Szakmai zárójelentés az OTKA-42985 (2003-2006) pályázatról

A pályázati téma a korábbi OTKA-29330 (1999-2003) téma folytatása volt.

Az elmúlt 40 évben a diofantikus egyenletek elméletében rendkívül jelentős előrehaladás történt. Születtek igen általános, de ineffektív végességi tételek; explicit felső korlátokat nyertek a megoldásszámra; effektív módszereket dolgoztak ki fontos egyenletosztályokra, melyek az összes megoldás megkeresését teszik elvileg lehetővé; olyan hatékony algoritmusokat is kidolgoztak, melyek bizonyos típusú egyenletek esetén lehetővé teszik konkrét egyenletek összes megoldásának a tényleges megkeresését számítógép felhasználásával; végül a nyert módszereknek és eredményeknek számos fontos alkalmazása született, egyebek között az algebrai számelméletben és a rekurzív sorozatok elméletében. Kutatócsoportunk az OTKA-42985 sz. pályázati támogatással mind az öt fő vizsgálati irányban nemzetközi viszonylatban is igen jelentősnek minősített eredményeket ért el. Kutatásainkat a szerződésben megfogalmazott munkatervnek megfelelően végeztük. Eredményeinket 82 tudományos dolgozatban publikáltuk, s igen sok előadást tartottunk nemzetközi fórumokon.

Eredményes tudományos együttműködést folytattunk számos külföldi matematikussal. Közös cikkekket publikáltunk amerikai, angol, francia, holland, horvát, indiai, japán, kanadai, kínai, lengyel, német és osztrák matematikusokkal. Munkáinknak jelentős a nemzetközi visszhangja, a publikációinkra való hivatkozások száma meghaladja a 2700-at. Vizsgálatainkhoz sokan kapcsolódtak, eredményeinket, módszereinket sokan felhasználták kutatásaikban.

Tudományos eredményeinkért számos elismerésben részesültünk. Újabb OTKA pályázatunk mindhárom opponense úgy nyilatkozott, hogy a "témavezető korábbi pályázatai kiemelkedően eredményesek voltak". Győry Kálmán Széchenyi-díjban (2003), Pintér Ákos Erdős-díjban (2005), Hajdu Lajos Turán-díjban (2007), Rakaczki Csaba Grünwald-díjban (2006) részesült. Gaál István akadémiai doktori címet (2003), Rakaczki Csaba PhD fokozatot (2005) szerzett. A csoport vezető kutatói állandó meghívottjai és felkért előadói szakterületük nemzetközi konferenciáinak. Tagjai sok nemzetközi folyóirat szerkesztőbizottságának.

Az OTKA 42985 sz. pályázat keretében végzett kutatások legfontosabb eredményeinek rövid összefoglalása

Számos jelentős effektív, kvantitatív és numerikus eredmény született egy sor alapvető fontosságú diofantikus problémával kapcsolatban. Az eredmények elsősorban széteső forma egyenletekre, egységegyenletekre, szuperelliptikus és binom Thue-egyenletekre, általánosított Fermat-típusú egyenletekre, szeparábilis egyenletekre, valamint rekurzív sorozatokra, adott diszkriminánsú, illetve adott rezultánsú binér formákra, általánosított számrendszerekre és alkalmazásaikra vonatkoznak. Az alábbiakban ismertetjük a legfontosabb eredményeket. A legkiemelkedőbb eredményeket a rövid összefoglalóban is felsoroljuk.

Győry Kálmán eredményei

Győry Kálmán a projekt keretében 23 tudományos dolgozatot publikált. Az alábbiakban részletezzük a legfontosabb eredményeit.

