

1. Folytattuk a nagybonyolultságú integrált áramkörök (VLSI) huzalozásával kapcsolatban felmerülő problémák bonyolultságának vizsgálatát, hatékony algoritmusok keresését. A csatornahuzalozás területén 2 rétegen, Manhattan modellben NP-teljes az adott szélességben való megoldhatóság eldöntése (és ezáltal NP-nehéz a minimális szélesség meghatározása). A 2-nél több rétegű esetekben a bonyolultságra ismert eredményeket ld. [22], míg a korlátozás nélküli (nem-Manhattan) esetre ld. [45], az implementálásra ld. [29]. Ha a szélesség tetszőleges lehet, akkor a megvalósítható specifikációkat jellemeztük (és egyben beláttuk, hogy ha a csatorna hosszát egy oszlop bevezetésével növelhetjük, akkor így minden specifikáció lineáris időben megoldható [17]).

Gallai klasszikus eredménye szerint abban a speciális esetben, ha minden kivezetés a csatorna északi oldalán van, akkor a Manhattan modellben lineáris időben megvalósítható a minimális szélességű huzalozás. Beláttuk viszont, hogy a minimális összhosszúságú huzalozás problémája még ebben a speciális esetben is NP-nehéz [18]. A minimális összegű színezési problémának más eseteivel és általánosításával is foglalkoztunk [57, 59].

Az egyéb geometriájú esetekkel is foglalkoztunk, amikor tehát a kivezetések vagy a téglalap alakú lapka mind a négy oldalán helyezkednek el (switchbox huzalozás), vagy három oldalon vagy két szomszédos oldalon. Áttekintettük az ismert eredményeket és két esetben javítani tudtunk a rétegszámokra eddig ismert korlátokon [40].

A technológia egyre nagyobb rétegszámokat tesz lehetővé, ezért a klasszikus megközelítés mellett, amikor a rétegszámot rögzítjük és a csatorna hossza vagy általánosabban a lap mindkét dimenziója nőhet, egyre inkább érdekes az a megközelítés is, amikor mindhárom dimenzió nő. Ebben az ún. 3-dimenziós huzalozási témakörben nyilván az a legegyszerűbb eset, ha egy lapon vannak a kivezetések és a lap feletti térrészben kell egy minél alacsonyabb téglatestben megvalósítani az összeköttetéseket. A kérdéskörben eddig elsősorban a pontpárok éldiszjunkta huzalozására születtek eredmények, mi pontdiszjunkta utakat kerestünk és megengedtük, hogy a net-ek kettőnél több terminált használjanak [87, 90].

A fenti, ún. single active layer routing problémában a megoldhatóság biztosításához megengedett a lap egyik, vagy mindkét oldalának "megnyújtása" (üres sorok, illetve oszlopok felvételével). Egy korábbi dolgozatunkban már foglalkoztunk azzal az esettel, amelyben csak a lap egyik oldalának megnyújtása megengedett, a másik oldal hossza fix. Úgy tűnik azonban, hogy a probléma természete lényegesen megváltozik, ha mindkét oldal hosszát változtathatjuk. Sikeresen bebizonyítottunk, hogy ha mindkét oldal hosszát megduplázzuk, akkor a huzalozás megvalósítható egy, a hosszabbik oldal hosszának legfőljebb konstansszorososa magasságú téglatestben. [87, 90]

Választ adva Vygen kérdésére megmutattuk, hogy az éldiszjunkta út probléma NP-teljes rácsokon, még akkor is, ha az Euler-feltétel teljesül. Ez azt mutatja, hogy Frank illetve Okamura és Seymour diszjunkta utakról szóló eredményei nem terjeszthetők ki arra az esetre, ha a terminálok nem a külső lapon vannak [37].

E kérdések nagy részét az áramkörtervezés motiválta, ahol az adott funkcióhoz tervezett hardware egyes komponenseinek az elhelyezését is már korábban kijelölték. Foglalkoztunk komplex, hardware és software komponenseket egyaránt tartalmazó rendszerek szintézisével is: hardware/software partícionálás (annak eldöntése, hogy az egyes komponensek hardware-ben vagy software-ben kerüljenek-e megvalósításra), ütemezés (az egyes komponensek végrehajtásának időbeli ütemezése) és allokáció (a komponensek hozzárendelése fizikai erőforrásokhoz). E három problémát egy egységes gráfelméleti modellben tárgyaltuk, és összefoglaltunk néhány, a tárgyalt problémák algoritmikus komplexitására vonatkozó eredményt [1, 15, 43].

