Az eredeti kutatási tervünknek megfelelően a diszkrét geometria több alapvető fontosságú, máig nyitott problémájával kapcsolatos kérdéseket vizsgáltunk (pl Kneser-Poulsen sejtés, gömbelhelyezések magasabb dimenziókban, Gohberg-Markus-Hadwiger-féle fedési probléma). Új módszerek alkalmazásával több területen sikerült jelentős eredményeket elérnünk. Másik célunk az eddig főleg az euklidészi terekben vizsgált problémák szférikus, hiperbolikus és normált terekbe való kiterjesztése volt, amit szintén sikerült teljesítenünk több különböző kérdés esetén.

A projekt kezdetekor a kilenc résztvevő közül öt doktorandusz volt. Közülük a négy év során Daróczy-Kiss Endre és Lángi Zsolt az ELTE-n megszerezte a PhD fokozatot, Naszódi Márton pedig a Calgary Egyetemen benyújtotta doktori értekezését, amit 2007 tavaszán fog megvédeni. Mindhármuk disszertációjában jelentős részt képeznek az OTKA pályázat támogatásával elért eredmények.

A támogatás jelentős részét konferenciákon való részvételre, külföldi munkalátogatásokra, illetve külföldi vendégek hazai konferenciákra szóló meghívásására használtuk. Az itthon szervezett konferenciák közül a legfontosabb a 2004. júniusában Budapesten, Tudor Zamfirescu 60. születésnapja alkalmából rendezett „Convexity and Discrete Geometry” című volt. A pályázat résztvevői a négy év során több mint 50 előadást tartottak különböző nemzetközi konferenciákon, többször meghívott előadóként. Ezek közül a legfontosabbak:

- ˝Conference on Combinatorial and Discrete Geometry˝, Berkeley, USA, 2003;
- ˝Conference on Geometry˝, Salzburg, Ausztria, 2003;
- ˝Workshop on Sphere Packings˝, Fukuoka, Japán, 2004
- ˝20th British Combinatorial Conference˝, Durham, Nagy-Britannia, 2005;
- ˝Discrete Geometry Meeting in Oberwolfach˝, Németország, 2005;
- ˝Densest Packing of Spheres˝, BIRS, Banff, Kanada, 2005;
- ˝CMS Summer Meeting˝, Calgary, Kanada, 2006;
- ˝International Congress of Mathematicians", Madrid, Spanyolország, 2006.

A konferenciák mellett egyéni meghívás alapján is sok előadást tartottak a résztvevők, többek közt a Berlini Műszaki Egyetemen, a Calgary-i, Edmontoni, Jénai, Ljubljanai, Magdeburgi és a Perugiai Egyetemeken, valamint hazai szemináriumok keretében többek közt az ELTE-n, a Szegedi Tudományegyetemen és az MTA Rényi Intézetében.

A legfontosabb elért eredményeink (a mellékelt publikációs listának megfelelő sorrendben):

Normált terek állandó szélességű halmazait vizsgálta Naszódi Márton és Visy Balázs [1]. Valamely véges dimenziós Banach tér egy K halmazát átmérőre nézve maximálisnak nevezzük, ha K minden valódi részhalmazának átmérője kisebb, mint K átmérője. Megmutatták, hogy egy sima halmaz pontosan akkor állandó szélességű, ha átmérőre nézve maximális. Azt is belátták, hogy ha a térben van két olyan, az origóra szimmetrikus pont melyekre igaz, hogy az egységgömb bármely lapja tartalmazza az egyiküket, akkor a térben az állandó szélességű halmazok megegyeznek a gömbökkel.

A diszkrét geometria egyik legismertebb problémája a Kneser-Poulsen sejtés, amely szerint ha a d-dimenziós euklidészi térben véges sok gömböt úgy rendezünk át, hogy közülük semelyik kettő középpontja sem kerül közelebb egymáshoz, akkor uniójuk térfogata nem csökken. A síkbeli esetet Bezdek Károly és R. Conelly 2001-ben bebizonyította, magasabb dimenzióban azonban a kérdés továbbra is nyitott. Ugyanők a [2] cikkben bebizonyították a sejtést a d-dimenziós szférikus tér félszféráira, azaz megmutatták, hogy ha P és Q két olyan konvex szférikus d-politóp, melyek mindegyike n darab félszféra metszete, továbbá igaz rájuk, hogy bármely két Q-hoz tartozó félszféra szöge legalább akkora, mint a nekik megfelelő P-hez tartozó félszférák szöge, akkor Q térfogata legalább akkora, mint P térfogata.

