq C|z|^{1/2}. \tag{2.9}$$

We remark (and shall also use) that the factor $\log 1/\mathrm{cap}(E)$ on the right of (2.7) appears only to cover pathological cases (like when $E = [1/2, 1/2 + a]$ with some very small a). In fact, the proof gives the following: Let $\delta > 0$ be fixed. There are constants C, D depending only on δ such that if E is a compact subset of the unit disk, $|z| < 1$, and if there is an s with $|z| \leq s$ such that

$$|[s, 2s] \cap E^c| \geq \delta s, \tag{2.10}$$

where E^c is the circular projection of E given in (2.6), then

$$g_{\mathbf{C}\setminus E}(z) \leq C\sqrt{|z|} \exp\left(D \int_{|z|}^1 \frac{\Theta_E^2(u)}{u^3} du\right), \tag{2.11}$$

i.e. in this case the factor $\log 1/\mathrm{cap}(E)$ on the right of (2.7) can be omitted.

We shall deduce all these results from the $E \subseteq [0, 1]$ case of the next theorem, where μ_E denotes the equilibrium measure of the set E (see the next section for its definition).

2.3. Theorem. *There are absolute constants C, D such that if E is a compact subset of the unit disk of positive capacity and $0 < r < 1$, then*

$$\mu_E(\Delta_r(0)) \leq C\sqrt{r}\exp\left(D\int_r^1 \frac{\Theta_E^2(u)}{u^3}du\right). \tag{2.12}$$

In particular, if (2.4) is true, then $\mu_E(\Delta_r(0)) = O(\sqrt{r})$.

Compare this with the fact that $d\mu_{[0,1]}(t) = dt/\pi\sqrt{t(1-t)}$, and hence

$$\mu_{[0,1]}([0,t]) \geq \frac{2}{\pi}\sqrt{r}$$

for all $0 < r < 1$.

3. Sharpness

In this chapter we show that the theorems in Chapter 2 are best possible. One cannot expect a full converse in the sense that e.g. if

$$\int_0^1 \frac{\Theta_E^2(u)}{u^3}du = \infty \tag{3.1}$$

then (2.9) is not true. Indeed, disregarding the fact that $g_{\mathbf{C}\setminus E}(z)$ may be identically zero in a neighborhood of the origin, let us note also that there are compact subsets $E \subset [0,1]$ with zero linear measure for which the Green function $g_{\mathbf{C}\setminus E}$ is in Lip 1/2 (see e.g. Corollary 5.2 below), and for these E we have $\Theta_E(t) \equiv t$, i.e. (3.1) is true. For such E's, though (3.1) is true, E is dense at the origin in the sense that the complement of the circular projection of E contains in $[0,t]$ only very short intervals compared to t as $t \to 0$. However, regarding the structure of the estimates the theorems are sharp.

3.1. Theorem. *There are absolute constants $c, d > 0$ for which the following is true. If Θ is a nonnegative increasing function on $[0,1]$ with the property $\Theta(t) \leq t$ for all t, then there is a compact set $E \subseteq [0,1]$ of positive capacity such that*

$$\Theta_E(t) \leq \Theta(t) \qquad \text{for all} \quad t \in [0,1] \tag{3.2}$$

and for all $0 < r \leq 1$ we have

$$\mu_E([0,r]) \geq c\sqrt{r}\exp\left(d\int_r^1 \frac{\Theta^2(u)}{u^3}du\right), \tag{3.3}$$

$$\omega(-r, C_1(0), \Delta_1(0)\setminus E) \geq c\sqrt{r}\exp\left(d\int_r^1 \frac{\Theta^2(u)}{u^3}du\right), \tag{3.4}$$

and

$$g_{\mathbf{C}\setminus E}(-r) \geq c\sqrt{r}\exp\left(d\int_r^1 \frac{\Theta^2(u)}{u^3}du\right). \tag{3.5}$$

The next corollary gives a necessary and sufficient condition for the Lip 1/2 property of Green functions for a wide class of compact subsets of the real line.

3.2. Corollary. *Let* $1 = t_0 > t_1 > \cdots$ *be a positive sequence with property*

$$0 < \alpha \le \frac{t_{k+1}}{t_k} \le \beta < 1, \tag{3.6}$$

and let $E \subset [0,1]$ *be a compact set. If* $|[t_k, t_{k-1}] \setminus E| = \gamma_k t_k$ *and*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty, \tag{3.7}$$

then the Green function $g_{\mathbf{C}\setminus E}$ *of* $\mathbf{C}\setminus E$ *satisfies a* Lip 1/2 *condition at the origin, i.e. we have* (2.9).

Conversely, if for every k *the set* $[t_k, t_{k-1}] \setminus E$ *contains an interval of length* $\ge \gamma_k^* t_k$ *with*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k^*)^2 = \infty, \tag{3.8}$$

then

$$\frac{g_{\mathbf{C}\setminus E}(-r)}{\sqrt{r}} \to \infty \tag{3.9}$$

as $r \to 0+0$.

Similar results hold for the harmonic measure $\omega(z, C_1(0), \Delta_1(0) \setminus E)$ and for the equilibrium measure μ_E. For example, assume that for all but finitely many k we have $|[t_k, t_{k-1}] \setminus E| \le \gamma_k t_k$ with some $\gamma_j \le \gamma < 1$ and that the set $[t_k, t_{k-1}] \setminus E$ contains an interval of length $\ge \gamma_k^* t_k$ with $\gamma_k^* \sim \gamma_k$. Then $\mu_E([0,\delta]) = O(\sqrt{\delta})$ is satisfied if and only if $\sum_k \gamma_k^2 < \infty$.

4. Higher order smoothness

Until now we have considered $\sqrt{|z|}$ order of smoothness for the Green functions and harmonic measures. In this chapter we show that the results from Chapter 2 can be used to detect higher order of smoothness. The claims here depend on the results from the previous section and on a symmetrization theorem of Baernstein [2].

First we mention a result that we shall use for sets lying on the real line and that uses less hypothesis than our main theorem. By simple symmetrization one can get from the results of Section 2 conditions that provide Lip 1 behavior of Green functions and harmonic measures. In fact, let $E \subseteq [-1,1]$, and let us consider its two-sided density

$$\Theta_E^*(t) = |[-t,t] \setminus E|. \tag{4.1}$$

Now the following corollary easily follows from the results in Chapter 2.

4.1. Corollary. *There is an absolute constants C such that if E is a compact subset of $[-1,1]$ of positive capacity and $0<|z|<1$, then*

$$\omega(z, C_1(0), \Delta_1(0)\setminus E) \le C|z|\exp\left(C\int_{|z|}^1 \frac{\Theta_E^*(u)^2}{u^3}du\right), \tag{4.2}$$

$$g_{\mathbf{C}\setminus E}(z) \le C|z|\exp\left(C\int_{|z|}^1 \frac{\Theta_E^*(u)^2}{u^3}du\right)\log\frac{2}{\mathrm{cap}(E)}, \tag{4.3}$$

and for $0<r<1$

$$\mu_E([-r,r]) \le Cr\exp\left(C\int_r^1 \frac{\Theta_E^*(u)^2}{u^3}du\right). \tag{4.4}$$

In particular, if

$$\int_0^1 \frac{\Theta_E^*(u)^2}{u^3}du < \infty,$$

then we get a local Lip 1 behavior.