Általános effektív végességi tételek (részben Pintér Ákossal közös eredmények)

A diofantikus számelméletben középponti szerepet játszanak az egységegyenletek és a széteső forma egyenletek. Egységegyenletekre, általánosabban S-egységegyenletekre és széteső forma egyenletekre Győry Kálmán nyerte az első effektív eredményeket, explicit korlátokat adva a megoldásokra. Eredményeinek számos alkalmazását adta. [74]-ben K. Yuval közösen jelentős mértékben élesítette a megoldásokra nyert korábbi korlátokat.

Eredményeik egyik alkalmazásaként elsőként nyertek teljesen explicit, a korábbiaknál jóval élesebb becsléseket a híres ABC-sejtés algebrai számtestek feletti általánosított változatára vonatkozóan.

Számos diofantikus probléma vezethető vissza

$$Ax^n - By^n = C \tag{1}$$

alakú binom Thue-egyenletekre, ahol $x, y \neq 0, n \geq 3$ ismeretlen egészek, A, B, C pedig rögzített, 0-tól különböző egészek. A Baker-módszer felhasználásával $|x|, |y|$ és n-re egy A, B, C-től függő explicit felső korlát adható. A [26] és [72] dolgozatokban Győry Kálmán és Pintér Ákos az (1) alakú egyenletek és az S-egységegyenletek közös általánosítására nyert effektív végességi tételeket. Megmutatták, hogy ha A, B, C is ismeretlenek, de csak adott $p_1, \dots, p_s$ prímekkel oszthatók és Ax, By, C relatív prímek, úgy Ax, By és C abszolút értékére csupán $Q = p_1 \cdots p_s$-től függő effektív felső korlát adható. A nyert eredmény közös általánosítását adja az S-egységegyenletekre és a binom Thue-egyenletekre korábban nyert kvalitatív effektív végességi eredményeknek.

Klasszikus, sokat vizsgált egyenlet az

$$f(x) = wy^n \tag{2}$$

alakú szuperelliptikus egyenlet, ahol $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ adott főpolinom, $w \neq 0$ rögzített egész, x, y és $n \geq 3$ pedig ismeretlen egészek. Sokan nyertek effektív felső korlátot a megoldásokra, melyek azonban függnek az w-tól, az f fokszámától, valamint az f magasságától vagy diszkriminánsától. A [26] és [72]-ben nyert említett eredmények felhasználásával Győry és Pintér megmutatták, hogy bizonyos természetes feltételek mellett a megoldásokra olyan effektív korlát is adható, ami csupán az f fokszámától, valamint az w és az f általánosított diszkriminánsa különböző prímosztóinak szorzatától függ. A nyert eredmény már véglegesnek tekinthető abban az értelemben, hogy a korlátokban a nevezett paraméterektől való függés tovább már nem gyengíthető.

Index forma egyenletek numerikus megoldása (Gaál Istvánnal közös eredmények)

Algebrai számtestek hatványegészbázisainak a tanulmányozása, keresése a 19. századig visszanyúló klasszikus problémája az algebrai számelméletnek. Győry Kálmán a 70-es években általános algoritmust szolgáltatott tetszőleges, n-ed fokú K számtestben index forma egyenletek megoldására és ezáltal az összes K-beli hatványegészbázis meghatározására. Az algorirmus azonban nem volt elég hatékony ahhoz, hogy $n \geq 4$ esetén konkrét számtestekben az összes megoldást ténylegesen meg lehessen határozni. 2000-ben Győry az algoritmusát lényegesen hatékonyabbá tette, ami Wildanger egy algoritmusával együtt $n \leq 5$ esetén már lehetővé tette a szóban forgó egyenletek megoldását. [32]-ben Győry és Gaál Biluval együtt Wildanger algoritmusát lényegesen finomították, és ezáltal $n = 6$ esetén is lehetővé vált konkrét index forma egyenletek megoldása és hatványegészbázisok meghatározása.