A d-dimenziós euklidészi térben jelölje t_d azon egymásba nem nyúló, egybevágó d-dimenziós gömbök maximális számát, melyek mind érintenek egy velük egybevágó gömböt. t_d pontos értékének meghatározása a diszkrét geometria egyik legrégebbi problémája. A $t_2=6$ egyenlőség triviális, viszont a $t_3=12$ (a híres Newton-Gregory probléma) első teljes bizonyítását csak 1953-ban írták le. Böröczky Károly [3] erre adott új, az eddigieknél lényegesen egyszerűbb bizonyítást. Ha $d>3$, akkor csak d=4, 8 és 24 esetén ismert t_d pontos értéke. A $t_4=24$ egyenlőséget O. Musin bizonyította három éve. Ebben az esetben egy konstrukció nyilvánvaló, a középső gömb köré írt szabályos 24-cella csúcsaiba kell az érintőgömbök középpontjait elhelyezni. A sejtés az, hogy ezt másképp nem is lehet megtenni, azaz ha 25 egybevágó gömb közül 24 érinti a 25.-et, akkor a 24 középpont egy szabályos 24-cella csúcsait adja meg. Ennek a sejtésnek egy lokális változatát bizonyította Bezdek Károly [16]. Megmutatta, hogy ha az érintőgömbök középpontjai közel vannak egy 24-cella csúcsaihoz, akkor egybe kell esniük azokkal. Ugyanebben a közleményben azt is belátta, hogy ha valamely állandó görbületű 3-dimenziós tér egy gömbjében legalább két egybevágó, egymásba nem nyúló gömböt helyezünk el, akkor ezeknek a sűrűsége kisebb, mint a 3-dimenziós euklidészi tér legsűrűbb gömbelhelyezésének sűrűsége.

Tammes problémájának nevezik a 3-dimenziós euklidészi tér egységgömbjén elhelyezett n pont közti minimális távolság maximumának meghatározását. Ennek pontos értéke csak $n<13$ és $n=24$

esetén ismert, a többi esetben csak becslések vannak. Az n=13 eset különösen érdekes, mert szorosan összefügg a Newton-Gregory problémával. A Schüttétől és van der Waerdentől származó eddigi legjobb becslést (mely szerint a távolság legfeljebb 1,04719…) Böröczky Károly és Szabó László [5] jelentősen megjavította (az új korlát 1,02746…). Ugyancsak ők [6] az eddiginél jobb becslést adtak a Tammes probléma felső korlátjára n=14, 15, 16 és 17 esetén is.

Bezdek Károly [9] a hiperbolikus térfogatra vonatkozó következő monotonitási tételt látta be: Legyenek adottak a 3-dimenziós hiperbolikus térben a kombinatorikusan izomorf P és Q konvex poliéderek. Ha a poliéderekre teljesül, hogy bármely két, élben találkozó lapjuk által bezárt szög nem nagyobb a derékszögnél, továbbá Q valamennyi ilyen lapszöge legalább akkora, mint P megfelelő lapszöge, akkor P térfogata legalább akkora, mint Q térfogata. Hasonló eredményt bizonyított nem-tompaszögű lapszögekkel rendelkező szimplexekre tetszőleges dimenzióban.

A d-dimenziós euklidészi tér egy X ponthalmazát antipodálisnak hívjuk, ha bármely két pontjához létezik X konvex burkának két különböző, párhuzamos támaszhipersíkja, melyek a két pont közül egyet-egyet tartalmaznak. Egy poliédert antipodálisnak nevezünk, ha a csúcshalmaza antipodális. Az antipodális poliéderekkel kapcsolatban T. Bisztriczky és Böröczky Károly [13] bebizonyították azt a Grünbaum által eredetileg hibásan bizonyított tételt, miszerint a 3-dimenziós euklidészi térben bármely antipodális poliédernek legfeljebb 5 csúcsa lehet. Bezdek Károly, T. Bisztriczky és Böröczky Károly [10] a 3-dimenziós euklidészi tér élantipodális poliédereit vizsgálták. Ezek olyan konvex testek, melyeknél a csúcshalmaz antipodalitása helyett csak azt követeljük meg, hogy bármely két olyan csúcsához, melyeket él köt össze, létezzenek az összekötött csúcsokat tartalmazó különböző, párhuzamos támaszhipersíkok. Megmutatták, hogy egy ilyen poliédernek legfeljebb 8 csúcsa van, és egyenlőség csak az affin kocka esetén áll fenn. Azt is belátták, hogy ha az antipodalitás definíciójában szereplő párhuzamos hipersíkpároknál azt követeljük meg, hogy a poliéderrel való metszetük csak a megfelelő csúcsot tartalmazza, akkor az ilyen tulajdonságú, ún. szigorúan antipodális poliédernek legfeljebb 5 csúcsa van. Az antipodalitás fogalmát többféleképp lehet kiterjeszteni hiperbolikus terekre. Ezeket a lehetőségeket Bezdek Károly, Naszódi Márton és D.Oliveros-Braniff [23] vizsgálták. Sikerült megadniuk a különböző definíciók esetében a hiperbolikus terek antipodális ponthalmazainak maximális elemszámát.

