

Részletes szakmai beszámoló a T43159 OTKA-pályázathoz

1. Általánosságok

Az OTKA-pályázat keretében elvégzett kutatásaink tárgyát az alacsony (többnyire két) téridő-dimenzióban definiált kvantumtérelméletek és az ezek által inspirált matematikai problémák képezték. Az alacsony dimenziós kvantumtérelméletek a direkt húr-elméleti, konform térelméleti és szilárdtestfizikai alkalmazásokon túl a valódi 4 téridő-dimenziós világ elméleti laboratóriumaként is szolgálnak. Az itt elérhető egzakt módszerekből kapott eredmények összevethetőek a (magasabb dimenziókban is használt) közelítésekkel, numerikus avagy konvencionális perturbatív térelméleti módszerekből kapottakkal. Kutatásainkban mind a direkt, mind a tesztelméletként történő alkalmazás is előfordult. Az utóbbira példa a véges méret effektusok integrálható modellekben való egzakt tanulmányozhatósága, hadron struktúra-függvények két dimenziós aszimptotikus elméletekbeli analogonjának egzakt számíthatósága, avagy a kvantumkromodinamikát modellező két-dimenziós σ -modelleknek a rács-térelméleteken keresztüli kontinuum limeszként való előállításának kvantitatív vizsgálhatósága. Az itt talált, a konvergencia tulajdonságaira vagy a véges méret effektusokra vonatkozó eredmények a rácson definiált kvantumkromodinamikabeli Monte Carlo (MC) jóslatok viselkedéséhez, kontinuum-limeszbeli érvényességéhez nyújthatnak támpontokat.

De az alacsony dimenziós modellek tanulmányozása számos olyan matematikai struktúra, probléma kezelését, megértését és megoldását igényli, amelyek magasabb dimenzióban is fölbukkanak. Ilyenek például a nem-ekvivalens kvantálások lehetőségének megjelenése integrálható egydimenziós sokrészecske-rendszerekben, avagy kvantumspinláncok tiszta állapotainak (azaz a modell téralgebrája vagy megfigyelhető algebrája irreducibilis ábrázolásainak) jellemzése, osztályokba sorolása lokális összefonódottságuk (Neumann-entrópia) vagy fázisekvivalenciájuk alapján.

Vannak olyan tulajdonságok is, amelyek kizárólag az alacsony dimenziós kvantumtérelméletek jellemzői. Ilyen a részecskék anomális statisztikája, az ún. fonatstatisztika, vagy a kvantumszimmetria, amely csupán fedőnév arra a nehezen emészthető tényre, hogy a csoportok mint matematikai struktúrák elégtelenek az alacsony dimenziós modellek belső szimetriáinak, azaz a szuperszelekciós szimetriáknak a leírására. A kvantumszimmetria mélyebb megértésének vágya elvezetett minket a gyenge Hopf-algebrák, bialgebroidok és Hopf-algebroidok matematikai szerkezetének tanulmányozásához. Ezek az összefoglaló néven kvantumgrupoidnak elnevezett struktúrák úgy tekinthetők, mint nem-kommutatív bázisgyűrű fölött értelmezett bialgebrák, illetve Hopf-algebrák. Mivel a szuperszelekciós szimmetria a megfigyelhető algebra téralgebrává bővítését jellemzi, a testbővítések jellemzésére szolgáló Galois elmélet általánosításai, a Hopf-Galois algebra-kiterjesztések, szintén a kvantumszimmetria megértéséhez vezető út matematikai állomásai.

Mielőtt a tudományos eredmények részletes ismertetésére rátérnénk, megemlítjük, hogy 2003. szeptemberében csatlakozott kutatásainkhoz doktoranduszként Bálint Imre, akinek Szlachányi Kornél a témavezetője. 2004-ben Hegedűs Árpád Ph.D. fokozatot szerzett, témavezetője Balog János, dolgozatának címe "Véges méret effektusok vizsgálata kétdimenziós integrálható kvantumtérelméletekben termodinamikai Bethe ansatz techni-

kával” volt. Zimborás Zoltán, Vecsernyés Péter témavezetésével, 2007-ben tervezi Ph.D. fokozatának megszerzését.

2. Konkrétumok

Az elvégzett kutatások a kutatási tervnek megfelelően négy fő témakörbe csoportosíthatóak. (A hivatkozások számozása a megadott közlemények sorrendjének felel meg.)