Egy, az ütemezési eredményeinket összefoglaló cikkben egy átfogó modell és néhány elméleti eredmény mellett két ütemező algoritmust mutatunk be és tesztelünk nagyméretű példákon [44]. Az eredményeket vezérlés-domináns esetre is kiterjesztettük [23, 44].

Egy másik cikkben egy minimális vágáson alapuló heurisztikus algoritmust adtunk a hardver-szoftver particionálás egyik változatára. Az algoritmust összehasonlítjuk jól ismert egyéb particionáló algoritmusokkal, melyeknél hatékonyabbnak bizonyul [1].

Komponens-alapú hardver-szoftver együttes tervezési rendszer elméleti alapjait dolgoztuk ki, valamint integráltuk egy Java alapú tervező eszközbe. Az eszköz lehetővé teszi hardver és szoftver komponensek drag and drop módszerekkel történő kompozícióját, szimulálását, magában foglalja az általunk kifejlesztett particionáló algoritmust, valamint speciális konzisztenciellenőrzéseket hajt végre. Egy esettanulmánnyal illusztráljuk modellünk alkalmazhatóságát [24, 54].

2. Ezek a huzalozási kérdések természetes módon kapcsolódnak a gráfok színezéséhez és az ütemezési feladatokhoz. E két területen is folytattunk kutatásokat. A gráfszínezések és általánosításaik (multiszínezés, listaszínezés) területén értünk el eredményeket fákra és más, kevés kört tartalmazó gráfokra [16, 38, 77], ld. még ezek kapcsolatát is az ütemezési kérdésekkel [39].

A listás él multiszínezés problémában minden élhez tartozik egy engedélyezett színlista, és az, hogy hány szint kér. Marcotte és Seymour polinom idejű algoritmust adtak a problémára fák esetén. Ezt terjesztettük ki kevés körrel rendelkező gráfokra [38].

Áttekintettük a különböző színezés problémákat (listás színezés, színezésbővítés, minimális összegű színezés, stb.) és példákat mutattunk arra, hogy hogyan lehet ezeket különböző ütemezési feladatok modellezésére használni [76]. (A minimális összegű színezés és a minimális összhosszúságú huzalozás kapcsolatára az 1. pontban már kitértünk.) Polinom idejű közelítő sémát adtunk fák minimális összegű él multiszínezésére. Korábbi cikkekben a csúcsszínezési változatra már adtak közelítő sémát [77].

Gráfok szétvágásával kapcsolatos problémákat vizsgáltunk paraméteres bonyolultsági szempontból. Többek közt uniform polinomiális algoritmust adtunk arra a feladatra, hogy a kijelölt terminálokat kell szeparálni k csúcs törlésével [78].

Különböző gráfosztályokon vizsgáljuk a csúcsszínezés és a színezésbővítés problémákat paraméteres bonyolultsági szempontból [56, 76, 79]. Algoritmusokat adunk és bonyolultsági eredményeket bizonyítunk a csúcsszínezés problémára abban az esetben, ha a gráf k csúcs/él törlésével merevkörű gráffá/intervallum gráffá alakítható [76].

3. Folytattuk azokat a kutatásokat, melyek a gráfok összefüggőségének növelésével kapcsolatosak [4, 6, 8, 9]. Ezekkel a kérdésekkel, melyeket a legkülönbözőbb hálózatok (távközlési, számítógép-, vasút-) modellezése vet fel, már az előző kutatási időszakban is foglalkoztunk. Itt különösen fontos szerepet játszanak a szubmoduláris függvények, ld. még alább is.