Bezdek Károlynak és Daróczy-Kiss Endrének [11] sikerült a 3-dimenziós euklidészi térben a gömbelhelyezések Voronoi-celláinak felszínére vonatkozó alsó becsléseket megjavítaniuk. Megmutatták, hogy egységgömbökből álló pakolás esetén ez az érték legalább 16,1445…, ami megerősíti az ún. dodekaéder sejtést, mely szerint ez a felszín legalább akkora, mint az egységsugarú beírt gömbbel rendelkező szabályos dodekaéder felszíne, azaz 16,6508….

Bezdek Károly és Naszódi Márton [12] a háromdimenziós euklidészi térben bevezették a gömbpoliéder fogalmát. Ezek véges sok egybevágó gömb metszeteként előálló halmazok. Vizsgálták e poliéderek duálisait, valamint laphálóit. Fő eredményük az euklidészi tér poliédereire érvényes Cauchy-féle merevségi tétel gömbpoliéderekre vonatkozó analogonja. Bezdek Károly, Lángi Zsolt, Naszódi Márton és P. Papez [21] a konvex politópok elméletének sok klasszikus eredményét általánosította gömbpoliéderekre. Bevezeték a tengely-konvexség fogalmát, ami a klasszikus konvexség gömbpoliéderekre vonatkozó megfelelője. Bebizonyították Caratheory és Steinitz tételének, valamint az Euler-Poincare formulának az analogonját. Eredményeket értek el gömbpoliéderek megvilágítási problémáival, valamint az izoperimetrikus egyenlőtlenséggel kapcsolatban is. Sikerült továbbá Maehara egy egységgömbök metszetére vonatkozó sejtésére ellenpéldát konstruálniuk.

Ha adott az euklidészi síkon egy C konvex halmaz, akkor a P és Q pontok C-hez viszonyított relatív távolságán a PQ szakasz hosszának és a C-ben lévő leghosszabb PQ-val párhuzamos húr hossza felének a hányadosát értjük. Böröczky Károly és Lángi Zsolt [14] megadták tetszőleges konvex lemezben elhelyezkedő hat pont páronkénti relatív távolságának legkisebb felső korlátját, valamint az extremális ponthalmazt is leírták. Joós Antal és Lángi Zsolt [29] pedig hét pont páronkénti relatív távolságait vizsgálta. Megmutatták, hogy hét pontból mindig kiválasztható kettő, melyek relatív távolsága legfeljebb 1, s ez a korlát nem javítható. Eredményüket sikerült alkalmazniuk normált terekben lévő halmazok átmérőjének meghatározására is.

Bezdek Károly, T. Bisztriczky, Csikós Balázs s Heppes Aladár [17] körlemezek Helly számait vizsgálták. Körlemezek egy családjára azt mondjuk, hogy T(k) tulajdonságú, ha a halmazban lévő bármely k darab körnek van közös transzverzálisa, azaz olyan egyenes, amely mindegyiket metszi. Egységkörök egy családját t-tulajdonságúnak nevezzük, ha közülük bármely kettő középpontjának távolsága nagyobb, mint t, t(k) pedig azon t távolságok infimumát jelöli, melyre teljesül, hogy ha egységkörök egy családja egyszerre t- és T(k)-tulajdonságú, akkor van olyan egyenes, amely a család minden tagját metszi. Meghatározták t(3) és t(4) pontos értékét, valamint megmutatták, hogy t(k)=O(1/k) ha k tart a végtelenhez.

Bezdek Károly, R. Conelly és Csikós Balázs [18] az Alexander sejtéssel kapcsolatban értek el új eredményeket. Néhány speciális esetben bebizonyították, hogy ha az euklidészi síkon véges sok egybevágó kör valamely elrendezését úgy változtatjuk meg, hogy közben semelyik két kör középpontjának távolsága nem nő, akkor a körök metszetének kerülete nem csökken. Az Alexander-féle probléma különös jelentőségét az adja, hogy nagy valószínűséggel a Kneser-

Poulsen sejtés élesítését szolgáltatja az egybevágó körök esetén. Azt is megmutatták, hogy különböző sugarú körök esetén a sejtés nem igaz.