Corollary 4.1 is sharp in the sense of the preceding section. In fact, the following corollary easily follows from the results of Section 3.

4.2. Corollary. *There is an absolute constant $c>0$ for which the following is true. If Θ^* is a nonnegative increasing function on $[0,1]$ with the property $\Theta^*(t)\le 2t$ for all t, then there is a compact set $E\subseteq[-1,1]$ of positive capacity such that E is symmetric onto the origin,*

$$\Theta_E^*(t) \le \Theta^*(t) \qquad \text{for all} \quad t\in[0,1] \tag{4.5}$$

and for all $0<r\le 1$ we have

$$\mu_E([-r,r]) \ge cr\exp\left(c\int_r^1 \frac{\Theta^*(u)^2}{u^3}du\right), \tag{4.6}$$

$$\omega(-r, C_1(0), \Delta_1(0)\setminus E) \ge cr\exp\left(c\int_r^1 \frac{\Theta^*(u)^2}{u^3}du\right), \tag{4.7}$$

and

$$g_{\mathbf{C}\setminus E}(-r) \ge cr\exp\left(c\int_r^1 \frac{\Theta^*(u)^2}{u^3}du\right). \tag{4.8}$$

After that let again $E\subset\mathbf{C}$ be a compact set on the complex plane, and for $0<\alpha<1$ consider the set

$$E_\alpha = \{r \mid |E\cap C_r(0)| \ge 2r\pi\alpha\} \tag{4.9}$$

of those r for which the circle $C_r(0)$ about 0 and of radius r intersects E in a set of (arc) measure $\ge 2\pi r\alpha$. The $\alpha=0$ case would correspond to the circular projection of E onto $[0,\infty)$.

4.3. Theorem. *There is an absolute constant C depending only on α such that if E is a compact subset of the unit disk of positive capacity and $0 < |z| < 1$, then*

$$\omega(z, C_1(0), \Delta_1(0) \setminus E) \le C|z|^{1/2(1-\alpha)} \exp\left(C \int_{|z|}^{1} \frac{\Theta^2_{E_\alpha}(u)}{u^3} du\right), \tag{4.10}$$

$$g_{\mathbf{C}\setminus E}(z) \le C|z|^{1/2(1-\alpha)} \exp\left(C \int_{|z|}^{1} \frac{\Theta^2_{E_\alpha}(u)}{u^3} du\right) \log \frac{2}{\mathrm{cap}(E)}, \tag{4.11}$$

and for $0 < r < 1$

$$\mu_E(\Delta_r(0)) \le Cr^{1/2(1-\alpha)} \exp\left(C \int_{r}^{1} \frac{\Theta^2_{E_\alpha}(u)}{u^3} du\right). \tag{4.12}$$

In particular, if

$$\int_0^1 \frac{\Theta_{E_\alpha}(t)^2}{t^3} dt < \infty, \tag{4.13}$$

then both $\omega(z, C_1(0), \Delta_1(0) \setminus E)$ and $g_{\mathbf{C}\setminus E}(z)$ satisfy a local Lip $1/2(1-\alpha)$ smoothness at the origin.

5. Cantor-type sets

Theorem 3.1 shows that in a sense Theorems 2.1–2.3 and their corollaries are sharp. If, however, the set in question has a structure, then this structure may result in much better estimates. As an example consider Cantor type sets. Let $\{\epsilon_i\}$ be a sequence with $0 \le \epsilon_i < 1$, and consider the Cantor construction with this sequence. By this we mean that starting from $[0, 1]$ first we remove the middle ϵ_1 part of this interval, then in the second step we remove the middle ϵ_2 part of both remaining intervals, then in the third step we remove the middle ϵ_3 part of each remaining 4 intervals, etc. Let us denote the so obtained Cantor type set by $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$. The classical Cantor set corresponds to the sequence $\epsilon_j = 1/3$, $j = 1, 2, \ldots$. Since after the n-th step there are 2^n intervals of total length $(1-\epsilon_1)(1-\epsilon_2)\cdots(1-\epsilon_n)$, the set $\mathcal{C}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$ is of zero linear measure if and only if $\sum_j \epsilon_j = \infty$. It is known (see e.g. ([13, V.6.6, Theorem 3])) that $\mathcal{C}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$ is of positive capacity if and only if

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \log \frac{1}{1-\epsilon_j} < \infty.$$

The Green function of $\mathbf{C} \setminus \mathcal{C}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$ is in a Lip α class for some positive α if and only if (see ([20]))

$$\sum_{j=1}^{k} \log \frac{1}{1-\epsilon_j} = O(k). \tag{5.1}$$

We would like to determine when the Green function of $\mathbf{C} \setminus \mathcal{C}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$ is of optimal smoothness, i.e. when it belongs to the class Lip $1/2$. Corollary 3.2 easily implies that if $\sup_j \epsilon_j = 1$, then this is not the case, hence in what follows suppose that $0 \le \epsilon_j \le \epsilon < 1$ for all j with some fixed $\epsilon < 1$. Then the sequence $\{t_k\}$ with

$$t_k = \frac{1-\epsilon_1}{2}\frac{1-\epsilon_2}{2}\cdots\frac{1-\epsilon_k}{2}$$

satisfies the condition (3.6), and for the function $\Theta_{\mathcal{C}}(t)$ we have

$$\Theta_{\mathcal{C}}(t_k) = t_k\left(1 - \prod_{j=k+1}^{\infty}(1-\epsilon_j)\right).$$

Then condition (2.4) for (2.9) takes the form $\sum_k \Theta_{\mathcal{C}}^2(t_k)t_k^{-2} < \infty$, and this is easily seen to be the same as

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k+1}^{\infty}\epsilon_j\right)^2 < \infty.$$

Thus, Theorem 2.2 does not necessarily give the Lip $1/2$ property even for Cantor sets of positive measure. But, as the next theorem shows, for all $\mathcal{C}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$ of positive measure the Green function $g_{\mathbf{C}\setminus\mathcal{C}}$ is Lip $1/2$ smooth. When compared with condition (5.1), this theorem also shows that the Green function of $\mathbf{C} \setminus \mathcal{C}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$ to lie in the optimal class Lip $1/2$ is a much severe condition than to lie in some Lip α, $\alpha > 0$ class.

5.1. Theorem. *Let $\{\epsilon_j\}$ be a sequence of numbers from the interval* $[0, 1)$. *The Green function of* $\mathbf{C}\setminus\mathcal{C}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$ *is in the class* Lip $1/2$ *if and only if* $\sum \epsilon_j^2 < \infty$.

Note that while Theorems 2.1–2.3 give non-trivial estimates only for sets of positive measure (more precisely for sets with the property $\Theta_E(t) = o(t)$), Theorem 5.1 can be applied to sets of zero measure as well. Indeed, we have

5.2. Corollary. *The compact set $\mathcal{C} = \mathcal{C}(1/2, 1/3, 1/4, \ldots)$ is of zero linear measure, but its complement has a* Lip $1/2$ *Green function.*

Such a set was constructed by a different method in ([21]).