Többek között foglalkoztunk az optikai hálózatok megosztott védelméhez kapcsolódó algoritmusokkal [20, 21], ld. a [19] ismertető cikket is. Ezek számos olyan tisztán matematikai kérdést is felvetnek, melyek nyilván NP-nehezek, de polinom idejű közelítő algoritmusok adhatóak rájuk [65, 91]. A problémák más

részét csak egészértékű programozási eszközökkel tudjuk kezelni, ismét más esetben a kombinatorikus optimalizálás hagyományos algoritmusai is használhatóak. Pl. UMTS hálózatok topológiai tervezése lényegében egy minimális költségű, egyszerre mélység- és szélesség-korlátos feszítőfa (feszítő erdő) keresése (teljes) gráfban. Erre két különböző algoritmust adtunk [52], az egyik az Egerváry féle költséges párosításon alapszik, a másik egy Lagrange-relaxációs branch-and-bound.

Folytattuk a többretegű hibátűrő távközlési hálózatokban felmerülő problémák vizsgálatát. Itt fontos kérdés, hogy a felső réteg átviteli szakaszait hogyan vezetjük el az alsó rétegben úgy, hogy az esetleges meghibásodások számát minimalizáljuk. Erre egy legrövidebb út algoritmuson alapuló heurisztikus módszert dolgoztunk ki [13, 25]. Ezen kívül célunk volt, hogy ezek az útvonalak - meghatározott célfüggvények alapján - igazságosak ("fair"-ek) legyenek [25].

Kidolgoztunk továbbá egy módszert a közlekedési hálózatok témakörében felmerülő egyik problémára: a járművek által rendszeresen (de némi pontatlansággal) küldött (X,Y) helykoordináták alapján megbecsüljük a közlekedési hálózat topológiáját reprezentáló gráfot [14, 33, 34, 36].

További gyakorlati alkalmazásként merült fel, hogy e járművek hely és sebességkoordinátái alapján, ARIMA modell és Kálmán-szűrő segítségével előre jelezzük a várható utazási időket, majd egy módosított legrövidebb út algoritmus segítségével optimális útvonalak javasolhatóak a járművek számára [35].

A közlekedési és a távközlési hálózatok közös matematikai modellje alapján olyan algoritmust dolgoztunk ki, amely egy távközlési hálózatban dinamikusan felmerülő igények útvonalait és sáv szélességeit optimalizálja [82]. Megmutattuk, hogy a kidolgozott algoritmus alacsonyabb blokkolási valószínűséget és a hálózat jobb kihasználtságát eredményezi. Ez a modell a távközlési hálózatok egy további csoportjában is alkalmazható: a vezeték nélküli személyi mobil ad hoc hálózatokban, melyeket a mindennapi életvitelt és az irodai alkalmazásokhoz dolgoztak ki [81]. E hálózatok teljesítményének hatékony kihasználásában fontos szerepet játszik a több ugrásos hálózati topológia (scatternet) kialakításának módja. Különböző scatternet kialakítási algoritmusokat javasoltunk, majd az ezek által létrehozott hálózatok teljesítményét összehasonlítottuk optimális scatternet topológiákkal. Az optimalizálást egészértékű lineáris programozási problémaként fogalmaztuk meg, és minimalizáltuk a gyakorlati és az elméleti (optimalizált) scatternetek teljesítménye közti különbséget [68, 69, 81].

Az elmúlt évben bekapcsolódtunk az úgynevezett "Adaptív elosztott multimédia szerver" (ADMS) fejlesztésébe. A szerver alkalmas videó folyamat nagyterületű hálózatokon keresztül történő szolgáltatására. Sajátossága a rendszernek, hogy hálózati vagy csomóponti túlterhelés esetén képes új hálózati csomópontokba telepíteni egyes szerver összetevőket. Emellett a rendszer többféle minőségben képes biztosítani ugyanazt a videót. A szerver komponensek hálózati elhelyezésének az optimalizálásában vettünk részt a lineáris programozás és a kombinatorikus optimalizálás módszereit használva [30, 42, 51, 75, 88]. Itt fontos kihívás a tartalom adaptálása, hogy különböző erőforráskorlátok, terminálképeségek és felhasználói preferenciák mellett is biztosítani lehessen a kívánt tartalmat [84, 85].

4. Vizsgáltuk továbbá a kvantumszámítás egyes kérdéseit is. A kvantumszámítás elméleti modelljének egyik legalapvetőbb kérdése az úgynevezett rejtett részcsoport azonosítása. Ez a függvények szokásos periodikusságának egy általánosítása, de sok egyéb probléma (pl. gráfizomorfizmus) is visszavezethető rá [10]. Eljárást adtunk annak eldöntésére, hogy van-e nem triviális rejtett részcsoportja egy csoporton megadott függvénynek [11, 49].