Teljes hatványok számtani sorozatokban (Hajdu Lajossal közös eredmények)

Ezzel a klasszikus témakörrel a 17. század óta rendkívül sokan foglalkoztak, közöttük Fermat, Euler, Liouville, Sylvester, Erdős és Siegel. Egy másfél évszázados sejtést bizonyítva Erdős és Selfridge (1976) megmutatta, hogy $k \geq 2$ egymásra következő egész szorzata nem lehet teljes hatvány. Egy általános sejtés szerint – mely $k = 3$ esetén egészen Fermat-ig nyúlik vissza– az általánosabb

$$x(x + d) \dots (x + (k - 1)d) = y^n \tag{3}$$

egyenlet relatív prím x, d és $(k, x) \neq (3, 2)$ mellett sem megoldható. Számos részeredmény után az első áttörést Győry (1999) érte el, aki a sejtést $k = 3$-ra bebizonyította. Ezt az eredményt Győry és Hajdu [28], [76] (társszerzőkkel közösen) kiterjesztette a $k < 12$ esetre. Továbbá, rögzített k, x mellett feltétel nélkül, rögzített k mellett az ABC sejtést feltételezve bebizonyították a (3) egyenlet megoldásszámának a végességét. A bizonyításaik során (3)-at visszavezették

$$Ax^n + By^n = Cz^q, q \in \{2, n\} \tag{4}$$

alakú egyenletekre, majd számos mély, klasszikus és modern eredményt és módszert, közöttük a Frey görbék, Galois reprezentációk és moduláris formák módszerét használták fel a kapott (4) típusú egyenletek kezelésére.

Fermat és Euler egy régi, klasszikus eredményét kiterjesztve Győry és Hajdu [77]-ben (társszerzőkkel közösen) meghatározták az összes legalább négytagú, négyzetszámokból és köbszámokból álló számtani sorozatot.

Binom Thue egyenletek és szuperelliptikus egyenletek numerikus megoldása (Pintér Ákossal közös eredmények)

Igen sokan foglalkoztak a klasszikus

$$1^k + 2^k + \ldots + x^k = y^n \tag{5}$$

egyenlettel, ahol $k \geq 1$ adott egész szám és $x, y \geq 1, n \geq 2$ ismeretlen egészek. Mivel a bal oldal x-nek $(k+1)$-edfokú racionális együtthatós polinomja, ezért (5) egy speciális szuperelliptikus egyenlet. Számos részeredmény után Győry, Tijdeman és Voorhoeve (1979) megmutatták, hogy (5)-nek csak véges sok megoldása van és mindezek elvileg meghatározhatók. A megoldásokra nyert korlátok azonban túl nagyok, a megoldások tényleges meghatározására már $k = 1$ esetén sem alkalmazhatók.

A [30] dolgozatban Győry és Pintér M. Bennettel közösen teljesen megoldják az (5) egyenletet minden $k < 12$-re, s ezzel igazolják Schäffer egy 50 éves sejtését. Ilyan magas fokszámú szuperelliptikus egyenletek numerikus megoldása önmagában is jelentős, ritkaságnak számító teljesítmény. Ennél is fontosabb azonban a kidolgozott módszer, mely a bizonyítás során született.

[30]-ban a szerzők az (5) egyenletet (1) alakú egyenletekre vezették vissza, s eljárást doloztak ki a kapott egyenletek megoldására. A $C = 1$ esetben Győry és Pintér [73] szisztematikusan elkezdte (1) alakú egyenletek teljes megoldását korlátos A és B mellett, s $\max(|A|, |B|) \leq 20$-ra az összes megoldást meghatározták. Továbbá [75]-ben (társszerzőkkel közösen) $C = 1$ mellett az (1) egyenletet teljesen megoldották minden olyan esetben, amikor A, B is ismeretlenek, de AB legfeljebb két, 17-nél kisebb prímszámmal osztható. Alkalmazásként a (2) egyenletet $f(X) = X(X+1)$-re teljesen megoldották minden olyan esetben, amikor w is ismeretlen, de legfeljebb két, 17-nél kisebb prímmel osztható.

