A T043631 SZÁMÚ OTKA PÁLYÁZAT ZÁRÓJELENTÉSE

TÉMAVEZETŐ: KÁROLYI GYULA
RÉSZTVEVŐK: GYARMATI KATALIN ÉS SOLYMOSI JÓZSEF

A pályázat keretében 55 tudományos dolgozatunk született, kb. 600 oldal összterjedelemben, mely egyenletesen oszlik el a pályázat három résztvevője között. Szinte mindegyik munka igen nívós nemzetközi folyóiratban látott napvilágot, vagy van megjelenés alatt. A dolgozatokra 97 hivatkozásról van tudomásunk, ezek közül 56 már megjelent munkában, a többi preprintek formájában. A hivatkozók között Bourgain, Chang, Gowers, Hamidoune, Konyagin, Sárközy, Tao is szerepelnek. Az eredményekről számos nemzetközi konferencián, illetve neves kutatóhelyek szemináriumain számoltunk be, a támogatás nagy részét utazásra fordítottuk.

Az alábbiakban a teljesség igénye nélkül összefoglaljuk az elért eredményeket témakörök szerinti bontásban. A dolgozatokra a közleményjegyzékben szereplő sorszám szerint hivatkozunk, részletesebben csak a legfontosabb eredményekre térünk ki. Látható, hogy munkatervünk szinte valamennyi pontjában sikerült lényeges új eredményeket felmutatnunk. A legtöbbet idézett munkák [1], [6], [10], [11], [13] és [25], rendre 6, 14, 8, 6, 16 és 10 hivatkozással, de várhatóan nagy lesz a [14], [21], [22], [30], [37] és [40] dolgozatok hatása is.

(1) *Kombinatorikus konvexitás* [1], [8], [23], [39].
[1]-ben az Erdős–Szekeres tételhez kapcsolódó kérdéseket vizsgálunk színezett ponthalmazokra. Egy ponthalmazt k-konvexnek hívunk, ha bármely három pontja által meghatározott háromszög belsejébe a ponthalmaznak legfeljebb k pontja esik. [11]-ben azt igazoljuk, hogy elegendően nagy számú belső ponttal rendelkező k-konvex halmazban mindig található olyan konvex sokszög, melynek belseje előírt számú pontot tartalmaz. [23]-ban pontosan meghatározzuk, legalább hány pontja kell legyen egy 1-konvex halmaznak, hogy tartalmazzon üres ℓ-szöget. [39]-ben az Erdős–Szekeres tétel Ramsey-elméleti vonatkozásait vizsgáljuk, és megmutatjuk, hogy az Erdős–Hajnal sejtés megfelelője ebben a környezetben nem igaz.

(2) *Extremális kérdések a diszkrét geometriában* [4], [5], [7], [12], [14], [27], [28], [41], [42], [50], [51], [55]
A [7], [14], [27] és [42] dolgozatok Erdős pontkonfigurációkban előforduló különböző távolságok számával kapcsolatos kérdésével foglalkoznak. [27]-ben pl. olyan konst-

rukciót adunk, amely nagy dimenziókban nagyon közel van az Erdős által sejtett optimumhoz. A [41], [51], [55] dolgozatokban a Szemerédi–Trotter tételhez (melynek alkalmazásairól a (3) pontban írunk) kapcsolódó geometriai incidencia-tételeket bizonyítunk. [41]-ben belátjuk, hogy ha n pont és n egyenes között a síkon olyan sok illeszkedés található, amit a Szemerédi–Trotter tétel még megenged, akkor sok olyan pont kell legyen a megadottak között, melyek közül bármelyik kettőre illeszkedik megadott egyenes. [55]-ben a 3-dimenziós esetben adjuk meg Bourgain egy kérdésére az első nemtriviális választ, [51]-ben pedig a Pach–Sharir tételt általánosítjuk. [5]-ben olyan síkbeli véges ponthalmazok tulajdonságait vizsgáljuk elemi számelméleti eszközökkel, melyekben bármely két pont távolsága egész szám. A [4], [12] és [50] dolgozatokban geometriai vonatkozású Ramsey típusú kérdéseket vizsgálunk. [4]-ben teljes gráfok síkbeli lerajzolásaiban mutatunk elkerülhetetlen konfigurációkat, [12]-ben pedig a Fáry tétel egy színezett változatát bizonyítjuk. [50]-ben többek között azt vizsgáljuk, hány csúcsa kell legyen egy teljes geometriai gráfnak ahhoz, hogy az éleit adott számú színnel színezve mindig legyen benne sok egyszínű páronként diszjunkt él.