Theorem 5.1 dramatically illustrates how the structure of a set can influence the behavior of the Green function. Indeed, consider the Cantor construction with the modification that we only omit at the n-th step the middle ϵ_n part of the leftmost remaining interval (i.e. we omit this time only one interval instead of the 2^{n-1} intervals as in the original construction). Let the so obtained set be $\tilde{\mathcal{C}}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$. Thus,

$$\tilde{\mathcal{C}}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots) = [0, 1] \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(t_k, t_k + \epsilon_k t_{k-1})\right), \tag{5.2}$$

and clearly $\tilde{\mathcal{C}}$ is a much thicker set than $\mathcal{C}$. Now it easily follows from Theorem 3.1 (cf. also the proof of Theorem 5.1) that the Green function of $\mathbf{C}\setminus\tilde{\mathcal{C}}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$ satisfies a Lip $1/2$ condition at the origin only if $\sum_j \epsilon_j^2 < \infty$, while Theorem 5.1 shows that this condition is already sufficient for the Lip $1/2$ property of the Green function of $\mathbf{C}\setminus\mathcal{C}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$; and this latter domain has much thinner boundary than $\mathbf{C}\setminus\tilde{\mathcal{C}}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$.

It is worth recording the following variant of Theorem 5.1.

5.3. Theorem. *Let $\{\epsilon_j\}$ be a sequence of numbers from the interval $[0, 1)$. For the equilibrium measure $\mu_{\mathcal{C}}$ of $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$ we have $\mu_{\mathcal{C}}([0, \delta]) = O(\sqrt{\delta})$ if and only if $\sum \epsilon_j^2 < \infty$.*

Although this follows from Theorem 5.1, the sufficiency part in the proof of Theorem 5.1 goes through the proof of Theorem 5.3. Thus, the sufficiency part of Theorem 5.3 will be proven during the verification of the sufficiency of the condition $\sum_i \epsilon_i^2 < \infty$ in Theorem 5.1, Part I. Actually, in the proof of Theorem 5.1 we shall verify the somewhat more general inequality: if $\sum \epsilon_j^2 < \infty$ then $\mu_{\mathcal{C}}([a, a+\delta]) = O(\sqrt{\delta})$ uniformly in a.

The necessity of the condition $\sum_i \epsilon_i^2 < \infty$ in Theorem 5.3 is an immediate consequence of the necessity of the same condition in Theorem 5.1, which in turn is a simple consequence of Corollary 3.2 (see the beginning of the proof of Theorem 5.1 below).

6. Phargmén–Lindelöf type theorems

The following Phragmén–Lindelöf type theorem is classical (see e.g. [18], [15]): if f is analytic on $\mathbf{C}\setminus[0, \infty)$, has boundary values of modulus ≤ 1 on $[0, \infty)$ and

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{\log|f(z)|}{|z|^{1/2}} = 0, \tag{6.1}$$

then $|f(z)| \le 1$ for all z. The function $e^{\sqrt{z}}$ shows that this is sharp regarding the condition (6.1). In this section we consider the problem if there are analogous results when f is analytic on an infinitely connected domain, and how large boundary will force the above result to be valid.

Let $E \subset \mathbf{C}$ be a closed set such that $\mathbf{C}\setminus E$ is connected. We shall again measure the density of E by the function

$$\Theta_E(t) = |[0, t] \setminus \{r \mid C_r(0) \cap E \ne \emptyset\}|,$$

but this time we shall be interested in the behavior of Θ_E around $t = \infty$.

6.1. Theorem. *Let f be analytic on $\mathbf{C}\setminus E$ such that for each $z_0 \in E$*

$$\limsup_{z\to z_0,\ z\notin E} |f(z)| \le 1, \tag{6.2}$$

and

$$\lim_{|z|\to\infty,\ z\notin E} \frac{\log|f(z)|}{|z|^{1/2}} = 0. \tag{6.3}$$

If

$$\int_1^\infty \frac{\Theta_E(t)^2}{t^3} dt < \infty, \tag{6.4}$$

then these imply $|f(z)| \leq 1$ *for all* z.

This theorem is sharp as is shown by

6.2. Theorem. *Let us suppose that* $0 \leq \Theta(t) \leq t$ *is an increasing function with*

$$\int_1^\infty \frac{\Theta(t)^2}{t^3} dt = \infty. \tag{6.5}$$

Then there are a closed set $E \subset [0, \infty)$ *and an analytic function* f *on* $\mathbf{C} \setminus E$ *with the properties* (6.2) *and* (6.3), *and yet* $|f(z)| > 1$ *for some* z.

Theorem 6.1 can be considered to be the case $\alpha = 0$ of the next result, in which we use again the set (cf. (4.9))

$$E_\alpha = \{r \mid |C_r(0) \cap E| \geq 2\pi r\alpha\}.$$

6.3. Theorem. *Let* $0 < \alpha < 1$, *and let* f *be an analytic function on* $\mathbf{C} \setminus E$ *with the properties* (6.2) *and*

$$\lim_{|z|\to\infty,\ z\notin E} \frac{\log|f(z)|}{|z|^{1/2(1-\alpha)}} = 0. \tag{6.6}$$

If

$$\int_1^\infty \frac{\Theta_{E_\alpha}(t)^2}{t^3} dt < \infty, \tag{6.7}$$

then these imply $|f(z)| \leq 1$ *for all* z.

Since $\log|f(z)|$ is subharmonic, both of Theorems 6.1 and 6.3 immediately follow from the following version, in which we set $\Theta_{E_0}(t) = \Theta_E(t)$.

6.4. Theorem. *Let* $0 \leq \alpha < 1$ *and let* u *be a subharmonic function on* $\mathbf{C} \setminus E$ *such that* u *is bounded from above on every set* $C_R(0) \setminus E$, $R > 0$, *for each* $z_0 \in E$

$$\limsup_{z\to z_0,\ z\notin E} |u(z)| \leq 0, \tag{6.8}$$

and

$$\limsup_{|z|\to\infty,\ z\notin E} \frac{u(z)}{|z|^{1/2(1-\alpha)}} \leq 0. \tag{6.9}$$

If (6.7) *is satisfied, then these imply* $u(z) \leq 0$ *for all* z.

7. Markov and Bernstein type inequalities

In this chapter we give an application of our results to polynomial inequalities. Markov's inequality

$$\|P_n'\|_{[0,1]} \le 2n^2 \|P_n\|_{[0,1]}, \qquad \deg(P_n) \le n, \tag{7.1}$$

is one of the basic inequalities connecting on an interval the size of the derivative of a polynomial P_n of degree at most n with its supremum norm $\|P_n\|_{[0,1]}$. If E is a compact set on the plane the analogue of Markov's inequality, namely

$$\|P_n'\|_E \le Cn^2 \|P_n\|_E, \qquad \deg(P_n) \le n, \tag{7.2}$$

may or may not hold depending on the structure of E. For Cantor type sets we have a complete answer:

7.1. Theorem. *Let $\{\epsilon_j\}$ be a sequence of numbers from the interval $[0,1)$. The Markov inequality*

$$\|P_n'\|_{\mathcal{C}(\epsilon_1,\epsilon_2,\dots)} \le Cn^2 \|P_n\|_{\mathcal{C}(\epsilon_1,\epsilon_2,\dots)}, \qquad \deg(P_n) \le n, \tag{7.3}$$

is true with some constant C if and only if $\sum \epsilon_j^2 < \infty$.