A szerzők a bizonyítások során a modern diofantikus számelmélet szinte valamennyi fontos módszerét kombinálták, beleértve a Baker-módszert, a hipergeometrikus módszert, a lokális módszert, a modern számítógépes módszereket, valamint a Fermat-sejtés bizonyítására kidolgozott módszernek a szerzők által továbbfejlesztett változatát. $C = 1$ és $q \in \{3, n\}$ esetén $n \geq 13$ prímekre a (4) alakú egyenletek egy széles osztályát megoldották. Eredményük az $A = B = C = 1$ esetben $n \geq 13$-ra tartalmazza Wiles híres tételét a Fermat-féle egyenletre vonatkozóan.

Adott fokszámú és adott diszkriminánsú, illetve adott rezultánsú binér formák (részben Bérczes Attilával közös eredmények)

Győry Kálmán a 70-es évek elején számos alkalmazással járó effektív végességi tételeket nyert adott diszkriminánsú egész együtthatós főpolinomokról. Később végességi eredményeket publikált adott fokszámú és adott rezultánsú egész együtthatós főpolinomokról is. Az eredmények a "monic" binér formák nyelvén is megfogalmazhatók. Birch és Merriman – Győrytől függetlenül– analóg, de ineffektív tételt nyert adott diszkriminánsú binér formákról, mely azonban nem adja ki speciális esetként a "monic" esetben nyert végességi állításokat.

Evertse és Győry (1991) kvantitatív formában effektivizálta a Birch-Merriman tételt. Győry [71]-ben ezen kvantitatív eredményt, valamint a főpolinomokra vonatkozó saját korábbi tételeit lényegesen élesítette, aminek több fontos alkalmazását adta egyebek között adott diszkriminánsú algabrai (nem szükségképpen algebrai egész) számokra.

Az adott diszkriminánsú, illetve adott rezultánsú binér formák természetes módon ekvivalenciaosztályokba sorolhatók. Bérczes, Evertse és Győry [11], [51] adott felbontási testtel rendelkező binér formák esetén explicit és egyben uniform felső korlátokat adtak az említett ekvivalenciaosztályok számára. Alkalmazásként fontos új eredményt nyertek Thue-Mahler egyenletek megoldásszámára vonatkozóan.

Pethő Attila eredményei

Pethő Attila 2003 és 2006 között 21 tudományos dolgozatot készített az OTKA pályázat támogatásával. Legfontosabb eredményeit az alábbiakban részletezzük.

Diofantikus egyenletek numerikus megoldása.

J.H.E. Cohn 2002-ben az $x^n = Dy^2 + 1$ diofantikus egyenlet megoldásait vizsgálta, ahol az ismeretlenek x, y és n. Azt - többek között - $0 < D \leq 100$-ra megoldotta, de hat eset nyitva maradt. Herrmannal és Járásival [23]-ban az elliptikus és a Thue egyenletekre korábban kidolgozott numerikus módszerek felhasználásával teljessé tettük Cohn eredményét.

S. Schmitt és H.G. Zimmer könyve [8] elliptikus görbékre vonatkozó algoritmusokról szól. Ehhez írtam egy 20 oldalas appendixet az A. Baker módszerén alapuló numerikus módszerekről diofantikus egyenletek megoldására.

További, ebből a szempontból is releváns eredményeket a 2. pontban ismertetünk.

Számtani sorozatok normaforma egyenleteken (részben Bérczes Attilával közös eredmények)

Bérczes Attilával [9] bebizonyítottuk, hogy egy normaforma egyenletnek általában csak véges sok olyan megoldása van, ahol a megoldások koordinátái egy számtani sorozatot alkotnak. Az eredmény azért érdekes, mert az általunk vizsgált normaforma egyenleteknek általában végtelen sok megoldása van. Példákat adtunk olyan tetszőlegesen nagy fokszámú normaforma egyenletekre is, amelyek megoldásai koordinátái számtani sorozatot alkotnak. [48]-ban az $\alpha^n = a$ tulajdonságú elemekkel definiált egyenletet oldottuk meg $0 < a \leq 100$ mellett. Bérczessel és V. Zieglerrel [49]-ben pedig a legegyszerűbb harmadfokú testek feletti normaforma egyenletet oldottuk meg ugyanezen feltétel mellett.