(3) *A diszkrét geometria és az additív számelmélet kapcsolata* [6], [13], [15], [24], [25], [26], [29], [37], [40], [43], [52], [54]
Ezek az eredmények jelentik kutatásunk legszélesebb körben érdelődésre számot tartó, nagyléptű kurrens nemzetközi kutatásokhoz kapcsolódó részét, felmérhető hatásuk is ezeknek a legnagyobb. A [6], [13] és [29] dolgozatok Roth, Szemerédi és van der Waerden tételéhez nyújtanak egyszerű és szemléletes geometriai megközelítést. Gowers és Tao ezek inspirálására dolgozták ki az ún. hipergráf elhagyási lemmát, mely elvezetett a Szemerédi tétel eddigi legáttekinthetőbb bizonyításához, és a Ramsey-elméletben is egyre jelentősebb szerephez jut. Ennek rövid, közérthető összefoglalása jelenik meg [26]-ban, [52] egy bevezető jellegű áttekintés, és [40] is ehhez kapcsolható. A [15], [24], [25], [37], [43] és [54] dolgozatok az illeszkedési geometria és a kombinatorikus számelmélet szoros kapcsolatát igazolják. [24] és [25] Elekesnek a Szemerédi–Trotter tételre alapuló ötletét viszi tovább Erdős és Szemerédi hibrid problémájával kapcsolatban, az első esetben a komplex számtest fölött általánosítva azt, a második esetben pedig az eredményt lényegesen meg is javítva: ha A a komplex számok n-elemű részhalmaza, akkor $A + A$ vagy $A \cdot A$ számossága $\gg n^{14/11}/\log^{3/11} n$. [37]-ben véges testek esetén vizsgáljuk a kérdést, [43] és [54] pedig messzemenő általánosításokat is tartalmaz.

(4) *Egyeletes eloszlású és pszeudovéletlen sorozatok* [2], [10], [18], [19], [30], [31], [33]
A dolgozatok bináris sorozatok pszeudovéletlen tulajdonságaival foglalkoznak. [10]-ben a diszkrét logaritmus, [19]-ben lineáris rekurzió, [31]-ben a hatványozás (minden esetben modulo p értendő) segítségével konstruálunk álvéletlen 0–1 sorozatokat, és vizsgáljuk azok tulajdonságait Sárközy és Maduit által bevezett egyenletes eloszlási, illetve korrelációs mértékek szerint. A [2], [30] és [33] dolgozatok [10] továbbfejlesztéséből keletkeztek, jelentőségük abból ered, hogy a [10]-ben

bevezetett sorozatok gyorsan generálhatók, de továbbra is erős pszeudovéletlen tulajdonságokkal bírnak. A [10]-es dolgozat fontosságára már számos alkalommal rámutattak. [18]-ban Maduit egy korrelációs egyenlőtlenségre vonatkozó sejtését igazoljuk. A vizsgált kombinatorikus jellgű problémák kezelésére legfontosabb eszközünk az exponenciális összegek elmélete. [31]-ben Bourgain egy friss és igen mély eredményét alkalmazzuk a korrelációs mérték kezelésére.

(5) *A polinom-módszer és alkalmazásai* [11], [20], [21], [46]
[11]-ben a polinom-módszert arra használjuk, hogy az Erdős–Heilbronn sejtés megoldását kiterjesszük prímhatványrendű ciklikus csoportokra is. [20] egy nagyobb közönség számára írt, inkább bevezető, áttekintő jellegű munka. [21] a kombinatorikus nullhelytétel első közvetlen alkalmazását tartalmazza, az Erdős–Heilbronn sejtéshez kapcsolódó nehéz inverz problémát oldunk meg. Fő eredményünk, melynek nagy visszhangja volt, a következő: ha a p elemű ciklikus csoport egy k elemű A részhalmazára, ahol $k \geq 5$, $p \geq 2k-1$, az $\{a + a' \mid a, a' \in A, a \neq a'\}$ halmaz elemszáma $2k-3$, akkor A elemei egy számtani sorozatot alkotnak. [46]-ban hasonló módszerrel az Erdős–Heilbronn sejtés egy másik, eddig tisztázatlan esetét oldjuk meg.