2.1 σ -modellek és egyéb integrálható modellek

Véges térfogatbeli energiaspektrum számítása termodinamikai Bethe ansatz (TBA) módszerrel [12,13,27] és nemlineáris integrálegyenlet (NLIE) technikával [8,20,21]

Kétdimenziós integrálható térelméleti modellekben TBA integrálegyenleteket állítottunk fel, melyekből a gerjesztett állapotok véges térfogati energiája, ezen belül a fizikailag legérdekesebb eset, az egyrészecske-tömeg térfogatfüggése egzaktul kiszámítható. Először a sine-Gordon modell esetére dolgoztuk ki a TBA egyenleteket, mert itt már korábban (a Destri-deVega egyenletek révén) ismert volt a véges térfogati spektrum, amelyet a TBA egyenleteink reprodukáltak. Ezután az $O(N)$ nemlineáris σ -modellek (először $N=3,4$ esetén, majd általános páros N esetére) véges térfogati tömegét megadó TBA egyenleteket adtuk meg.

Az NLIE technika keretében a vizsgált integrálható modell véges térfogati spektrumát egy néhány komponensből álló, nemlineáris integrálegyenlet-rendszer megoldásainak segítségével fejezzük ki. Ez a módszer ekvivalens a termodinamikai Bethe ansatz technikával, azonban a véges méret problémájának egy egyszerűbben kezelhető, kompaktabb megoldását adja. A néhány komponensből álló nemlineáris integrálegyenlet-rendszer alakja modelenként változik. Felírásuk szempontjából a modell alapállapotát leíró egyenletek megtalálása az alapvető, ugyanis a gerjesztett állapotokra vonatkozó egyenleteket az alapállapotú egyenletekhez adott, speciális alakú forrástagok segítségével megkaphatjuk. Mivel a Fateev által megadott kétparaméteres integrálható modellcsalád, az ún. SS-modellcsalád, számos fontos integrálható modellt alesetként tartalmaz, ezért először az SS-modellek és redukcióik alapállapotát leíró kétkomponensű egyenlet-rendszert írtuk fel és vizsgáltuk. Majd a TBA egyenletek végtelen rendszere helyett kétkomponensű egyenletrendszert javasoltunk az $O(3)$ és $O(4)$ nemlineáris σ -modellek alapállapotú és egyrészecske-energiáinak a kiszámítására. Ezen egyenletek helyességét numerikus megoldásuk és az ultraibolya limeszben vett 3-hurok rendű perturbációs számítás eredményeinek összehasonlításával ellenőriztük.

Ráccseffektusok, kontinuum limesz $O(N)$ σ -modellekben [1,14,42] és az $N = 1$ szuperszimmetrikus sine-Gordon modellben [44]

A kétdimenziós $O(N)$, $N \geq 3$ σ -modellek mint aszimptotikusan szabad elméletek a kvantumkromodinamika egyszerűsített modelljeinek tekinthetők. Ezért tehát érdekes a σ -modellt mint kontinuum limeszt előállító rácsmoделleknek a limesz-elmélettől való eltéréseinek analitikus módszerekkel történő vizsgálata, amelynek eredményét a rács MC számítások kontinuum extrapolációjánál felhasználhatunk. Az analitikus jóslatok szerint az $N = 2$ modell esetén, melyet a nem aszimptotikusan szabad XY-rácsmoделlekkel közelítünk, a rács korrekciók csak igen lassan, a rácsállandó logaritmusának mínusz második hatványa szerint tűnnek el, míg magasabb N -ek esetén (multiplikatív logaritmikus

korrekciók erejéig) a rácsállandó négyzete szerint. Numerikus eredményeink mindkét esetben igazolják ezeket az elméleti jóslatokat.

Az $N = 1$ szuperszimmetrikus sine-Gordon modell Neveu-Schwartz szektorát előállítottuk a 19-vertex modell kontinuum limeszeként. E limesz-eljárás segítségével, a 19-vertex modelltől kiindulva, felírtuk az $N = 1$ szuperszimmetrikus sine-Gordon modell véges méret spektrumának Neveu-Schwartz szektorát leíró nemlineáris integrálegyenlet-rendszert. Ezt kiterjesztettük az elmélet Ramond szektorára is, megkapva a modell teljes véges méret spektrumát leíró NLIE-t. Az egyenletek nagy térfogatra történő megoldásából kiszámítottuk az elmélet egzakt S-mátrixát, míg a spektrum zérus térfogatú limeszének analizisével megkaptuk a modell ultraibolya limeszét leíró modulárisan invariáns $N = 1$ szuperkonform-térelméletet és annak lokális operátoralgebráját.

