1. Általános megjegyzések

Publikációk. Az OTKA támogatás ideje alatt Nagy Gábornak 5 folyóiratcikke jelent meg vagy lett elfogadva, 2 benyújtott cikke van, és egy komputeralgebrai programcsomag kifejlesztésében vett részt. Fodor Ferenc 8 publikációt írt, melyből 5 megjelent folyóiratcikk, egy konferenciakötet [1], egy részletes konferencia beszámoló [2], illetve egy cikkének már a lektori vélemény alapján javított változata van jelenleg benyújtva.

Hivatkozások

[1] T. Bisztriczky, Fodor F., and Kuperberg W. (eds.), *Discrete Geometry*, Period. Math. Hungar. **53** (2006), no. 1-2.

[2] Csikós B., Fodor F., and Oliveros D., *Calgary Workshop in Discrete Geometry*, Period. Math. Hungar. **53** (2006), no. 1-2.

Konferenciák. A fenti időszak alatt, az OTKA támogatást is kihasználva Fodor Ferenc és Nagy Gábor 2-2 nemzetközi konferencia szervezésében vett részt:

- Calgary Workshop in Discrete Geometry, University of Calgary, Calgary, Kanada, 2005. május 13-14.
- Symmetry in Geometry, 2006 Summer Meeting of the Canadian Mathematical Society, Calgary, Kanada, 2006. június 3-5.
- LOOPS'03 International Mathematical Conference. Prága, 2003. augusztus 10-17.
- LOOPS'07 International Mathematical Conference. Prága, 2003. augusztus 19-25.

A fentieken felül mindketten számos előadást (konferencia, szeminárium és colloquium) tartottak kutatási témájukban, ahol a támogatási időszak alatt elért eredményeiket mutatták be.

Külföldi vendégek. Az OTKA pályázat támogatásával Fodor Ferenc és Nagy Gábor az alábbi külföldi kutatókat látta vendégül Szeged: Tudor Zamfirescu (Dortmund, 2004), Bisztriczky Tibor (Calgary, 2005), Alexander Grishkov (Sao Paolo, 2006), Petr Vojtěchovský (Denver, 2006), Wlodek Kuperberg (Auburn, 2006). A vendégek többsége előadást is tartott a Nagy és Fodor által szervezett Kerékjártó Béla Geometria Szemináriumon.

2. Trialitással rendelkező csoportok geometriája

A G csoportot trialitással rendelkezőnek mondjuk, ha van σ, ρ automorfizmusa, melyre $\sigma^2 = \rho^3 = (\sigma\rho)^2 = 1$ és minden $g \in G$ és $h = g^{-1}\sigma(g)$ esetén $h\rho(h)\rho^2(h) = 1$. Régóta ismert, hogy az ilyen csoportok szoros kapcsolatban állnak a Moufang-féle loopok osztályával, azaz azokkal az egységelemes kvázicsoportokkal, melyek kielégítik az $x(y(xz)) = ((xy)x)z$ azonosságot. A kapcsolat pontos leírát megkönnyíti a loophoz rendelt illeszkedés-geometriai struktúra, a 3-hálózat használata. Ekkor a trialitással rendelkező csoport kollineációcsoportként jelenik meg. Ezt a kapcsolatot fejtette ki Nagy és Vojtěchovský a survey-jellegű [1] cikkükben, több alkalmazással a klasszikus, az oktávalgebrából származtatható Moufang-loop osztályra.

Speciális esetben a csoport trialitás-automorfizmusa olyan φ automorfizmusból származtatható, melyre $x\varphi(x)\varphi^2(x) = 1$ minden x-re. Ez az eset a véges egyszerű Moufang-loopok Doro-féle leírásánál is megjelenik. Nagy és Valsecchi [2] cikkükben részletesen leírták ezt az esetet, és megmutatták, hogy ez csak legfeljebb 2 lépésben nilpotens Moufang-loopokat tud eredményezni.