Bezdek Károly és A. Litvak [22] bevezették a csúcsindex fogalmát. Ez lényegében azt méri, hogy milyen jól lehet egy konvex testet olyan poliéderrel közelíteni, amelynek kevés csúcsa van. Ez az index szorosan kapcsolódik a test megvilágítási paraméteréhez, és ezen keresztül a konvex geometria nevezetes fedési sejtéséhez, mely szerint a d-dimenziós euklidészi térben minden konvex test lefedhető 2^d darab 1-nél kisebb arányú homotetikus példányával. Az általános esetben aszimptotikusan éles alsó és felső korlátot adtak tetszőleges test csúcsindexére. 2 és 3 dimenzióban meghatározzák a gömb csúcsindexének pontos értékét, valamint megmutatják, hogy a síkon minden konvex test csúcsindexe 4 és 6 közé esik (egyenlőség a paralelogramma, illetve az affin szabályos hatszög esetén), továbbá 3 dimenzióban minden konvex test csúcsindexe legalább 6. A csúcsindexszel rokon megvilágítási paraméterekkel kapcsolatban Bezdek Károly, Böröczky Károly és Kiss György [20] értek el eredményeket. Konvex testek különböző dimenziós ponthalmazokkal történő megvilágítását vizsgálták olyan feltételek mellett, melyek a testtől relatíve távol lévő halmazokat (azaz azokat, melyek a test nagy részét képesek megvilágítani) büntették. A síkbeli esetben megmutatták, hogy tetszőleges konvex halmaz 0-dimenziós megvilágítási paramétere legfeljebb 6, egyenlőség pedig csak az affin szabályos hatszög esetén áll fenn, az 1-dimenziós megvilágítási paraméter pedig legfeljebb 3,056. Becsléseket adtak a d-dimenziós kocka, keresztpolitóp és gömb k-dimenziós megvilágítási paramétereire, valamint bizonyos (d,k) párok esetén megadták a megvilágítási paraméterek pontos értékeit. Ugyancsak ehhez a témakörhöz kapcsolódnak Bezdek Károly és Kiss György röntgenszámokkal kapcsolatos még nem publikált eredményei. Az állandó szélességű testek röntgenszámaira sikerült jó becsléseket adniuk különböző dimenziókban.

Böröczky Károly, ifj. Böröczky Károly és Wintsche Gergely [25] a 3-dimenziós euklidészi térben gömbhéjakba írt poliédereket vizsgáltak. A síkon a Hajós-lemma leírja azokat a konvex sokszögeket, melyek tartalmaznak egy 1 sugarú kört, minden csúcsuk legalább r>1 távolságra van ennek a körnek a középpontjától és a területük minimális. A lemma által megadott minimális területű sokszögek térbeli általánosításai olyan poliéderek, melyek tartalmaznak egy 1 sugarú gömböt, minden csúcsuk legalább r>1 távolságra van ennek a gömbnek a középpontjától és térfogatuk minimális. Az első két szerző a [26] cikkben megmutatta, hogy megfelelő r érték esetén a szabályos oktaéder, illetve ikozaéder szolgáltatja a megoldást. A [25] cikkben olyan r értékeket vizsgáltak, melyek közel vannak 1-hez. Az ilyen vékony gömbhéjba írt minimális térfogatú poliéderről megmutatták, hogy egy tipikus lapja közel szabályos háromszög. Ugyanők és C. Schütt [24] a vékony gömbhéjba írt extremális poliédereket a d-dimenziós euklidészi térben vizsgálták. Meghatározták, hogy ezek a poliéderek mennyire közelítik az egységgömb térfogatát és felszínét a dimenzió függvényében.

A 2-dimenziós diszkrét izoperimetrikus egyenlőtlenség szerint adott kerületű, rögzített oldalszámú sokszögek közül a szabályos n-szög területe a legnagyobb. Ezt általánosította Csikós Balázs, Lángi Zsolt és Naszódi Márton [28] olyan euklidészi, hiperbolikus illetve gömbi "sokszögekre" melyek oldalai állandó görbületű ívek. Megmutatták, hogy az így definiált sokszögek közül is a szabályosak a maximális területűek (adott oldalszám és rögzített kerület esetén), de a gömbön léteznek olyan optimális szabályos sokszögek is, amelyek nem konvexek.

Bezdek Károly és Pach János 20 évvel ezelőtt fogalmazta meg azt a sejtést, mely szerint a d-dimenziós euklidészi térben egy adott konvex testnek legfeljebb 2^d homotetikus példánya helyezhető el úgy, hogy azok páronként érintsék egymást. A korábban bizonyított legjobb felső korlát 3^d volt. Naszódi Mártonnak [30] sikerült ezt jelentősen megjavítania, megmutatta, hogy a korlát legfeljebb 2^(d+1). A cikk megjelenése után sikerült némileg még tovább javítania a korlátot, ezt az eredményt egyelőre még nem publikálta.