A Pell egyenletek normaforma egyenletek speciális esetének tekinthetőek, mégpedig akkor, ha az alaptest másodfokú. Ilyenkor persze a megoldás két koordinátájára nem értelmes a fenti kérdés, azonban megvizsgálhatjuk, hogy a megoldások koordinátái külön-külön alkothatnak-e számtani sorozatot. V. Zieglerrel [53]-ban megmutattuk, hogy Pell egyenletre ilyen értelemben is csak véges hosszúságú számtani sorozat illeszkedhet, sőt effektív korlát adható a sorozat kezdőértékére és differenciájára, valamint a hosszára is. Megmutattuk továbbá, hogy adott háromtagú számtani sorozathoz végtelen sok olyan Pell egyenlet van, amelyekre ezek illeszkednek. Konstruáltunk olyan példát is, amelyre 8 hosszúságú, de szimmetrikus számtani sorozat illeszkedik. A témát tovább gondolva A. Dujellával és P. Tadićcsal [52] bebizonyítottuk, hogy ha egy négytagú számtani sorozat differenciája nagyobb 1-nél, akkor végtelen sok olyan Pell egyenlet van, amelyekre ezek illeszkednek. Konstruáltunk olyan 6 és 7 tagú nem szimmetrikus számtani sorozatokat, amelyek Pell egyenletre illeszkednek.

Rekurzív sorozatok tulajdonságai. Legyen K egy algebrailag zárt test és $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $K[x]$ egy d-ed rendű lineáris rekurzív sorozata. Korábbi kutatásainkat folytatva Cl. Fuchsszal és R. Tichyvel [20]-ban általános feltételek mellett megmutattuk, hogy a $G_n(x) = G_m(y)$ egyenletnek csak véges sok n, m egész megoldása lehet feltéve, hogy x és y algebrailag függők, amelyet a $Q(x, y) = 0$ egyenlet ír le. Felső becslést adtunk a megoldások számára is. Korábban azt az egyszerűbb esetet vizsgáltuk, amikor $Q(x, y) = y - P(x)$, ahol $P(x)$ egy polinom. Cl. Fuchsszal [35]-ben megmutattuk, hogy ebben a speciális esetben nemcsak a megoldások számára lehet felső becslést adni, hanem effektív korlát adható $\max\{|n|, |m|\}$-re is.

Általánosított számrendszerek. A tárgyalt időszakban itt végeztem a legtöbb kutatást.

a. K. Mahler bizonyította, hogy ha a tizedesvessző után írjuk a 2-hatványainak tizes számrendszerbeli alakját, akkor egy irracionális számot kapunk. Ezt az eredményt Bundschuh és Niederreiter általánosította kicserélve 2-t és 10-et tetszőleges multiplikatívan független egész számokra. G. Baratval és Ch. Frougnyval [39]-ben ezt az eredményt több irányban is tovább általánosítottuk.

b. S. Akiyamával egy informális nemzetközi kutatócsoportot szerveztünk a helyiértékes számrendszerek bizonyos általánosításainak vizsgálatára. A csoport tagjai: Borbély Tibor, H. Brunotte, Huszti Andrea, J. Thuswaldner és W. Steiner különböző felállásban 7 - az OTKA pályázathoz köthető - dolgozatot készítettek a beszámolási időszakban.