In particular, the Markov inequality (7.2) may hold even for sets of measure zero.

For general compact sets our results give a local version of Markov's inequality. Naturally, if the conditions of the next theorem hold uniformly for the points of a set E, then one gets a global Markov inequality on that set.

7.2. Theorem. *Let E be a compact set on the plane, $S \in E$, and let $\Theta_{E,S}(t)$ be the function* (2.1) *with respect to E and the point S. If*

$$\int_0^1 \frac{\Theta_{E,S}^2(u)}{u^3} du < \infty, \tag{7.4}$$

is true, then at S the local Markov inequality

$$|P_n'(S)| \le Cn^2 \|P_n\|_E, \qquad \deg(P_n) \le n, \tag{7.5}$$

is true with some constant C.

Conversely, if Θ is a nonnegative increasing function on $[0,1]$ with the properties $\Theta(t) \le t$ for all t and

$$\int_0^1 \frac{\Theta^2(u)}{u^3} du = \infty, \tag{7.6}$$

then there is a compact set $E \subseteq [0,1]$ such that

$$\Theta_{E,0}(t) \le \Theta(t) \qquad \text{for all} \quad t \in [0,1], \tag{7.7}$$

and for some polynomials P_n of degree $n = 1, 2, \dots$ we have

$$|P_n'(0)| \ne O\Big(n^2 \|P_n\|_E\Big). \tag{7.8}$$

This whole work has emerged from Markov-type inequalities. T. Erdélyi, A. Kroó and J. Szabados [8] proved several local versions of the Markov inequality. They have also introduced the density function $\Theta_{E,S}$ and with it they proved an inequality which implies (7.5) provided

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\Theta_{E,S}(u)}}{u^2} du < \infty, \tag{7.9}$$

is true. However, this result is not sharp (note that $\Theta_{E,S}(u) \leq u$, hence the integrand in (7.9) is always bigger than the one in (7.4)), and the original motivation for this work was to find the correct form of the integrand. As an example consider for $0 < \alpha$ and $\alpha + 1 < \beta$ the set

$$E = \bigcup_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1}{k^\alpha} + \frac{1}{k^\beta}, \frac{1}{(k-1)^\alpha} \right].$$

In this case we have

$$\Theta_{E,0}(t) \sim \sum_{k^{-\alpha} \leq t} \frac{1}{k^\beta} \sim t^{(\beta-1)/\alpha},$$

hence the aforementioned result in [8] is applicable exactly when $\beta > 2\alpha + 1$, and so it implies that for $\beta > 2\alpha + 1$ the local Markov inequality

$$|P_n'(0)| \leq Cn^2 \|P_n\|_E \tag{7.10}$$

is true. However, Theorem 7.2 gives that (7.10) is actually true for all $\beta > \alpha + 1$.

The following symmetric variant of Theorem 7.2 tells us under what conditions the analogue of the Bernstein inequality is true for general compact sets.

7.3. Theorem. *Let $E \subset [-1,1]$ be a compact set, and let $\Theta_E^*(t) = |[-t,t] \setminus E|$ be the function* (4.1). *If*

$$\int_0^1 \frac{(\Theta_E^*(u))^2}{u^3} du < \infty, \tag{7.11}$$

is true, then the Bernstein inequality

$$|P_n'(0)| \leq Cn \|P_n\|_E \qquad \deg(P_n) \leq n, \tag{7.12}$$

is true with some constant C.

Conversely, if Θ^* is a nonnegative increasing function on $[0,1]$ with the properties $\Theta^*(t) \leq 2t$ for all t and

$$\int_0^1 \frac{\Theta^*(u)^2}{u^3} du = \infty, \tag{7.13}$$

then there is a compact set $E \subseteq [-1,1]$ such that

$$\Theta_E^*(t) \leq \Theta^*(t) \qquad \text{for all} \quad t \in [0,1], \tag{7.14}$$

and for some polynomials P_n of degree $n = 1, 2, \ldots$ we have

$$|P_n'(0)| \neq O\Big(n \|P_n\|_E\Big). \tag{7.15}$$

8. Fast decreasing polynomials

In this chapter we give an application of the main results to fast decreasing or so called pin polynomials. These are „Dirac delta" like polynomials, i.e. polynomials that decrease fast away from the origin. They play a significant role in several disciplines of mathematical analysis such as approximation theory, orthogonal polynomials, moment problems, etc. These applications require polynomials P that take the value 1 at the origin and are fast decreasing on $[-1,1]\setminus\{0\}$ in the sense that

$$P(0)=1, \quad |P(x)|\le e^{-\varphi(x)}, \quad x\in[-1,1], \tag{8.1}$$

where φ is a given even function that typically involves the degree of P. For example, the Markov-Bernstein-type inequality

$$\|wR'\|_{L^p(-\infty,\infty)} \le C\|wR\|_{L^p(-\infty,\infty)}, \qquad R \text{ a polynomial},$$

with an absolute constant C for weights like $w(x)=\exp(-|x|^\beta)$, $0<\beta<1$, follows from the existence of polynomials P_n of degree at most n satisfying

$$P_n(0)=1, \quad |P_n(x)|\le C\exp(-(n|x|)^\beta), \quad x\in[-1,1]$$

(see [12]).

The importance of such polynomials lies in the fact that their integrals provide good approximation to the signum function and thereby they serve as the building blocks for well localized „polynomial partition of unity". They are also optimal convolution kernels, for they imitate the Dirac delta as close as possible.

The problem can be formulated in two different ways: find the fastest decreasing polynomials of a given order, or alternatively, find the smallest possible degree for the polynomial P in (8.1). This degree is denoted by n_φ.

The order of n_φ can be estimated by an explicitly computable quantity as follows (see [10]): Let φ be an even function, right continuous and increasing on $[0,1]$. Then

$$\frac{1}{6}N_\varphi \le n_\varphi \le 12N_\varphi$$

where $N_\varphi=0$ if $\varphi(1)\le 0$ and

$$N_\varphi = 2\sup_{\varphi^{-1}(0)\le x<b}\sqrt{\frac{\varphi(x)}{x^2}} + \int_b^{1/2}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx + \sup_{1/2\le x<1}\frac{\varphi(x)}{-\log(1-x)} + 1,$$

$b=\min(\varphi^{-1}(1),1/2)$, otherwise.

Here, for $u\ge 0$,

$$\varphi^{-1}(u)=\sup\{\tau\,|\,\tau\in[0,1],\ \varphi(\tau)\le u\}.$$

If $N_\varphi=\infty$, then the statement of the theorem means that there are no polynomials whatsoever with the stated properties.

