OTKA F43772:

szakmai zárójelentés 2003–2007

A projekt keretében a terveknek megfelelően véges projektív terek és síkok kombinatorikusan definiált ponthalmazaival, valamint poláris terek nevezetes ponthalmazaival kapcsolatban folytattunk kutatásokat. A tervekhez képest annyi hangsúlyeltolódás történt, hogy a klasszikusabb struktúrákban adódott több eredmény. A tervek szerint vizsgáltunk egyéb kombinatorikus kérdéseket is, pl. szavak kombinatorikájával is foglalkoztunk. Az alkalmazott módszerek széleskörűek, a véges testek fölötti polinomok, ill. algebrai görbék alkalmazásaitól kezdve klasszikus geometriai, véletlen módszert alkalmazó kombinatorikai megfontolásokat is sikerült ötvöznünk.

Sziklai Péter Fancsali Szabolccsal közösen a $\mathrm{PG}(8, q)$ projektív térben konstruált különböző deficienciájú maximális parciális sík-befedéseket. Az általuk konstruált parciális sík-befedés deficienciája $\delta = (k-1) \cdot q^2$, ahol $k \leq q^2 + q + 1$ és $\delta = k \cdot q^2 + l \cdot (q^2 - 1) + 1$, ahol $k + l \leq q^2$ és $\delta = (k+1) \cdot q^2 + l \cdot (q^2 - 1) + m \cdot (q^2 - 2) + 1$, ahol $k + l + m \leq q^2$. Ezen eredmények felhasználásával $\mathrm{PG}(3m - 1, q)$ projektív térben is konstruáltak maximális parciális sík-befedéseket, különféle deficienciákkal.

Gács András megmutatta, hogy egy p-elemű ponthalmaz $\mathrm{AG}(2, p)$-ben vagy egyenes vagy az $x^{\frac{p+1}{2}}$ függvény grafikonja vagy legalább $2p/3$ irányt határoz meg.

Gács András, Mengyán Csaba, Szőnyi Tamás és **Weiner Zsuzsa** társszerzőikkel (Antonello Cossidente és Alessandro Siciliano) nagy méretű minimális lefogó ponthalmazokat vizsgáltak projektív síkokon. Néhány új konstrukció mellett sűrűségi tételeket bizonyítottak és nem négyzet rendű síkokon megjavították a Bruen-Thas felső becslést a legnagyobb minimális lefogó ponthalmaz méretéről. A sűrűségi eredmény az alábbi.

Tétel. *Ha q négyzet, akkor $\mathrm{PG}(2, q)$-ban a $[4q \log(q), q\sqrt{q} - q + 2\sqrt{q}]$ intervallumban minden értékhez van olyan méretű minimális lefogó ponthalmaz.*

A konstrukció Buekenhout híres unitál-konstrukcióját általánosítja. A konstrukciót azóta többen is használták némileg általánosítva, elsősorban Polverino, Mazzocca, valamint Storme.

Gács András, Sziklai Péter és **Weiner Zsuzsa** (társsz.: S. Ball és A. Blokhuis) alsó becslést adtak azon ponthalmaz méretére $PG(n,q)$-ban, mely minden hipersíkot $r \pmod p$ pontban metsz, ahol $1 < r < q$ rögzített. Konstrukciót is adtak, mely $q = p^2$ esetén a becslés élességét adja. Az $n = 2$, q páratlan eset egyben új és egyszerűbb bizonyítást ad arra a Ball-Blokhuis-Mazzocca tételre, mely szerint páratlan rendű testre épített projektív síkon nincsenek maximális ívek. A cikk eredményei a következő kódelméleti tételt adják: ha egy lineáris $[n,k]_q$ kódra igaz, hogy a hosszát és minden szó súlyát osztja egy $r < q$ konstans és a duális kód minimális távolsága legalább 3, akkor a kód hosszára $n \geq (r-1)q + (p-1)r$ teljesül. $q = p^2$ esetén vannak is ilyen kódok.