A nilpotens Moufang-loopok esetén a fenti csoportelméleti-geometriai kapcsolat különösen komplikált és a megértést hátráltatta, hogy $p > 3$ esetén nagyon kevés nilpotens Moufang-loop volt ismert. Erre részben magyarázatot adott Nagy és Valsecchi felismerése a Moufang-loopok nukleusza és asszociátora közötti kapcsolatról. (Ezek a csoportelméleti *centrum* és *kommutátor* nem-asszociatív általánosításai.) Ezen kapcsolat segítségével sikerült gazdag looposztályokat alkotni és teljes egészében osztályozni a p^5-rendű ($p > 3$) Moufang-loopokat. Ezek az eredmények a [3] cikkben jelentek meg a *Journal of Algebrában.*

Hivatkozások

[1] G. P. Nagy and P. Vojtěchovský, *Octonions, simple Moufang loops and triality*, Quasigroups Related Systems **10** (2004), 65–94.

[2] G. P. Nagy and M. Valsecchi, *Splitting automorphisms and Moufang loops*, Glasgow Math. J. **46** (2004), 305–310.

[3] ———, *On nilpotent Moufang loops with central associators*, J. Alg. **307/2** (2007), 547–564.

3. Involutórikus szelések extraspeciális 2-csoportokban

Azon egységelemes kvázicsoportokat, melyekben teljesül az $x(y(xz)) = (x(yx))z$ azonosság, *(bal oldali) Bol-loopoknak* nevezzük. Azt mondjuk, hogy az L Bol-loop *kis Frattini 2-loop,* ha valamely A 2-elemű centrális normálosztóra L/A elemi Abel 2-csoport. Ilyen loopokkal Nagy Gábor 2003-2004-ben foglalkozott intenzíven, az eredményeket az [1], [2] cikkekben publikálta. A cikkek megjelenése sajnos a kiadó hibájából nagyon elhúzódott.

[1]-ben Nagy egyrészt explicit képletet adott kis Frattini Bol 2-loopok műveletére, másrészt megadta ezek csoportelméleti konstrukcióját extraspeciális 2-csoportbeli szelések segítségével. Ez utóbbi módszer igen hatásosnak bizonyult, felhasználásával Nagy az ilyen loopok számát alulról tudta becsülni, valamint információkat tudott gyűjteni az automorfizmus-csoportjukról.

A Moufang-féle kis Frattini 2-loopokat *kódloopokként* is ismerik, szoros kapcsolatban állnak kétszeresen páros bináris lineáris kódokkal. Ez az előbb említett osztály része, a módszer mégsem alkalmas vizsgálatukra, mert abban a Moufang-azonosság csak körülményesen jellemezhető. Ezért egy másik módszert, a trialitással rendelkező csoportokat és a Hsu által 2000-ben bevezetett szimplektikus köbös tér fogalmát használta Nagy Gábor [2]-ben. Ezen újabb megközelítés alkalmas volt a 64-edrendű kis Frattini Moufang 2-loopok számítógépes osztályozására.

Hivatkozások

[1] G. P. Nagy, *On the structure and number of small Frattini Bol 2-loops*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **141** (2006), no. 03, 409–419.
[2] ——, *Direct construction of code loops*, Discrete Maths. (2004), to appear.

4. Moufang- és Bol-loopok speciális osztályainak jellemzése

Glauberman és Wright 1968-ban megmutatták, hogy véges Moufang 2-loopok nilpotensek. Mivel bármely 2 elem által generált Moufang-loop csoport, a valódi Moufang 2-loopokat legalább 3 elem generálja. Ezért egy 2^n rendű Moufang-loop nilpotenciaosztálya legfeljebb $n-2$. [1]-ben Nagy Gábor bebizonyítja, hogy $n \geq 5$ esetén pontosan 17 különböző 2^n-rendű valódi maximális osztályú Moufang-loop van és ezekre explicit konstrukciót is ad, részben felhasználva Valsecchivel megalkotott eljárásukat.

[2]-ben Nagy Gábor P. Vojtěchovský-val vizsgálta Moufang-loopok centrális kiterjesztéseit, ezeket sikerült megfelelő hatékonysággal leprogramozniuk oly módon, hogy teljessé tudták tenni a 64-ed és 81-ed rendű Moufang-loopok osztályozását. Ezzel a legfeljebb 64-ed rendű Moufang-loopok klasszifikációja teljessé vált, a megfelelő könyvtárakat a [3] csomagban implementálták. Ezt a programcsomagot a GAP komputeralgebra rendszerhez 2002 óta Nagy és Vojtěchovský folyamatosan fejleszti, jelen pillanatban az 1.4-es verzió tölthető le a GAP honlapjáról. A csomag kvázicsoportok és loopok számítógépes vizsgálatához készül, számos eljárással és looposztály könyvtárral (legfeljebb 64-rendű Moufang-loopok, legfeljebb 16 rendű Bol-loopok, kicsi Steiner-loop, stb.).