Struktúrafüggvények kétdimenziós integrálható modellekben [2,15,28]

A mélyen rugalmatlan elektron-proton szórás két téridő-dimenzióban modellezhető az aszimptotikusan szabad $O(N)$, $N \geq 3$ nemlineáris σ -modell segítségével. Ebben az integrálható modellben a hadron struktúra-függvények analógja, az $O(N)$ áram-áram korrelációs függvény az $O(N)$ vektormultiplettet alkotó stabil egyrészecskeállapotok között, egzaktul számítható a nem-perturbatív S-mátrix bootstrap módszerrel. Bár transzverzális térirány nincs a modellben, a struktúra-függvények bonyolult és nemtriviális viselkedést mutatnak. A Bjorken- x kinematikai változó kis értéke esetén érvényes aszimptotikus alakot sikerült levezetni a struktúra-függvényre, amely talán 4 téridő-dimenzióra is általánosítható.

2.2 Szimmetriastruktúrák a WZNW modellekben és Calogero típusú integrálható sokrészecske modellek

Csavart áramalgebrák szabad teres kvantálása [5]

Az affin áramalgebrák Wakimoto típusú szabadteres előállításai számos fizikai alkalmazással rendelkeznek, például a szimmetriát megvalósító konform térelméleti modellekben korrelációs függvények kiszámítására használhatók. A kilencvenes években kidolgoztuk (Jan de Boer, Fehér László) a nem-csavart áramalgebrák Wakimoto előállításának egy teljesen explicit leírását, ahol a szabad terek az alapul vett véges dimenziós egyszerű Lie algebra egészekkel vett gradálásához vannak rendelve. A mostani munkában ezt a konstrukciót terjesztettük ki csavart affin Lie algebrák esetére. A kérdéses csavarást a véges dimenziós Lie algebra tetszőleges véges rendű automorfizmusa definiálja. A csavart áramokat és a Sugawara formulával adott Virasoro-sűrűséget a csavart szabad mezők segítségével expliciten kifejeztük. Mivel a munka a vertex-operátor algebrák és csavart modulusaik elméletének alkalmazását követelte meg, így várhatóan az eredményt a konform térelméletek területén is használni fogjuk.

Poisson-Lie szimmetria a WZNW modellben és a Poisson-Lie klasszikus dinamikai Yang-Baxter egyenlet [17,18]

Néhány évvel ezelőtt új Poisson-Lie szimmetriákat és ehhez tartozó monodrómia-függő r -mátrixokat találtunk (Balog János, Fehér László, Palla László) a királis WZNW modellben. Mostani munkánkban megadtuk az ezen szimmetriákhoz tartozó, az infinitezimális szimmetria-transzformációkat generáló Poisson-Lie momentum-leképezést. A várakozásnak megfelelően a momentum-leképezés csak a királis WZNW mező monodrómia-mátrixától függ de a várakozással ellentétben, a momentum explicit kifejezése nagyon egyszerű,

alkalmas változóiban lényegében a monodrómia-mátrix hatványaként írható le. A momentum ismeretében, az ún. faktorizálható és standard kompakt esetekben a monodrómiát új változóként vezettük be a WZNW modell r -mátrixaira vonatkozó dinamikai Yang-Baxter egyenletben. Ez drámaian leegyszerűsítette a kérdéses egyenletet, és az Etingof-Varchenko féle standard klasszikus dinamikai Yang-Baxter egyenlet (CDYBE) egy geometriailag természetes Poisson-Lie általánosítását (PL-CDYBE) szolgáltatta. A PL-CDYBE megoldásainak egy egyszerű, a Dirac redukció használatán alapuló konstrukcióját is megadtuk. Összekapcsoltuk a PL-CDYB egyenleteket véges dimenziós integrálható modellekkel, ami további vizsgálatot indokol a jövőben.