Az 1 főegyütthatós $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ polinom CNS, ha a $\mathbb{Z}[X]/P\mathbb{Z}[X]$ faktorgyűrű minden elemének van olyan reprezentánsa, amely együtthatói nem negatívok és kisebbek, mint $|P(0)|$. W.J. Gilbert 1982-ben megfogalmazott egy a harmadfokú CNS polinomokat karakterizáló sejtést. Korábban, néhány esetben bebizonyítottuk a sejtést, de megmutattuk azt is, hogy az általában nem igaz. Néhány parametrizált harmadfokú számtestben megadtuk az összes CNS alapszámot is.

[14] és [56] rokon problémával foglalkozik. Kovács Béla bizonyította 1986-ban, hogy egy számtest egészei gyűrűjében pontosan akkor van kanonikus számrendszer, ha van hatványegészbázis. [14]-ben és [56]-ban meghatároztuk néhány negyedfokú parametrikus számtestcsaládra az összes kanonikus számrendszer alapszámait.

5. Kriptográfia matematikai alapjai. A normaforma egyenleteket az elmúlt évtizedekben nagyon sokan és sokféle szempontból vizsgálták. [10]-ben – Bérczes és Ködmön egy korábbi dolgozatában foglaltakat tovább gondolva – a $Norm_P(\mathbf{x})$ mod s függvényt vizsgáltuk, ahol P $n \leq m$-ed fokú főpolinom, $Norm_P$ a P-hez tartozó m változós forma és s egy egész szám. Megmutattuk, hogy ha s két prímszám szorzata, akkor ez a függvény ütközésmentes és numerikus vizsgálatok valószínűsítik, hogy lavinahatással is rendelkezik.

[43]-ban Sárközy és szerzőtársai korábbi eredményeihez kapcsolódva megmutattuk, hogy az $\left(\frac{a_n}{p}\right)$ sorozat, ahol a_n egy lineáris rekurzív sorozat n-dik tagja, p pedig egy prímszám alkalmas feltételek mellett kriptográfiai szempontból jó tulajdonságú véletlen számsorozatnak tekinthető.

Gaál István eredményei

Gaál István a projekt keretében 9 dolgozatot publikált. A Győry Kálmánnal közös (l. [32]) eredményeit fentebb már ismertettük. Az alábbiakban a további eredményeit vesszük sorra.

Tovább folytatta vizsgálatait algebrai számtestek hatványegészbázisainak kiszámitására vonatkozóan. Újabb eredményeket nyert Olajos Péterrel közösen testek kompozitumainak hatványegészbázisaira [5]. Robertsonnal közösen [66] vizsgálta körosztási testek hatványegészbázisait. Nyul Gáborral közösen [69] bikvadratikus számtestekben hatékony eljárást adott a p-adikus indexforma egyenlet megoldására.

Heron háromszögekre vonatkozóan [4] Járási Istvánnal és F.Luca-val folytatott vizsgálatokat, ugyancsak p-adikus egységegyenlet megoldását felhasználva.

Véges testek feletti függvénytestek felett értelmezett Thue egyenletek megoldására adott hatékony algoritmust M.Pohsttal közösen [67], [68]. Ezen eredmények jelentik az első algoritmusokat véges karakterisztikájú függvénytestek feletti Thue egyenletekre vonatkozóan, az alaptestre tett további feltételek nélkül. Vizsgálatait általánosabb diofantikus egyenletekre is kiterjesztette [65].

Pintér Ákos eredményei

Pintér Ákos a projekt keretében 18 dolgozatot publikált. A legjelentősebb eredményeket Győry Kálmánnal (l. [7], [25-27], [30], [45], [72-73], [75]) közösen érte el, amelyek fentebb már ismertetésre kerültek.

Hajdu Lajos eredményei

Hajdu Lajos a projekt keretében 20 dolgozatot publikált. A Győry Kálmánnal közös eredményeinek (l. [27], [28], [76], [77]) egy részét fentebb már ismertettük. Az alábbiakban Hajdu Lajos további idevágó eredményeit foglaljuk össze.