Hivatkozások

[1] ——, *The classification of Moufang 2-loops of maximal class* (2006). Submitted.
[2] G. P. Nagy and P. Vojtěchovský, *The Moufang Loops of Order 64 and 81* (2006). Submitted.
[3] ——, *LOOPS: Computing with quasigroups and loops in GAP. Version 1.4.*, 2007. http://www.gap-system.org/Packages/loops.html.

5. Geometriai transzverzálisok

A konvex geometria egy ismert témaköre a geometriai transzverzálisok elmélete. Általában azt mondjuk, hogy konvex halmazok egy $\mathcal{K}$ családja rendelkezik közös transzverzális egyenessel, illetve a T tulajdonsággal, ha létezik olyan egyenes, aminek van közös pontja $\mathcal{K}$ minden elemével. Ha a halmaz bármely k eleméhez létezik transzverzális, akkor a $\mathcal{K}$ halmaz $T(k)$ tulajdonságú, illetve ha van olyan egyenes, mely legfeljebb k elem kivételével $\mathcal{K}$ minden elemét metszi, akkor a $\mathcal{K}$ család $T-k$ tulajdonságú. A geometriai transzverzális elmélet egyik jellemző kérdése, hogy milyen elégséges feltételeket lehet adni transzverzális egyenes létezésére általában, vagy speciális konvex halmazok esetén.

5.1. Transzverzálisok konvex lemez eltoltjaiból álló diszjunkt családokhoz. A síkbeli transzverzális témakör egy híres tétele Tvergbergtől (1989) származik, mely szerint $T(5)$-ből következik T tetszőleges síkbeli konvex lemez páronként diszjunkt eltoltjaiból álló családban. Ez az állítás, melyet Grünbaum 1958-ban megsejtett, szoros analógiában áll a konvex geometria közismert Helly-tételével. A Tverberg-tétel körlemezre vonatkozó speciális esetét Danzer bebizonyította már 1959-ben. A terület egy jellemző kérdésköre a parciális transzverzálisok létezésével foglalkozik. Katchalski és Lewis (1989) megmutatták, hogy konvex lemezek páronként diszjunkt eltoltjaiból álló renszerre $T(3)$-ból következik $T - k_3$, ahol k_3 univerzális konstans, azaz független a konvex lemeztől. A k_3 konstans pontos értéke ismeretlen. Katchalski és Lewis sejtése szerint $k_3 = 2$. Holmsen (2002) nemrégiben bebizonyította, hogy $4 \leq k_3 \leq 22$ általános konvex halmazra, majd Kaiser (2002) megmutatta, hogy $k_3 \leq 20$ körökre. A Katchalski–Lewis-sejtés konvex lemezekre továbbra is nyitott, azonban 2004-ben Heppes Aladárnak sikerült igazolni a sejtést diszjunkt egységkörlemezekből álló rendszerekre.

A fenti eredmények fényében természetes az a kérdés, hogy a $T(4)$ feltétel mit garantál körökre és általános konvex lemezre. Grünbaum (1958) azt állította egy cikkében, hogy körökre $T(4)$-ből következik T. Azonban Aronov, Goodman, Pollack és Wenger (2000) ellenpéldát adott Grünbaum állítására.

Bisztriczky Tiborral (Calgary, Kanada) és Deborah Oliverosszal (Mexico City) közös publikációk sorozatában [1–3] Fodor Ferenc bebizonyította, hogy páronként diszjunkt egységkörökből álló rendszerre $T(4)$-ből következik $T - 1$. A bizonyítás alapvetően induktív jellegű. A szerzők [1]-ben bebizonyították, hogy az állítás igaz $n = 6, 7$ esetére. A második publikáció [2] tartalmazza az $n = 8, 9$ esetek bizonyítása mellett azt a kulcsállítást, mely lehetővé teszi az n szerinti indukciót $n \geq 8$-ra. Végül maga az indukciós gondolatmenet [3]-ban van részletezve. Az első két cikk [1, 2] már megjelent. A harmadik cikk esetében pedig a lektor a kézirat elfogadását javasolta az *Israel J. Math.* szerkesztőjének azzal a feltétellel, hogy a szerzők egyes, a bizonyítást nem érintő dolgokat megváltoztatnak. A kézirat javított változatát a szerzők a folyóiratnak már visszaküldték.