Calogero típusú sokrészecske rendszerek [30,38,39,40,41]

A Calogero típusú modellek egy egyenes mentén mozgó tömegpontokat írnak le, amelyek a relatív távolságtól racionális, trigonometrikus, hiperbolikus vagy elliptikus módon függő párpotenciálok révén állnak kölcsönhatásban. Calogero eredeti munkájában (1970) az inverz harmonikus potenciál mellett a részecskék bezáró harmonikus potenciállal is hatnak egymásra. Az inverz harmonikus potenciál erősségét megadó csatolási állandó bizonyos értékei mellett (a nulla körül egy intervallumban) két részecske esetén nem-ekvivalens kvantálások lehetségesek, azaz a szimmetrikus Hamilton operátor inekvivalens önadjungált kiterjesztéseit egymástól lényegesen különböző határfeltétel választásával lehet biztosítani. A határfeltételek a kvantummechanikai valószínűségi áramsűrűség folytonosságát garantálják a párpotenciál szinguláris pontjában. Természetes várakozás, hogy tetszőleges részecskeszámra is léteznek nem-ekvivalens kvantálások, amit 3 részecske esetén igazoltunk, feltérképezve a nem-ekvivalens kvantálásokat. A tömegközéppont leválasztása után, polárkoordinátákat bevezetve anguláris és radiális részekre bontottuk a Hamilton operátort. Az anguláris potenciál dihedrális $D(6)$ szimmetriáját, ami az ütközések azonos természetét garantálja, s amelyet a paritás és a 3 azonos részecske permutációi generálnak, lokális önadjungált határfeltételek egy 2-paraméteres családja tartja tiszteletben. Az összes lehetséges határfeltétel esetén analizáltuk az anguláris Hamilton operátor spektrumát, és a $D(6)$ csoport ábrázolásai szerint osztályoztuk az állapotokat. Bizonyos határfeltételek esetén az anguláris operátornak léteznek negatív sajátértékei, melyek a radiális egyenleten keresztül az energiaspektrum alulról nem korlátos voltát implicálják, és így fizikailag nem megengedettek.

A spin Calogero típusú modellekben a részecskék közötti csatolás belső szabadsági fokok, "spinváltozók" függvénye, melyek a részecskekoordináták mellett dinamikai változók. A spin Calogero típusú klasszikus integrálható sokrészecske-rendszerek egy korábbról ismert, abeli Lie algebrai változókon definiált dinamikai r -mátrixokat használó konstrukcióját sikerült egyszerűsíteni, s megmutattuk, hogy minden nem-degenerált dinamikai r -mátrixhoz rendelt modell Lie algebraon vagy Lie csoporton mozgó szabad részecske (geodetikus rendszer) hamiltoni szimmetria redukciójaként is tekinthető. Ez lehetővé teszi a spin Calogero mozgásegyenlet integrálását. A konstrukcióból adódó új példaként leírtuk az egyszerű Lie algebraik külső automorfizmusaihoz rendelhető modelleket. Bebizonyítottuk, hogy a nem-abeli Lie algebraikon értelmezett dinamikai r -mátrixok nem vezetnek az abeli esethez képest új spin Calogero modellekre.

"Inverz problémaként" a Riemann szimmetrikus téren mozgó szabad részecske hamiltoni szimmetria redukcióit vizsgáltuk. A negatív görbületű esetben megmutattuk, hogy az

izometria csoport maximális kompakt alcsoportját generáló Noether töltések tetszőleges rögzítésekor egy integrálható 1-dimenziós sokrészeske-rendszer adódik, amely általában spin Calogero típusú. Osztályoztuk azon eseteket, amikor a redukált rendszer spintelen Calogero modellt ad, ezzel tisztáztuk a szimmetrikus terek és a Calogero modellek közötti megfeleltetés 1976 óta nyitott kérdését. Nem-kompakt, egyszerű Lie csoporton mozgó szabad részecske redukcióit is vizsgáltuk, a maximális kompakt részecske bal- és jobbszorzással adott hatásait alapul véve. A redukált rendszer az itteni legáltalánosabb esetben is spin Calogero típusú, és általában a bal- és a jobbszorzáshoz is tartoznak spinváltozók. A csoporton tekintett szabad mozgásból adódó spintelen Calogero modellek halmaza bővebb, mint amit direktben a szimmetrikus terekből kaphatunk. Redukált rendszerként realizáltuk a három független csatolási állandóval rendelkező BC(n) Calogero modellt, amit eddig csak tisztán algebrai módszerekkel tudtak tárgyalni. Részben kidolgoztuk a klasszikus hamiltoni redukciók kvantum változatát is, a nyert eredmények teljes kidolgozása és publikálása folyamatban van.