As a special case the following holds. Let φ be an even and on $[0,1]$ increasing function with $\varphi(0) = \varphi(0+0) = 0$ and $\varphi(x) \le C\varphi(x/2)$ for $x \in [0,1]$. Then there are polynomials P_n of degree at most n satisfying

$$P_n(0) = 1, \quad |P_n(x)| \le D\exp(-dn\varphi(x)), \quad x \in [-1,1], \quad n = 0,1,\dots \tag{8.2}$$

for some constants $D > 0$ and $d > 0$ if and only if

$$\int_0^1 \frac{\varphi(u)}{u^2} du < \infty. \tag{8.3}$$

For example,

$$|P(0)| = 1, \quad |P(x)| \le C_1 \exp(-n|x|^\beta)$$

with $\beta > 1$ can be achieved by polynomials of degree $\le Cn$, but for $\varphi(x) = |x|$ we get that the minimal degree n_φ of the polynomials P satisfying

$$|P(0)| = 1, \quad |P(x)| \le C_1 e^{-n|x|}, \quad x \in [-1,1]$$

satisfies

$$\frac{1}{C} n \log n \le n_\varphi \le Cn \log n.$$

The substitution $x \to x^2$ changes the problem into fast decreasing polynomials on $[0,1]$. E.g. in this case (8.2) takes the form

$$P_n(0) = 1, \qquad |P_n(x)| \le De^{-dn\varphi(x)} \quad x \in [0,1], \tag{8.4}$$

and for this (8.3) will change into the necessary and sufficient condition

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t^{3/2}} dt < \infty. \tag{8.5}$$

Now suppose, that $E \subset [0,1]$ is a closed set, and we want

$$|P_n(x)| \le De^{-dn\varphi(x)}$$

only on E (besides the property $P_n(0) = 1$), i.e. we care only for the decrease of P_n on E. It is clear that a thinner E will allow faster decrease for P_n, and we are going to show that the denseness condition used in this work is precisely the condition under which a full analogue of (8.4)–(8.5) holds.

8.1. Theorem. *Let $E \subseteq [0,1]$ be compact, and φ an increasing function on $[0,1]$ with $\varphi(0) = 0$. If*

$$\int_0^1 \frac{\Theta_E(t)^2}{t^3} dt < \infty, \tag{8.6}$$

then for $n = 1,2,\dots$ there are polynomials with

$$P_n(0) = 1, \qquad |P_n(x)| \le C_1 e^{-c_1 n\varphi(x)}, \quad x \in E \tag{8.7}$$

with some constants $C_1, c_1 > 0$ *if and only if*

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t^{3/2}} dt < \infty. \tag{8.8}$$

Conversely, if $0 \le \Theta(t) \le t$ *is an increasing function on* $[0,1]$ *with*

$$\int_0^1 \frac{\Theta(t)^2}{t^3} dt = \infty, \tag{8.9}$$

then there are a compact set $E \subset [0,1]$ *such that* $\Theta_E(t) \le \Theta(t)$ *for all* t *and a monotone* φ *with*

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t^{3/2}} dt = \infty \tag{8.10}$$

for which there are polynomials P_n *with property* (8.7).

By the standard symmetrization $x \to x^2$ one can immediately deduce the following corollary.

8.2. Corollary. *Let* $E \subseteq [-1,1]$ *be compact, and* φ *an even function on* $[-1,1]$ *such that* φ *is increasing on* $[0,1]$ *and* $\varphi(0) = 0$. *Let furthermore*

$$\Theta_E^*(t) = |[-t,t] \setminus E|$$

be the symmetric density function from (4.1). *If*

$$\int_0^1 \frac{\Theta_E^*(t)^2}{t^3} dt < \infty, \tag{8.11}$$

then for $n = 1, 2, \ldots$ *there are polynomials with*

$$P_n(0) = 1, \qquad |P_n(x)| \le C_1 e^{-c_1 n \varphi(x)}, \quad x \in E \tag{8.12}$$

with some constants $C_1, c_1 > 0$ *if and only if*

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t^2} dt < \infty. \tag{8.13}$$

Conversely, if $0 \le \Theta^*(t) \le 2t$ *is an increasing function on* $[0,1]$ *with*

$$\int_0^1 \frac{\Theta^*(t)^2}{t^3} dt = \infty, \tag{8.14}$$

then there are a compact set $E \subset [-1,1]$ *such that* $\Theta_E^*(t) \le \Theta^*(t)$ *for all* t *and a monotone* φ *with*

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = \infty \tag{8.15}$$

for which there are polynomials P_n *with property* (8.12).

For Cantor type sets we prove the following. Let $\epsilon_i \in [0,1)$, and consider the Cantor set $\mathcal{C}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$ formed with these numbers.

8.3. Theorem. *Let φ be an increasing function on $[0,1]$ with $\varphi(0) = 0$ and $E = \mathcal{C}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$. If $\sum_i \epsilon_i^2 < \infty$, then there are polynomials with the property* (8.7) *if and only if* (8.8) *is true.*

Conversely, if $\sum_i \epsilon_i^2 = \infty$, then there is a φ with (8.10) *for which there are polynomials P_n with the property* (8.7) *for $E = \mathcal{C}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$.*

9. Remez and Schur type inequalities

Remez-type inequalities estimate the norm of a polynomial. The simplest case of it says that if $|P_n(x)| \le 1$ for $x \in [n^{-2}, 1]$, then with an absolute constant C we have $|P_n(x)| \le C$ for $x \in [0, n^{-2}]$. Of course, this is just a simple appearance of the Bernstein-Walsh lemma and of the $\sqrt{|z|}$ behavior of the Green function. Connected with the aforementioned inequality are the Schur type inequalities that estimate the norm of a polynomial provided its weighted norm is known. For example, if $\sigma > 0$, then

$$\|P_n\|_{[0,1]} \le Cn^{2\sigma} \|x^\sigma P_n(x)\|_{[0,1]}.$$

The results from the other chapters of this work give easy extensions of these summarized in

9.1. Theorem. *Let E be a compact subset of the plane and let us suppose that*

$$\int_0^1 \frac{\Theta_E^2(u)}{u^3} du < \infty, \tag{9.1}$$

holds. Then

$$|P_n(z)| \le C_R \|P_n\|_{E \setminus \Delta_{Rn^{-2}(0)}}, \qquad |z| \le Rn^{-2} \tag{9.2}$$

where C_R depends only on R; furthermore if $\sigma > 0$, then

$$\|P_n\|_E \le C_\sigma n^{2\sigma} \|z^\sigma P_n(z)\|_E. \tag{9.3}$$

Conversely, if $0 \le \Theta(t) \le t$ is an increasing function on $[0,1]$ with the property

$$\int_0^1 \frac{\Theta_E^2(u)}{u^3} du = \infty, \tag{9.4}$$

then there is a compact set $E \subset [0,1]$ such that $\Theta_E(t) \le \Theta(t)$ for all $t \in [0,1]$, and for each n there are polynomials P_n of degree at most n such that

$$\frac{|P_n(0)|}{\|P_n\|_{E \cap [n^{-2},1]}} \to \infty, \qquad n \to \infty, \tag{9.5}$$

and for any $\sigma > 0$

$$\frac{\|P_n\|_E}{n^{2\sigma} \|x^\sigma P_n(x)\|_E} \to \infty, \qquad n \to \infty. \tag{9.6}$$

Similar proofs give that if $E = \mathcal{C}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$ is a Cantor set, then the Remez type inequality (9.2) holds if and only if $\sum \epsilon_i^2 < \infty$, and this is also the necessary and sufficient condition for the validity of the Schur inequality (9.3).