Hivatkozások

[1] T. Bisztriczky, F. Fodor, and D. Oliveros, *Large transversals to small families of unit disks*, Acta. Math. Hungar. **106** (2005), no. 4, 285–291. MR **2131333 (2005m:**52010)

[2] ______, *A transversal property of eight and nine unit disks*, Bol. Soc. Mat. Mexicana **12** (2006), no. 1, 59–74.

[3] ______, *The T(4) property for families of unit disks*, Israel J. Math. javított változat benyújtva.

5.2. Transzverzálisok n-dimenziós gömbrendszerekhez. Magasabb dimenzióban transzverzális egyenes létezésével kapcsolatos első pozitív eredmény Hadwigertől (1958) származik, mely szerint n-dimenziós gömböknek egy olyan családjához, amelyben tetszőleges két gömb középpontjának távolsága nem kisebb, mint kétszer a sugaraik összege, a $T(n^2)$ feltétel garantálja transzverzális egyenes létezését. Később Grünbaum (1960) a Hadwiger-féle tételben lévő n^2-et $2n - 1$-re javította azonos feltételek mellett. Nemrégiben Holmsen, Katchalski és Lewis megmutatták, hogy $\mathbb{R}^3$-ban $T(46)$-ból következik T. Később ezt a korlátot Cheong, Goaoc és Holmsen 11-re javította. A fenti Holmsen (et al.) és Cheong (et al.) eredmények alapján természetesen felmerül a kérdés, hogy lehet-e hasonlót állítani n-dimenzóban is.

2005-ben megjelent publikációjukban [1] Ambrus Gergely (Szeged), Bezdek András (Auburn, U.S.A.) és Fodor Ferenc a Holmsen, Katchalski és Lewis által tárgyalthoz hasonló kérdést vizsgált d-dimenziós egységgömbökből álló rendszerekre. Konkrétan: bebizonyították, hogy ha az $\mathcal{F}$ n-dimenziós egységgömbök olyan rendszere, melyben tetszőleges két gömb középpontjának távolsága legalább $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$, akkor a $T(n^2)$ tulajdonságból következik, hogy $\mathcal{F}$ rendelkezik a T tulajdonsággal, azaz a gömbrendszernek van transzverzális egyenese.

Hivatkozások

[1] G. Ambrus, A. Bezdek, and F. Fodor, *A Helly-type transversal theorem for n-dimensional unit balls*, Arch. Math. (Basel) **86** (2006), no. 5, 470–480. MR **2229364 (2007a:**52007)

6. Legsűrűbb elhelyezések a síkon és térben

A diszkrét geometria egyik nagy témaköre az *elhelyezések és fedések elmélete*. Konvex testek kölcsönösen egymásba nem nyúló rendszerét elhelyezésnek hívjuk. Azt a rendszert, ahol egy tartomány minden pontja valamely konvex testhez tartozik a tartomány egy fedésének nevezzük. Két alapprobléma, hogy egy adott tartományba egy alakzat minél több példányát szeretnénk elhelyezni, illetve egy adott tartományt egy alakzat minél kevesebb példányával szeretnénk lefedni. Elhelyezések és fedések hatékonyságának mérésére a *sűrűség* fogalmát használjuk. Egy elhelyezés sűrűségén szemléletesen a tartománynak az alakzatok által elfoglalt hányadát értjük. Adott tartomány és alakzat esetén általában a maximális sűrűséget biztosító elhelyezést, illetve minimális sűrűséget adó fedést keressük. A véges fedések és elhelyezések elmélete a fenti problémákkal foglalkozik véges számú elemből álló rendszerekre. A terület igen élénken fejlődik, ifj. Böröczky Károly tollából nemrég jelent meg egy összefoglaló mű.