2.3 Lokálisan véges szabadsági fokú rendszerek: spinláncok és rácstérelméletek

Spinláncok tiszta állapotainak jellemzése Neumann-entrópiával [31,32,45]

Egy kvantumrendszer tiszta állapotának egy részrendszerére történő megszorítása általában kevert állapotot eredményez. Az állapot ezen tulajdonságát hívjuk összefonódottságnak, amit kvantumspinláncok esetén a tiszta állapotokból a véges, L hosszúságú részláncokra adódó sűrűségmátrixok $S(L)$ Neumann-entrópiájával jellemzünk, s amit a Heisenberg és az XX-láncok esetén tanulmányoztunk. Egy korábban bevezetett Lagrange-multiplikátoros módszer segítségével az XX-modellben azt találtuk, hogy az energia-áramot is tartalmazó Hamilton-függvény esetén az alapállapotbeli entrópia-aszimptotika és ezáltal az összefonódottság növekedhet.

Egy kvantumspinlánc (eltolásinvariáns) állapotának entrópiásűrűségén az $S(L)/L$ hányados $L \rightarrow \infty$ határértékét értjük. Megmutattuk, hogy a matematikai statisztikus fizika egyik régi sejtése, a "nulla entrópia-sűrűség sejtés" (mely szerint spin-modellek eltolásinvariáns tiszta állapotainak entrópia-sűrűsége nulla), éles abban az értelemben, hogy bármilyen szublineáris függvényhez található egy olyan eltolásinvariáns állapot, melynek Neumann-entrópiája gyorsabban nő az L részlánchossz függvényében (elég nagy L -re) mint az adott függvény.

A kvantumspinláncok tiszta állapotainak Neumann-entrópia aszimptotikájával kapcsolatos, periodikus (azaz eltolásinvariáns csatolásokat tartalmazó) spinláncokra vonatkozó vizsgálatainkat kiterjesztettük kváziperiodikus Heisenberg-láncokra is. Ezen láncokban a szomszédos spinek között különböző erősségű csatolásokat osztunk ki valamilyen önazonos kváziperiodikus, formális betűsorozatnak (pl. a Fibonacci-sorozatnak) megfelelően. Ezen kváziperiodikus modellek egy alosztályára analitikusan kiszámoltuk a Neumann-entrópia aszimptotikát. Azt találtuk, hogy (a pontszerű defektek és a véletlenszerű csatoláskiosztásokkal szemben) a csatolások kváziperiodikus perturbációja az entrópia aszimptotikájából számolt effektív centrális töltés és az összefonódottság növekedését eredményezheti.

Ising modell kontinuum limesének trivialisága 4 dimenzióban [26, 37]

Hogy a rács-regularizált ϕ^4 skalármodell kontinuum limesze 4 dimenzióban triviális, az elfogadott, de nem bizonyított, s így időnként megkérdőjelezett állítás. Az egykomponensű ϕ^4 skalármodell spontán sértett fázisát modellező rács-regularizált modell az Ising

modell, a térelméleti modellek "hidrogén atomja". Munkánkban Monte Carlo módszerrel vizsgáltuk a négy dimenziós hiperkübös rácson definiált Ising modell kontinuum limeszét. Azt találtuk, hogy a modell a kontinuum limeszben az elméleti várakozásoknak megfelelően 4 dimenzióban valóban triviális, de a limeszhez tartás nagyon lassú, az a rácsállandó kis értékeire csupán az $1/\log(a^2)$ függvény szerint tűnnek el a rácskorrekciók.

Ising kvantumlánc algebrai kontinuum limesze [Vecsernyés P., Zimborás Z.]

Felérképeztük az Ising kvantumlánc megfigyelhető algebrájának kauzális időfejlődésre vezető automorfizmusait. Megadtuk a kétszeresen durvított kettőskúp-rácshoz tartozó megfigyelhető algebra beágyazásokat, azaz az eredeti megfigyelhető algebra olyan részalgebráit, melyek valamelyik kauzális időfejlődésre invariánsak. A komponálható beágyazások sorozata — egyre finomabb kétdimenziós kettőskúp-rácson definiált Ising algebrai tér-elmélet — a modell algebrai kontinuum limeszét szolgáltatja. Az eredmények teljes kidolgozása és publikálása folyamatban van.