Itt említjük meg a weboldalak és a hiperlinkek által meghatározott gráf vizsgálatát is: Weboldakat kereső algoritmusok, illetve tematizáló programok spektrális módszereket alkalmazó családját vizsgáltuk meg mátrixok szinguláris értékek szerinti felbontásával (SVD), illetve ennek irányított gráfok adjacencia mátrixára történő alkalmazásával [2]; a weboldalak rangsorolására szolgáló Page Rank algoritmus módosításával a linkgyűjteményeket rangsoroló eljárást terveztünk [3, 26].

A weboldalak és hiperlinkek által meghatározott gráf a kereső rendszerek számára értékes információt hordoz, ugyanakkor a gráf hatalmas méretei (nagyságrendileg 10^9 csúcs és 10^{10} él) miatt csak lineáris idejű, háttértáras, elosztott rendszereken működő számítási környezetben van lehetőségünk algoritmust futtatni. Több olyan keresési vagy adatbányászati szempontból értékes mennyiséget vezettek be, amelyekre még nem ismert a fenti feltételeket kielégítő algoritmus. Vizsgálataink során a weboldalak hasonlóságát mérő SimRank és a weboldalak érdekességét illetve népszerűségét mutató Personalized PageRank értékek kiszámítására javasoltunk jól skálázható algoritmust [27, 28, 46, 47]. Sikertelen véletlen mintavételezésen alapuló Monte-Carlo módszerrel a korábban ismert négyzetes futási idejű algoritmusok helyett lineáris idejű közelítő eljárást tervezni, személyre szabott PageRank közelítésére tárfelhasználás szempontjából optimális algoritmust [89] és több feladat tárigényére alsó becslést adni [48, 70].

5. (Egyebek) Mintegy két évtizede ismert, hogy a kombinatorikus optimalizálás villamosságtani és statikai alkalmazásai közti látszólag formális hasonlóságok mögött -- részben a közös matroidelméleti eszközök miatt -- váratlan új alkalmazási lehetőségek állnak. Emiatt változatlanul vizsgálunk "tisztán" matroidelméleti [86] és bizonyos statikai kérdéseket is [63, 64, 80].

Schaefer Dichotómia-tételének egy paraméteres bonyolultsági megfelelőjét bizonyítjuk. A feladat az, hogy egy pontosan k súlyú változó-behelyettesítést találjunk, amely kielégíti a megadott összes Boole feltételt. Megmutatjuk, hogy attól függően, hogy milyen típusú feltételeket engedünk meg, ez a probléma mindig vagy uniform polinom időben megoldható, vagy $W[1]$ -teljes [55].

Általánosítottuk Wilson egy híres tételét, amiben meghatározták a t - és k -elemű halmazok illeszkedését leíró mátrix rangját [12]. A topológiából ismert Sperner-lemmáról érdekes algoritmikus tulajdonságot sikerült bebizonyítanunk [50, 71]. Hasonlóképp néhány, a geometriában felmerülő algoritmikus kérdéssel is foglalkoztunk [60, 62].

A gráfelméletben régóta vizsgált kérdés, hogy ha egy gráfból csak a csúcsok fokát ismerjük, mikor állítható biztosan, hogy a gráf tartalmaz Hamilton-kört? Több klasszikus eredmény szól erről, de a kérdés teljesen nem megoldott. Azonban sikerült egy sor, eddig nem ismert fokszámsorozatról belátnunk, hogy garantálják a Hamilton-kört [66].

Végül megemlítjük, hogy

(1) 2003-ban került sor Japánban a harmadik japán-magyar diszkrét matematikai szimpóziumra, ahol a négy magyar meghívott előadás egyikét [10] és hat további előadást pályázatunk résztvevői tartottak;

(2) 2003-ban a Discrete Applied Mathematics folyóirat különszámot szentelt a szubmoduláris függvények elméletével kapcsolatos kutatásoknak és ebben Frank András és munkatársai öt cikket publikáltak; továbbá hogy

(3) 2005-ben került sor Magyarországon a negyedik japán-magyar diszkrét matematikai szimpóziumra, ahol négy előadást pályázatunk résztvevői tartottak.