Gács András (társszerző J. De Beule) megmutatta, hogy a $Q(4,q)$ általánosított négyszögben nincsenek q^2-1 méretű maximális parciális ovoidok, ha q nem prím. $q < 13$ prím esetén ismertek példák. Korábbi eredményekkel összevetve ez azt adja, hogy a (q^2+1 méretű) ovoidok utáni legnagyobb példák mérete legfeljebb q^2-3.

Projektív sík egy nemüres S ponthalmazát *szemioválisnak* nevezzük, ha minden $P \in S$ pont esetén pontosan egy olyan ℓ egyenes létezik, melyre $S \cap \ell = \{P\}$. A klasszikus példák szemioválisokra egyrészt a polaritásokkal (oválisok és unitálok), másrészt a lefogó ponthalmazokkal (projektív háromszög) vannak kapcsolatban. A szemioválisok tanulmányozását kriptográfiai alkalmazásaik is motiválják.

Gács András igazolta a következőt.

Tétel *Az oválisokon és unitálokon kívül nincsenek olyan ponthalmazok $PG(2,q)$-ban, melyek minden egyenest $0, 1$ vagy r pontban metszenek és melyek minden pontján pontosan egy érintő megy.*

Ezt a kilencvenes évek elején Blokhuis és Szőnyi sejtette.

Gács András és **Sziklai Péter** (társszerző: S. Ball) a klasszikus irány-probléma alábbi háromdimenziós általánosítását vizsgálták: egy p elemű ponthalmaz $AG(3,p)$-ben nem határoz meg egy végtelen távoli egyenest, ha minden olyan sík, melynek ez az egyenes a végtelen távoli egyenese, egy pontban metszi a kérdéses halmazt. A cikkben nagyságrendileg éles becslést adnak a szerzők arra, hogy hány egyenest kell meghatároznia egy nem síkbeli p elemű ponthalmaz, ha p prím. A permutáció polinomok nyelvén az eredmény azt adja, hogy ha f, g polinomok a $GF(p)$ véges test felett, melyekre nem teljesül $f(x) = cg(x) + dx + e$, akkor legfeljebb $2p^2/9$ olyan (c, d) pár van, melyre $f(x) + cg(x) + dx$ permutáció.

Sziklai Péter másodrendű kúpok részleges kúpszeletnyalábjainak kiegészíthetőségét vizsgálta. Kúpszeletnyaláboknak számos alkalmazása van véges geometriákban (transzlációsíkok, általánosított négyszögek, BLT-halmazok). A cikk arra ad rövid bizonyítást, hogy ha csak $c\sqrt{q}$ kúpszelet hiányzik, akkor a részleges nyaláb kiegészíthető teljes kúpszeletnyalábbá. Ezt az eredményt sikerült bizonyos, másodfokúnál magasabb fokú görbére emelt kúpokra is kiterjeszteni.

Sziklai Péter Yves Edellel és Leo Stormeval konkrét projektív terekben megjavítják a maximális süveg méretére eddig ismert korlátot. **Sziklai Péter**, **Weiner Zsuzsa**, Sandy Ferret-tel és Leo Storme-val közösen megmutatták, hogy PG(n, q)-beli, $q = p^h$, p prím, nem túl nagy méretű minimális, súlyozott, t-szeres, k-dimenziós altereket lefogó ponthalmazok olyanok, hogy minden k-dimenziós alteret t modulo p pontban metszenek. Ez az eredmény fontos szerepet játszhat ezen lefogó ponthalmazok karakterizálásakor. Az eredmény Szőnyi Tamás és Weiner Zsuzsa korábbi, egyszeres lefogó ponthalmazokról szóló hasonló eredményét általánosítja.