2.4 Kvantumcsoportok, kvantumgrupoidok

2-es mélységű algebrabővítések [4,6]

Megadtunk egy kanonikus konstrukciót, amely tetszőleges $N \subset M$ 2-es mélységű algebra-kiterjesztéshez hozzárendel egy A bal-bialgebroidot, amely M -en hat, és egy B jobb-bialgebroidot, amely az $M \subset \text{End}({}_N M)$ Jones-kiterjesztésen hat úgy, hogy a B -invariáns részalgebra mindig M és az A -invariáns részalgebra pedig akkor N , ha még megköveteljük, hogy az M_N jobb N -modulus balanszírozott legyen.

A 2-es mélységű balanszírozott algebra-kiterjesztések sok hasonlóságot mutatnak a (véges) Galois testbővítésekkel. Sőt, bizonyos szempontból közelebb állnak a klasszikus Galois elmülethez, mint a modern Hopf-Galois elmülethez, mivel utóbbiban egy kiterjesztéshez általában nem létezik egy unikális Hopf-algebra. A említett típusú algebra-kiterjesztésekre egy univerzális tulajdonsággal rendelkező bialgebroidot definiáltunk, amely a testbővítések Galois-csoportjának analógja. Megmutattuk, hogy a gyenge Hopf-hatások is rendelkeznek ilyen univerzalitással, ha rögzítünk rajtuk egy Frobenius-integrált. Példaként megkonstruáltuk a szeparábilis testbővítések univerzális gyenge Hopf-algebráját.

Hopf algebroidok [9,10,11,24,33]

Bevezettük a (gyenge) Hopf algebrákat általánosító Hopf algebroid fogalmát, azaz megfelelő antipód leképezéssel láttuk el a bialgebrákat (nem-kommutatív bázisalgebrák esetére) általánosító bialgebroidok már létező fogalmát. Vizsgáltuk a Hopf algebroidok szerepét 2-es mélységű Frobenius algebra-kiterjesztések leírásában, valamint tanulmányoztuk az invariánsok föltérképezésében fontos szerepet játszó, a Hopf algebrák integrálelméletét általánosító integrálelméletüket is.

Dupla algebrák és Galois-elméletük [16,36]

A Frobenius Hopf-algebroidoknak egy tökéletesen önduális formalizmusát adtuk meg visszavezetvén az összes strukturát két megfelelően kompatibilis asszociatív egységelemes szorzásra egyazon vektortéren: ezek a dupla algebrák. A dupla algebrák nem csupán a Frobenius Hopf-algebroidok átfogalmazását jelentik, hanem egy extra stuktúraelemet is tartalmaznak: egy kitüntetett kétoldali Frobenius-integrált, amely nem más, mint a "másik" szorzás egységeleme.

A Hopf-Galois elmélet általánosításával és korábbi kvantumtérelméleti tapasztalatok

alapján definiáltuk, hogy mikor tekintünk egy Frobenius Hopf-algebroid hatását egy algebrán Galois-hatásnak. Bebizonyítottuk, hogy egy algebra-bővítés pontosan akkor Galois valamilyen Frobenius Hopf-algebroidra vonatkozóan, ha kettes mélységű, balanszírozott Frobenius-kiterjesztés. Megmutattuk továbbá, hogy az összes Hopf-algebroid, amelyre nézve egy adott algebra-bővítés Galois, egymás skalár-bővítéseként kapható valamilyen igencsak nem-kommutatív értelemben.

Kogyűrűk és Hopf-Galois kiterjesztések [22,23,33,34,35,25,47]

Egy K kommutatív gyűrű fölötti algebra megfogalmazható, mint egy monoid a K -modulusok (szimmetrikus, monoidális, koegyenlítőkkal bíró) kategóriájában. Ezen képtől vezetve, tetszőleges szimmetrikus, monoidális, koegyenlítőkkal bíró kategória monoidja feletti bialgebroidokat vizsgáltuk, elsősorban dualitásuk kérdését és kogyűrűkkel való kapcsolatukat.