10. Approximation on compact sets

The approximation of the $|x|$ function by polynomials is a key to many problems in approximation theory. For example, both the Weierstrass theorem and the Jackson theory can be based on it, and the problem is also fundamental in spline theory. Let $\mathcal{E}_n(f, [-1,1])$ denote the error of best approximation to f on $[-1,1]$ by polynomials of degree at most n. S. N. Bernstein [3] proved in 1914, that the limit

$$\lim_{n\to\infty} n\mathcal{E}_n(|x|, [-1,1]) = \sigma \tag{10.1}$$

exists, finite and positive. This is a rather difficult result (with a proof over 50 pages). For σ he showed $0.278 < \sigma < 0.286$, and based on that he conjectured that $\sigma = (2\sqrt{\pi})^{-1}$, but that was disproved in [23] by high precision calculations, which also gave σ up to 50 decimal places. The exact value of σ is still unknown. Bernstein returned to the same problem in the period 1938-46 in the papers [4], [5] and he established that for $p > 0$, p not an even integer the finite and nonzero limits

$$\lim_{n\to\infty} n^p\mathcal{E}_n(|x|^p, [-1,1]) = \sigma_p \tag{10.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^p\mathcal{E}_n(\operatorname{sign}(x)|x|^p, [-1,1]) = \sigma_p^*$$

exist, furthermore that for $x_0 \in (-1,1)$

$$\lim_{n\to\infty} n^p\mathcal{E}_n(|x-x_0|^p, [-1,1]) = (1-x_0^2)^{p/2}\sigma_p \tag{10.3}$$

holds true, where σ_p is the same constant as in (10.2).

In this section we consider the problem what happens for more general sets. If $E \subset \mathbf{R}$ is compact, then let

$$\mathcal{E}_n(f, E) = \inf_{\deg(P_n)} \|f - P_n\|_E$$

be the best approximation of f on E by polynomials of degree at most n in the supremum norm. Recall that

$$\Theta_E^*(t) = |[-t,t] \setminus E|$$

is the symmetric density function for E.

10.1. Theorem. *Let $E \subset \mathbf{R}$ be compact. If*

$$\int_0^1 \frac{\Theta_E^*(t, x_0)^2}{t^3} dt < \infty, \tag{10.4}$$

then for $p > 0$ *not an even integer we have*

$$\liminf_{n\to\infty} n^p \mathcal{E}_n(|x - x_0|^p, E) > 0. \tag{10.5}$$

Conversely, if $0 \le \Theta^*(t) \le t$ *is an increasing function on* $[0,1]$ *with*

$$\int_0^1 \frac{\Theta^*(t)^2}{t^3} dt = \infty, \tag{10.6}$$

then there is a compact set $E \subset [-1,1]$ *such that* $\Theta^*_E(t,0) \le \Theta^*(t)$ *for all* t *and*

$$\lim_{n\to\infty} n^p \mathcal{E}_n(|x|^p, E) = 0. \tag{10.7}$$

Without loss of generality we may assume $x_0 = 0$. It will be easier to work with approximation on $[0,1]$ of $|x|^{p/2}$ rather than with approximation on $[-1,1]$ of $|x|^p$. This can be easily done by considering $E^* = E \cap (-E)$, for which the nonsymmetric density function Θ_{E^*} satisfies

$$\Theta_{E^*}(t) \le \Theta^*_E(t) \le 2\Theta_{E^*}(t).$$

Furthermore the substitution $x \to x^2$ shows that

$$\mathcal{E}_n(|x|^p, E) = \mathcal{E}_{[n/2]}(|x|^{p/2}, E^*),$$

hence Theorem 10.1 is an immediate consequence of

10.2. Theorem. *Let* $E \subset [0,\infty)$ *be a compact set. If*

$$\int_0^1 \frac{\Theta_E(t)^2}{t^3} dt < \infty, \tag{10.8}$$

then for $p > 0$ *not an integer we have*

$$\liminf_{n\to\infty} n^{2p} \mathcal{E}_n(x^p, E) > 0. \tag{10.9}$$

Conversely, if $0 \le \Theta(t) \le t$ *is an increasing function on* $[0,1]$ *with*

$$\int_0^1 \frac{\Theta(t)^2}{t^3} dt = \infty, \tag{10.10}$$

then there is a compact set $E \subset [0,1]$ *such that* $\Theta_E(t) \le \Theta(t)$ *for all* t *and*

$$\lim_{n\to\infty} n^{2p} \mathcal{E}_n(x^p, E) = 0. \tag{10.11}$$

For approximating on the Cantor sets we prove

10.3. Theorem. *Let* $\epsilon_i \in [0,1)$, *and consider the Cantor-type set* $\mathcal{C}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$ *constructed with the sequence* $\{\epsilon_i\}$ *(see Chapter 5). Then for* $p > 0$ *not an integer*

$$\liminf_{n\to\infty} n^{2p} \mathcal{E}_n(x^p, \mathcal{C}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)) > 0 \tag{10.12}$$

if and only if $\sum_i \epsilon_i^2 < \infty$.

In particular, with the choice $\epsilon_i = 1/(i+1)$ we obtain a set $E = \mathcal{C}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$ of zero linear measure for which (10.12) is true. By symmetrization (i.e. considering $E = \{x \in [-1,1] \,|\, x^2 \in \mathcal{C}(1/2, 1/3, \ldots)\}$ we can deduce

10.4. Corollary. *There is a compact set $E \subset [-1,1]$ of zero linear measure such that for $p > 0$ not an even integer*

$$\liminf_{n\to\infty} n^p \mathcal{E}_n(|x|^p, E) > 0. \tag{10.13}$$

The density condition (10.4) appeared in the work [24] by R. K. Vasiliev in a slightly different form. Vasiliev considered approximation of $|x - x_0|^p$ on compact subsets, and his approach is as follows. Let

$$E = [-1,1] \setminus \cup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i),$$

and consider the sets

$$E_m = [-1,1] \setminus \cup_{i=1}^{m-1} (\alpha_i, \beta_i).$$

E_m consists of m intervals

$$E_m = \cup_{j=1}^{m} [a_j, b_j]$$

$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 \cdots b_{m-1} < a_m < b_m$, and for it define

$$h_{E_m}(x) = \frac{\prod_{j=1}^{m-1} |x - \lambda_j|}{\sqrt{\prod_{j=1}^{m} |x - a_j||x - b_j|}},$$

where λ_j are chosen so that

$$\int_{b_k}^{a_{k+1}} \frac{\prod_{j=1}^{m-1} (t - \lambda_j)}{\sqrt{\prod_{j=1}^{m} |t - a_j||t - b_j|}} dt = 0 \tag{10.14}$$

for all $k = 1, \ldots, m-1$. Now set

$$h_E(x) = \lim_{m\to\infty} h_{E_m}(x) = \sup_m h_{E_m}(x),$$

where it can be shown that the limit exists (but it is not necessarily finite).