Hivatkozások

[1] Károly Böröczky Jr., *Finite packing and covering*, Cambridge Trast in Mathematics, vol. 154, Cambrudge University Press, Cambridge, 2004. MR **2078625 (2005g:**52045)

6.1. Egységkörök elhelyezése körben. Klasszikus probléma a síkbeli konvex alakzatokba való optimális körelhelyezések vizsgálata. Az erre a kérdésre vonatkozó válaszok az alkalmazások szempontjából is igen fontosak, mert számos optimalizálási feladatban természetes módon merülnek fel. Az ide vonatkozó eredmények legnagyobb része sűrű konfigurációkból és ilyen konfigurációkat előállító algoritmusokból áll. Konkrét elhelyezés optimalitására vonatkozó bizonyítás csak kevés van.

Fodor Ferenc a következő problémát vizsgálta: mi annak a legkisebb sugarú körnek a sugara, amiben el lehet helyezni n egységkört, és az egységköröknek milyen elhelyezése valósítja meg az optimumot? A fenti kérdésre a válasz csak kis n esetén ismert Pirl, Kravitz és Melissen eredményeiből, nagyobb elemszámra csak sejtések léteznek. Fodor Ferenc korábban bebizonyította az $n = 19$ és $n = 12$ esetekben az optimális konfigurációkra vonatkozó sejtéseket.

Az OTKA támogatás ideje alatt Fodor Ferenc befejezte az $n = 13$ és $n = 14$ esetek vizsgálatát és bebizonyította a Pirl és Kravitz által sejtett legsűrűbb elhelyezéseket adó konfigurációk optimalitását. Ebből két publikáció született [1, 2]. A bizonyításhoz használt módszer azon alapszik, hogy a sejtett minimális méretű körlap alkalmas módon szétvágható egy koncentrikus körre és körgyűrűre, amelyekben a pontok eloszlása már geometriailag jól vizsgálható. Ez a módszer sikeresnek bizonyult több konfiguráció optimalitásának bizonyításában.

Hivatkozások

[1] Ferenc Fodor, *Packing 14 congruent circles in a circle*, Stud. Univ. Žilina Math. Ser. **16** (2003), no. 1, 25–34. MR **2065745 (2005b:**52043)

[2] ______, *The densest packings of 13 congruent circles in a circle*, Beiträge Algebra Geom. **44** (2003), no. 2, 431–440. MR **2017043 (2004i:**52016)

6.2. Voronoi cellák 3-dimenziós gömbelhelyezésekben. Fejes Tóth Lászlótól származik a 3-dimenziós gömbelhelyzéskkel kapcsolatos *dodekahedrális sejtés*, mely szerint egységgömbök egy elhelyezésében egy Voronoi cella térfogata legalább akkora, mint az egységgömb köré írt szabályos dodekaéder térfogata. Ezt a sejtést nemrégiben bizonyította be Thomas Hales és Jean McLauglin hasonló módszerrel, mint amit Hales a Kepler sejtés igazolásához használt. 2000-ben Bezdek Károly felvetette a fenti sejtés *erős* változatát, melynek állítása a következő: 3-dimenziós egységgömbök egy elhelyezésében a Voronoi cella felszíne legalább akkora, mint az egységgömb köré írt szabályos dodekaéder felszíne. E sejtés mindmáig nem bizonyított. Bezdek Károly (2000), majd Bezdek Károly és Daróczy-Kiss Endre (2005) adtak alsó korlátot egy Voronoi cella felszínére.

2006-ban Ambrus Gergellyel közös publikációjában Fodor Ferenc [1] lényegesen megjavította a Bezdek–Daróczy-Kiss-féle alsó korlátot. A bizonyítás egy Muder által korábban használt darabolásos módszer továbbfejlesztett változatán alapszik. A Voronoi cella lapkúpjait alkalmasan választott kör, vagy sokszöggel csonkított kör alapú kúpokra cserélve csökkenteni lehet a lapkúp felszín-térszög arányát. Ezt az eljárást a teljes Voronoi cellára optimalizálva alsó korlát adható a Voronoi cella felszínére.

Hivatkozások

[1] G Ambrus and F Fodor, *A new lower bound for the surface area of a Voronoi polyhedron*, Period. Math. Hungar. **53** (2006), no. 1-2, 45–58.