Sziklai Péter AG$(3, p)$-beli, p^2 pontú ponthalmaz által meghatározott irányok számára bizonyít korlátokat, majd Gács egy eredményét felhasználva megmutatja, hogy a kevés irányt meghatározó ponthalmazok hengeres szerkezetűek

Sziklai Péter foglalkozott algebrai görbékkel is. Azt a sejtést fogalmazza meg, hogy egy GF(q) feletti n-edfokú síkgörbének, ha nem tartalmaz lineáris komponenst, legfeljebb $(n-1)q+1$ pontja lehet (multiplicitás nélkül számolva). A sejtést sok részeset támasztja alá, a triviális korlát $(n-1)q+n$. A cikkben a "félút"-ig sikerül eljutni, az $(n-1)q + [n/2]$, mint felső korlát igazolásáig

Sziklai Péter fontos eredményeket ért el PG$(2, q)$ kisméretű, azaz $3(q+1)/2$-nél kevesebb pontú lefogó ponthalmazaira. Itt az a régi nagy sejtés, hogy az ilyen lefogóhalmazok GF(q) egy résztestje felett lineárisak. A cikk az alábbi tételt igazolja.

Tétel *$PG(2, q)$ bármely kisméretű lefogó ponthalmazára teljesül, hogy min-*

den egyenesmetszete 1 mod p^e méretű, ahol $GF(p^e)$ résztest, és majdnem minden egyenes $GF(p^e)$-lineáris ponthalmazban metsz.

A szintén előkészületben lévő [2] dolgozatban pedig Szőnyi Tamás és **Weiner Zsuzsa** $PG(2,q)$ páros halmazainak (olyan ponthalmazok, melyek minden egyenest páros sok pontban metszenek) illetve nem túl nagy méretű lefogó ponthalmazainak (olyan ponthalmazok, melyek minden egyenest metszenek) stabilitását vizsgálják, vagyis azt hogy egy olyan ponthalmaz, mely majdnem minden egyenest páros sok pontban metsz, illetve metsz előáll-e, egy páros halmazból illetve lefogó ponthalmazból úgy, hogy abból néhány pontot törlünk illetve ahhoz néhány pontot hozzáadunk. Megjavították a kézirat páros halmazokra vonatkozó részét. Ezek olyan halmazok, amelyek minden egyenest páros sok pontban metszenek. Az következőt mutatták meg.

Tétel *$PG(2,q)$ (q páros) olyan ponthalmaza, amelynek $z < ([\sqrt{q}]+1)(q+1-[\sqrt{q}])$ páratlan szelője van, $[z/(q+1)]$ pont módosításával (törlésével vagy hozzáadásával) páros halmazzá tehető.*

A tétel így már éles, ha q négyzetszám. Ilyenkor Segre ívek beágyazásáról szóló híres tételének általánosítását kapjuk.

Weiner Zsuzsa olyan $\mathrm{PG}(n,q^2)$-beli, $3(q^{n-k}+1)/2$-nél kisebb ponthalmazokat karakterizál, mely minden k-dimenziós alteret 1 modulo q pontban metsz. Az ilyen halmazok minimális lefogó ponthalmazok k-dimenziós alterekre nézve. Így a fenti eredményt felhasználva sikerült $\mathrm{PG}(n,q^2)$ nem túl nagy méretű lefogó ponthalmazait karakterizálni.

Weiner Zsuzsa Simeon Ball-lal közösen 'An Introduction to Finite Geometry' címmel egyetemi jegyzetet írt.

Sziklai Péter több, szavak kombinatorikájához kapcsolódó cikket írt . Ezeket részben kriptográfiai illetve nemklasszikus kódelméleti alkalmazások motiválják.

Az irodalomjegyzék olyan dolgozatokat, kéziratokat tartalmaz, melyeket a jelentéshez kapcsolódó internetes felületen nem tüntettünk fel. A tisztánlátás kedvéért megjegyezzük, hogy a technikai segédlet „A zárójelentésben már meg kell jelenjenek a közlésre előkészített kéziratok" kitétele alapján néhány „submitted" és „to appear" státuszú cikket is beírtunk az internetes listába.

Hivatkozások

[1] S. Ball, Zs. Weiner, *An Introduction to Finite Geometry*, http://www-ma4.upc.es/~simeon/IFG.pdf

[2] Zs. Weiner, T. Szőnyi, On stability theorems in finite geometry, kézirat

[3] P. Sziklai, On small blocking sets and their linearity, *J. Combin. Th. Ser A.*, to appear.