A Hopf-algebroidokkal vett Galois kiterjesztések vizsgálatának első lépéseként megmutattuk, hogy egy A komodulus algebra meghatároz egy ún. összekapcsoló struktúrát, így egy A -kogyűrűt. Az észrevétel alapján bebizonyítottuk, hogy egy végesen generált projektív, bijektív antipóddal rendelkező Hopf-algebroid komodulus algebrája esetén a kanonikus leképezés bijektivitása, azaz a Galois tulajdonság, következik a szürjektivitásából.

A Galois kiterjesztések elméletében fontos tételek azok, melyek arra vonatkoznak, hogy mikor következik a kanonikus leképezés bijektivitása annak szürjektivitásából. Meninivel és Ardizzonival ilyen kérdéseket vizsgáltunk, elsősorban Hopf algebroid kiterjesztésekre összpontosítva. Analízisünk fő eszközeként kidolgoztuk egy funktor relatív szeparabilitásának fogalmát. Ezt használva igazoltuk Schneider tételének analogonját Hopf-algebroid kiterjesztésekre.

Hopf-algebrákkal történő Galois kiterjesztések között kitüntetett szerepet játszanak az ún. hasadt kiterjesztések. Ezt a fogalmat általánosítottuk Hopf-algebroid szimmetria esetére. Megmutattuk, hogy a Hopf-algebra esethez hasonlóan egy Hopf-algebroiddal vett algebra-kiterjesztés pontosan akkor hasadt, ha egy invertálható kociklussal vett kereszt-szorzatként írható le.

A Morita elmélet alkalmazásának Hopf-Galois kiterjesztések vizsgálatában hosszú története van. Egy alkalmasan választott Morita kontextus szigorú volta kapcsolatba hozható a $B \subset A$ kiterjesztés Galois tulajdonságával, valamint a relatív Hopf modulusok és a B -modulusok kategóriáinak ekvivalenciájára vonatkozó szerkezeti tétellel. E kérdéskörnek olyan kategóriaelméleti megfogalmazását adtuk, amely minden eddigi leírást magába foglal és természetes nyelvezetet jelent a hasadt tulajdonság megfogalmazására. A Morita elmélet nyelvén feltételeket adtunk a szerkezeti tétel teljesülésére.

Az ún. híuen lapos Hopf-Galois kiterjesztések a principális nyalábok megfelelői a nem-kommutatív differenciálgeometriában. T. Brzeziski és P. Hajac formalizmusa kapcsolatot teremt a nem-kommutatív principális nyalábok és asszociált vektornyalábok szeléseinek K -elméleti aspektusai között. Ezt a Chern-Galois elméletet terjesztettük ki kogyűrű-Galois kiterjesztésekre. Eredményeinket 2-es mélységű algebra-kiterjesztések példáján illusztráltuk.

Egy Hopf-Galois kiterjesztés leírható a Hopf-algebra említése nélkül is, egy ún. nem-kommutatív torzor segítségével. Ez a nyelv alkalmasabb a nem-kommutatív geometriai analízis céljára: D. Hobst bialgebroidokkal vett Galois kiterjesztéseket írt le nem-kommu-

tatív bázis fölötti torzorokkal. Mi bevezettük a nem-kommutatív bázis fölötti pre-torzor fogalmát és reláltuk azt kogyűrűkkel vett Galois kiterjesztésekhez. Megmutattuk, hogy minden A -kogyűrűvel vett $B \subset T$ hűen lapos Galois kiterjesztéshez konstruálható egy B -kogyűrű, melyre nézve az $A \subset T$ kiterjesztés bal Galois. Feltételeket adtunk a két kogyűrű komodulus-kategóriájának ekvivalenciájára.

Monoidális Eilenberg-Moore konstrukció, monoidális Morita-ekvivalencia [3,29]

A kategóriaelmélet egy klasszikus fejezete a monádelmélet. A monoidális kategóriákon definiált opmonoidális monádokat tanulmányoztuk, amely elvezetett a bialgebroid fogalmának egy nagyon egyszerű, mégis nagyon általános megfogalmazásához. Ezek a bimonádok. Bebizonyítottuk, hogy a bialgebroidok pontosan a bimodulus kategóriákon definiált baladjungált bimonádoknak felelnek meg.

A klasszikus Morita-elméletet általánosítottuk arra a szituációra, amikor a gyűrű moduluskategóriája monoidális. Pontosabban szólva azt a kérdést vizsgáltuk, hogy mikor lesz két bialgebroid moduluskategóriája monoidálisan ekvivalens.