(6) *Diszkrepancia-elmélet*
Ebben a témában két dolgozatunk van előkészületben, melyek egyikét a zürichi FIM által rendezett Geometric Combinatorics and Optimization workshop keretében mutattuk be.

(7) *Diofantikus problémák* [9], [16], [17], [32], [35], [36], [44], [45]
A [9], [16], [17] és [36] dolgozatok Diofantosz egy problémájához kapcsolódnak. Az alapkérdés az, hogy egész számok adott A és B halmazából hány olyan (a, b) számpár választható ki, hogy $ab + 1$ teljes hatvány legyen. Különböző mellékfeltételek esetén adunk erre felső becslést A és B számosságának függvényében, a bizonyításoknál Turán típusú extremális gráfelméleti tételekre támaszkodva. [32]-ben azt vizsgáljuk, hogy egy egész szám osztói között milyen gyakran szerepelhetnek egy egész együtthatós polinom egész helyen felvett helyettesítési értékei, magasabb fokú polinomokra kiterjesztve, illetve részben megjavítva de la Brèteche korábbi eredményeit. A [35], [45], [46] dolgozatok témája annak vizsgálata, hogy a p elemű test fölött milyen nagy részhalmazok esetén van egy adott diofantikus egyenletnek olyan megoldása, hogy az egyes ismeretlenek a megfelelő halmazokból kerüljenek ki. A Sidon-problémával, illetve a Schur féle egyenlettel rokonságba hozható egyenleteket karakterösszeg-becslésekkel és a Ramsey-elmélet segítségével közelítjük meg.

(8) *Extremális problémák a kombinatorikus számelméletben* [3], [22], [34], [47]
Az (5) pont alatt már tárgyalt [11] dolgozatban kombinatorikus gondolattal visszük át Dias da Silva és Hamidoune tételét Abel-csoportok direkt összegére. A [3] dolgozat ennek a gondolatnak egy továbbfejlesztését tartalmazza, melyet [21] fő eredményének tetszőleges Abel-csoportokra vonatkozó kiterjesztéséhez is fel tudtunk

használni. Ez vezetett el a csoportbővítések általános alkalmazásáig, melyet a Feit–Thompson tétellel összekapcsolva általánosítjuk [22]-ben a Cauchy–Davenport tételt és Vosper inverz tételét nemkommutatív csoportokra. A módszert azóta már mások is használják. [34]-ben a kétszeres és háromszoros összeghalmazok számossága közötti kapcsolatot vizsgáljuk prímrendű ciklikus csoportokban, [47]-ben pedig Lev egy részhalmazösszegekre vonatkozó sejtését bizonyítjuk.

(9) *További kutatások* [38], [48], [49], [53]
[38]-ban az additív számelméletben, bilineáris algebrában és topológiában is fontos szerepet játszó Hopf–Stiefel függvényt leíró, Plagne által pár éve talált formulára adunk rövid elemi bizonyítást. [48]-ban egész értékű függvények periodikus függvények összegeként való előállíthatóságát vizsgáljuk algebrai és számelméleti eszközökkel. A következő dolgozat számelméleti geometriához kapcsolódik. Tekintsünk egy olyan összefüggő, nem feltétlenül egyszerű gráfot, melynek automorfizmuscsoportja minden orbiton egy nem feloldható faktorcsoporton keresztül hat. Pál Ambrusnak ilyen gráfok segítségével sikerült elsőként tetszőleges karakterisztikájú testek fölött minden $g \geq 40$ esetén olyan g génuszú nemszinguláris geometriailag irreducibilis projektív görbéket konstruálni, melyek nem rendelkeznek feloldható pontokkal. A görbék génusza megegyezik a megfelelő gráf ún. ciklomatikus számával, más szóval a gráfban található független körök számával. [49]-ben meghatároztuk g összes olyan lehetséges értékét, amelyre ez a konstrukció működik. A megoldás során a gráfok spektrális elméletét és a minimálisan egyszerű csoportok Thompsontól származó osztályozását is felhasználtuk. A 30 oldalas cikket Lovász László javaslatára az Advances in Mathematics folyóiratba nyújtottuk be. [53]-ban Sylvester–Gallai típusú illeszkedési tételeket bizonyítunk a valós számtest helyett a komplex számtest illetve a kvaterniók ferdeteste feletti affin síkon.