Now with these notations Vasiliev claims the following two results:

$$\lim_{n\to\infty} n^p \mathcal{E}_n(|x - x_0|^p, E) = h_E(x_0)^{-p} \sigma_p, \tag{10.15}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^p \mathcal{E}_n(|x - x_0|^p, E) > 0 \Longleftrightarrow \int_0^1 \frac{\Theta_E^*(t, x_0)^2}{t^3} dt < \infty. \tag{10.16}$$

This second claim contradicts Corollary 10.4 (for a set E of zero measure we have $\Theta_E^*(t, x_0) \equiv 2t$), and the correct relevant result is Theorem 10.1. Vasiliev's paper [24] is 166 pages long, and the proof of (10.15) and (10.16) is about 160 pages, so it is difficult to say what went wrong in the proof. We do not know if the full (10.15) is correct, but we have a relatively simple proof that shows its validity provided x_0 lies in the interior of E.

To formulate the result let us recall that the density of the equilibrium measure for a set

$$E = \cup_{j=1}^{m}[a_j, b_j]$$

$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 \cdots b_{m-1} < a_m < b_m$ is given by

$$\omega_E(x) = \frac{\prod_{j=1}^{m-1} |x - \lambda_j|}{\pi\sqrt{\prod_{j=1}^{m} |x - a_j||x - b_j|}}, \tag{10.17}$$

where λ_j are chosen so that (10.14) is true for all $k = 1, \ldots, m-1$. Thus, Vasiliev's function is just $h_E(x) = \pi\omega_E(x)$ if E consists of a finite number of intervals, and also if E is arbitrary compact, but x is in its interior. Now (10.15) for $x_0 \in \mathrm{Int}(E)$ takes the following form.

10.5. Theorem. (R. K. Vasiliev) *Let $E \subseteq \mathbf{R}$ be compact and let x_0 be a point in the interior of E. Then*

$$\lim_{n\to\infty} n^p \mathcal{E}_n(|x - x_0|^p, E) = (\pi\omega_E(x_0))^{-p}\sigma_p, \tag{10.18}$$

where σ_p is the constant from Bernstein's theorem (10.2).

For example, if $F = [-1, 1]$, then

$$\pi\omega_{[-1,1]}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

and in this special case we recapture Bernstein's result (10.3).

11. References

Disszertációk

[1] L. V. Ahlfors, *Conformal Invariants*, McGraw-Hill Series in Higher Matheamtics, McGraw-Hill, New York 1973

[2] A. Baernstein II, Integral means, univalent function and cicular symmetrization, *Acta Mathematica*, **133**(1975), 139–169.

[3] S. N. Bernstein, Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynomes des degrés donnés, *Acta Math.* (Scandinavian), **37**(1914), 1–57.

[4] S. N. Bernstein, On the best approximation of $|x|^p$ by means of polynomials of extremely high degree, *Izv. Akad. Nauk SSSR,* Ser. Mat. **2**(1938), 160–180. Reprinted in S. N. Bernstein *Collected Works*, Vol. 2, pp. 262–272. Izdat. Nauk SSSR, Moscow, 1954 (Russian).

[5] S. N. Bernstein, On the best approximation of $|x-c|^p$, *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* **18**(1938), 379–384. Reprinted in S. N. Bernstein *Collected Works*, Vol. 2, pp. 273–260. Izdat. Nauk SSSR, Moscow, 1954 (Russian).

[6] A. B. Bogatyrev, Effective computation of Chebyshev polynomials for several intervals, *Math. USSR Sb.*, **190**(1999), 1571–1605.

[7] R. A. DeVore and G. G. Lorentz, *Contructive Approximation*, Grundlehren der mathematisschen Wissenschaften, **303**, Springer-Verlag, New York, 1993

[8] T. Erdélyi, A. Kroó and J. Szabados, Markov–Bernstein type inequalities on compact subsets of $\mathbf{R}$, *Analysis Math.*, **26**(2000), 17–34.

[9] J. Geronimo and W. Van Assche, Orthogonal polynomials on several intervals via a polynomial mapping, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **308**(1988), 559–581.

[10] K. G. Ivanov and V. Totik, Fast decreasing polynomials, *Constr. Approx.*, **6**(1990), 1–20.

[11] N. S. Landkof: *Foundations of Modern Potential Theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **190**, Springer–Verlag, New York, 1972

[12] P. Nevai and V. Totik, Weighted polynomial inequalities, *Constr. Approx.*, **2**(1986), 113–127.

[13] R. Nevanlinna, *Analytic Functions*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **162**, Springer Verlag, Berlin, 1970

[14] F. Peherstorfer, Deformation of minimizing polynomials and approximation of several intervals by an inverse polynomial mapping, *J. Approx. Theory*, **111**(2001), 180–195.

[15] T. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995

[16] E. B. Saff and V. Totik, *Logarithmic Potentials with External Fields*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **316**, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997.

[17] H. Stahl and V. Totik, *General Orthogonal Polynomials* Encyclopedia of Mathematics, **43**, Cambridge University Press, New York 1992

[18] M. Tsuji, *Potential Theory in Modern Function Theory*, Maruzen, Tokyo, 1959

[19] V. Totik, Polynomial inverse images of intervals and polynomial inequalities, *Acta Mathematica*, **187**(2001), 139–160.

[20] V. Totik, Markoff constants for Cantor sets, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **60**(1995), 715–734.

[21] V. Totik, On Markoff's inequality, *Constructive Approximation* (to appear)

[22] V. Totik, Fast decreasing polynomials via potentials, *J. DÁnalyse Math.*, **62**(1994), 131–154.

[23] R. Varga and A. J. Carpenter, On the Bernstein conjecture in approximation theory, *Constr. Approx.*, **1**(1985), 333-348.

[24] R. K. Vasiliev, Chebyshev Polynomials and Approximation Theory on Compact Subsetc of the Real Axis, Saratov University Publishing House, 1998.

[25] J. L. Walsh: *Interpolation and Approximation by Rational Functions In the Complex Domain*, Colloquium Publications **20**, Amer. Math. Soc., Providence 1960.

[26] H. Widom: Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane, *Advances in Math.*, **2**(1969), 127–232.

16. II. Függelék: WMI

A Bolyai Intézetben a számítógépes matematikai oktatás lehetőségével és problematikájával az Analízis Tanszéken belül 2002 óta foglalkozik Vajda Róbert és Kovács Zoltán tanársegéd. Ekkor indult útjára a WebMathematics Interactive (WMI) projekt, aminek egyik fő célkitűzése a hallgatói felzárkóztatás — olyan számítógépes szakértői rendszer segítségével, amelyben a hallgató önállóan is képes különféle feladattípusokat gyakorolni. Emellett a WMI projekt kutatásokhoz és kutatók szakmai tevékenységéhez is hozzájárul, mivel egyesít több szimbolikus számításokra képes programot.