Teljes hatványok számtani sorozatokban. Felső korlátot nyert a "majdnem" teljes, nem feltétlenül azonos kitevőjű hatványokból álló számtani sorozatok hosszára. Ezt az eredményt Bruinnal, Győryvel és Tengellyel továbbvitte és megmutatta, hogy az említett típusú számtani sorozatok száma is korlátozható. Egy részben kapcsolódó kutatási területen megmutatta, hogy S-egységek lineáris kombinációinak halmaza csak korlátos hosszúságú számtani sorozatokat tartalmazhat. Eredményei alkalmazásaként negatív választ adott M. Pohst egy prímszámok kettőhatványok és háromhatványok összegeként illetve különbségeként való előállításával kapcsolatos problémájára.

Polinomok. Győry Kálmánnal, Pintér Ákossal és Schinzellel "kevés" együttható segítségével meghatározható polinomok jellemzésére szolgáló kritériumokat nyert. Tijdemannal a végtelen sok négy, öt, majd általánosan k-tagú polinomot osztó polinomok egy jellemzését adták, bizonyos feltételek mellett. Ezzel az eredményükkel közel végleges választ adtak Posner és Rumsey, illetve Győry és Schinzel egy kérdésére. Effektív és numerikus eredményeket nyert polinomokból álló számtani sorozatokban található irreducibilis polinomokkal, valamint az úgynevezett Szegedy-problémával kapcsolatban.

Bérczes Attila eredményei

Bérczes Attila a pályázat keretében 8 dolgozatot publikált. A Győry Kálmánnal és Pethő Attilával közös eredményeit (l. [9-11], [48-51]) fentebb már ismertettük. További eredménye a következő: Ködmön Józseffel közösen [1] bonyolultságelméleti szempontból megvizsgált és összehasonlított három különböző algoritmust norma formák értékeinek kiszámítására. Mindhárom esetben kiderült, hogy az algoritmus polinom idejű. Ez egy fontos lépés volt abban az irányban, hogy egy norma formára alapozott hash függvény egyirányú voltát alátámasszák. Az említett hash függvény használatára a két szerző egy későbbi, Pethővel közös dolgozatban tett javaslatot.

Rakaczki Csaba eredményei

Rakaczki Csaba a pályázat keretében 6 dolgozatot publikált. Legfontosabb eredményei a következők:

[3], [21], [22], [36]-ban $f(x) = g(y)$ típusú egyenletek egy -egy fontos, sokat vizsgált osztályára nyer általános ineffektív végességi eredményeket. Többek között teljesen jellemzi azon m, n, k egész, λ, l racionális paramétereket, illetve $g(y)$ racionális együtthatós polinomokat, melyekre az $S_k(x) = g(y)$, illetve az $x(x-1)\cdots(x-(m-1)) = \lambda y(y-1)\cdots(y-(n-1)) + l$ típusú diofantikus egyenleteknek csak véges sok x, y egész megoldása van.

[54]-ben Pintér Ákossal közösen megmutatja, hogy ha $k \geq 5$ egy páratlan egész szám, akkor a $B_k(x) + b$ polinomnak mindig van legalább három páratlan multiplicitású gyöke, ahol b egy tetszőleges komplex szám, $B_k(x)$ pedig a k-adik Bernoulli polinom. A cikkben bizonyítják továbbá azt az állítást, hogy amennyiben $k > 5$ páros, akkor legfeljebb egy olyan b komplex szám létezik, amelyre a $B_k(x) + b$ "eltolt" Bernoulli polinomnak nincs három páratlan multiplicitású gyöke.

[55]-ben az [54]-ben közölt eredmények egy analóg változatát adja Euler polinomokra vonatkozóan. Továbbá effektív végességi eredményt nyer az $F(E_k(x)) = y^2$ alakú hiperelliptikus egyenlet algebrai egész x, y megoldásaira vonatkozóan, ahol $F(X)$ egy algebrai egész együtthatós nem teljes négyzet polinom, $E_k(x)$ pedig a k-adik Euler polinom.