A 2004-es beruházás a WMI projektet egy, a korábbinál nagyobb teljesítményű szerver számítógéppel látta el. Erre a számítógépre a későbbiekben további feladatokat is bíztunk, amellett, hogy elsődleges szerepe a WMI felhasználóinak gyors és megbízható kiszolgálása volt (és a mai napig is az).

A WMI-fejlesztés

A WMI az ITEM K+F 203/2003-as IHM-pályázaton sikerrel szerepelt, és 2004. januárjára eljutott egy olyan állapotba, amelyet 1.0-s kiadási verziószámmal adhattunk ki. Az 1.0-s kiadás óta eltelt mintegy 2 évben az alábbi újításokat, fejlesztéseket végeztük a rendszeren:

- **Többlépcsős tesztek.** Ezek segítségével a hallgatók feltételekhez kötött űrlapokon keresztül juthatnak el a kérdéses összetettebb feladat részleges, majd teljes megoldásához. Egy tipikusan ilyen probléma a racionális törtfüggvények integrálása. Az első lépés jellemzően a nevező szorzattá alakítása, majd a tört parciális törtekre bontása. Már a parciális törtekké alakítás során nagy figyelmet kell, hogy kapjon, hogy a nevező szorzat alakjában fellépnek-e irreducibilis másodfokú kifejezések vagy sem, s ez a döntés a számolás folytatásában is jelentkezni fog.

- **Függvényhatárérték-számítás.** (A korábbi változatokban csak sorozatok határértékeit lehetett kiszámítani.)

- **Átstrukturált tematikus modulrendszer.** A tematikus modulok olyan előre elkészített elektronikus tankönyvek, amelyek ugyan szokásos rutinfeladatok, de mindig más-más együtthatókkal és függvényekkel. Ezeket a mindig változó rutinfeladatokat a WMI a hozzá szervesen kapcsolódó komputeralgebra rendszerrel (Maple-vel, MuPAD-dal vagy Maximával) oldja meg. Az új tematikus modulrendszerben többek között az elemi kombinatorika, az euklideszi algoritmus, a Taylor-polinomok, a kettős és improprius integrálok oktatási modulja jelent meg. Emellett néhány, a középiskolákban is használható feladatsort építettünk be a rendszerbe.

- **Javított, szépített, felgyorsított felhasználói felület.** Többek között lehetőséget biztosítottunk arra is, hogy ne begépelni, hanem — akárcsak egy zsebszámológépnél — egérrel is be lehessen vinni tetszőlegesen bonyolult kifejezéseket is. Azoknak a felhasználóknak segítség ez, akiktől idegen a programozozási nyelvekben megszokott 1 dimenziós beviteli mód.

- **Bővített, pontosított dokumentáció.**
- **A valós és komplex függvények ábrázolásának számos funkcióval történő bővítése.** A komplex függvényábrázolást lényegesen felgyorsítottuk (C nyelven újraírva az eredeti Maple/Maxima nyelvű programkódot [6]). Új, átláthatóbb külsőt kapott a 3 dimenziós függvényábrázolás.
- **Olasz, eszperantó és kínai fordítás.**
- **Felhasználói authentikáció.** Ezzel a lehetőséggel a WMI-t használó oktatók nyomon tudják követni, hogy mely hallgatóik milyen eredménnyel oldották meg a WMI-ben feladott feladatsorokat.
- **Nyomtatható feladatsorok.**
- **Élő fájlrendszerű, letölthető WMI-változat.** Már a korábbi változathoz is készítettünk Knoppix technológián alapuló demó CD-t: így 2004 januárja óta az is képes volt használni a WMI programot, aki nem rendelkezett internet-eléréssel. Az új változat kisebb teljesítményű számítógépeken is helyesen működik, így még több felhasználóhoz juthat el matematikai szakértői rendszerünk.

Statisztikák

A WMI első fejlesztésévi évében (2002 júniusa és 2003 júniusa között) 47.000 találatot regisztráltunk [1]. Ez az elmúlt 2 és fél évben mintegy 40-szeresére nőtt [2].

További projektek

A wmi.math.u-szeged.hu gépnevű szerver számítógépre az alábbi — saját fejlesztésű — szolgáltatásokat telepítettük:

- **Háromszögek felbonthatósága egyenlőszárú háromszögek diszjunkt uniójára** (2004. március), Pascal/Maxima nyelven írt számítógépes program [3, 4]
- **Student csomag a Maxima komputeralgebrai rendszerhez**, CVS adattár (2004. november), `http://wmi.math.u-szeged.hu/cgi-bin/viewcvs/viewcvs.cgi/student` [5]
- **ODE Online**, internetes differenciálegyenlet-megoldó (2005. április), `http://wmi.math.u-szeged.hu/~kovzol/ode/ode.php`

- **Surf Online**, algebrai felületeket vizualizáló internetes program (2005. április),
`http://wmi.math.u-szeged.hu/~kovzol/surf/surf.php`
- **Real-Time Zooming Math Engine** (rtzme), valós idejű komplex függvénytani segédprogram (2005. október),
`http://wmi.math.u-szeged.hu/~kovzol/rtzme` [6]
- **Moodle oktatási portál**, teszt üzem (2005. december),
`http://wmi.math.u-szeged.hu/~kovzol/moodle`
- **XaoS fraktálrajzoló program**, wiki információs rendszer (2006. január), `http://wmi.math.u-szeged.hu/~kovzol/XaoS` [6]
- **Formula Converter** (formconv) projekt, teszt változat,
`http://formconv.sf.net`.
A formconv különböző formátumú (pl. MathML, TEX/LATEX, C, Pascal, Java, CAS) képletek egymás közötti konverzióját végzi el.

Tudományos cikkek

Munkánkról tudományos cikkekben is beszámoltunk. Ezek listáját az alábi irodalomjegyzék tartalmazza.

A WMI projekt hasznosságáról, az oktatásban és kutatásban tapasztalt előnyeiről (és esetleges hátrányairól), továbbá az *rtzme*, *XaoS* és *formconv* programok fejlesztési eredményeiről további cikkekben készülünk hírt adni.

Hivatkozások

[1] R. Vajda and Z. Kovács: Interactive Web Portals in Mathematics, *Teaching Mathematics and Computer Science* 1 (2) (2003), 347-361., Debrecen

[2] `http://wmi.math.u-szeged.hu/wmi/webalizer/`

[3] J. Kosztolányi, Z. Kovács, E. Nagy: Decomposition of Triangles into Isosceles Triangles I, *Teaching Mathematics and Computer Science* 2 (1) (2004), 163-184., Debrecen

[4] J. Kosztolányi, Z. Kovács, E. Nagy: Decomposition of Triangles into Isosceles Triangles II, *Teaching Mathematics and Computer Science* 2 (2) (2004), 275-300., Debrecen

[5] Kókai Zoltán, Kozma Gábor, Kovács Gergely, Illés Szabolcs: Student csomag készítése a Maxima komputeralgebrai rendszerhez. *Szakdolgozatok.* SzTE Informatikai Tanszékcsoport (2005)

[6] J. Hubička, Z. Kovács, Z. Kovács: Visualizations on the Complex Plane, Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching. *Proceedings of Sprout-Selecting Conference* (2004), 12-27., Pécs