Beszámoló

1. 1. **Determinisztikus iterált függvényrendszerek (IFS) véletlen perturbációi.** Yuval Peres-el (Berkeley, Microsoft) és Boris Solomyakkal (Univ. of Washington) a következőket bizonyítottuk: Tekintünk egy önhasonló véges sok nem feltétlen kontaktív hasonlóságokból álló IFS-t a valós egyenesen, amely átlagosan kontraktív. Akkor, ha ennek invariáns mértékére nem is (vannak ellenpéldák) de ezen rendszer kis véletlen perturbációjára egy valószínűséggel igaz, hogy ha az invariáns mértékre az entrópia/Lyapunov exponens hányados egynél kisebb, akkor az invariáns mérték Hausdorff dimenziója ezen hányadossal egyenlő. Ha az entrópia/Lyapunov exponens hányados egynél nagyobb, akkor pedig az invariáns mérték abszolút folytonos a Lebesgue mértékre. Eredményünket a J. of London Math. Soc-ban publikáltuk.

   T. Jordan-al és M. Pollicottal (Mindketten Univ. of Warwick) a következőket vizsgáltuk: Falconer-nek az Önhasonló iterált függvényrendszerekre attraktorai Hausdorff dimenziójának a kiszámítására használt tétele szerint a Hausdorff dimenziót, legalább is tipikusan, kifejezhetjük egy bonyolult képlettel ha a leképezések normája $\frac{1}{2}$-nél kisebb. Mi egy hasonló állítást bizonyítunk a normára vonatkozó $\frac{1}{2}$-nél kisebb megszorítás nélkül olyan véletlen önhasonló iterált függvény rendszerekre, melyeket úgy kapunk, hogy egy determinisztikus függvényrendszer elemeinek iterálása során minden lépésben hozzáadunk egy akármilyen kicsi véletlen hibát. Továbbá a véletlenül perturbált önhasonló IFS-ek esetén az ergodikus mértékek dimenzióját is kiszámoltuk. Eredményünket a Commun. Math. Phys. folyóiratban publikáltuk.

2. **Véletlen Cantor halmazok algebrai különbsége.** Michel Dekking-el (TU Delft) a valós egyenesen konstruált véletlen Cantor-halmazok algebrai különbségeként előálló halmazokkal kapcsolatban azt vizsgáltuk, hogy igaz-e egy valószínűséggel, hogy amennyiben a halmazok Hausdorff dimenzióinak összege nagyobb mint egy akkor a különbség tartalmaz intervallumot. Beláttuk, hogy ez általában nem igaz de bizonyos speciális esetekben a fenti állítás teljesül. Ennek a problémának a determinisztikus változatát J. Palis vetette fel és azért fontos mert a kérdés természetesen előjön síkbeli diffeomorfizmusok homok-

linikus pontjainak vizsgálata során. A cikkünket Random Structures and Algorithms folyóiratban publikáltuk.

Michel Dekking-el a csoportunkból Székely Balázs és Simon Károly egy közös cikket írunk, amely beadás elött áll. Ebben a véletlen fraktálok algebrai különbségeként előálló halmazok probléma körének egyik neves P. Larsson által írt cikkének a fő eredményében felfedezett hibát javítjuk ki. Ez a cikk ezen témakör első ismert eredménye volt és nagyon sokan hivatkoztak rá. A főeredménye, amely azt állítja, hogy bizonyos véletlen fraktálok különbsége majdnem biztosan tartalmaz intervallumot, rosszul van bizonyítva. Egy körülbelül 30 oldalas cikkben közöljük majd a kijavított bizonyítást.

3. **Sztochasztikus integrálás véletlen bolyongással.** Szabados Tamás és Székely Balázs (mindketten a csoportunk tagjai) a Journal of Theoretical Probability című folyóiratban publikáltak egy a sztochasztikus integrálásnak egy új fajta megközelítését. E munka célkitűzése sztochasztikus integrálásnak a szokásosnál elemibb definiálása egyszerű, szimmetrikus bolyongások felhasználásával. A munka egyik eredménye a klasszikus Ito-Tanaka-formula elemi levezetése.

4. **Átlagosan összehúzó IFS-ek.** A számegyenesen olyan önhasonló IFS-eket tekintünk, melyek nem szükségszerűen kontraktívak, sőt lehet egy olyan közös fixpontja az IFS összes leképezésének, melyben a derivált várható értéke egynél nagyobb. Azt akarjuk megérteni, hogy ebben az esetben a legtermészetesebb invariáns mérték abszolút folytonos-e. A cikkben feltételt adtunk arra az esetre amikor ez nem teljesülhet. Nevezetesen, adtunk egy felső becslést az invariáns mérték Hausdorff dimenziójára. Az eredményünket (szerzők: Simon K. Tóth Hajnal és a csoportunkon kívüli A.H. Fan) a Journal of Stat. Phys. folyóiratban publikáltuk.

5. **Hausdorff dimenzió hiperbolikus attraktorokra.** Az Ergodic Theory and Dynamical Systems folyóiratban publikált eredményünkben (szerzők Simon K. és a csoporthoz nem tartozó F. Hoffbauer, P. Raith mindketten Univ. of Vienna) közösen Michael Yakobsonnak egy nagyon régi kérdésének a megválaszolásán dolgozunk. Ez azzal kapcsolatos, hogy a ax(1-x) sokat vizsgált függvény család természetes két

dimenziós általánosításaként előálló nem invertálható és nem egyenletesen hiperbolikus leképezések attraktoraira hogyan lehet kiszámolni a Hausdorff dimenziót. A problémát megoldottuk arra az esetre, ha a fenti parabolák helyett ún. sátortető leképezések két dimenziós analógjai vannak.

Anthony Manning (University of Warwick) ezen OTKA project és a London Mathematical Society támogatásával három hetet töltött a BME Matematikai Intézetében és ezalatt a következő problémát vizsgáltuk: Egyenletesen hiperbolikus attraktorok Hausdorff dimenzióját hogyan lehet kiszámolni a térben. Ezzel kapcsolatos egy Zhang egy 1995-ös eredménye amely egy ún. sub- additiv nyomás formula segítségével ad felső korlátot a Hausdorff dimenzióra. Mi ennek a sub additiv nyomásnak a tulajdonságait vizsgáltuk és megállapítottuk, hogy az általános esetben lényegesen különbözik a szokásos nyomástól. Eredményünket (Szerzők A. Manning és Simon K.) A Nonlinearity folyóiratban publikáltuk.

6. **Véletlen összegek eloszlásának abszolút folytonossága.** Adott egy $m \geq 2$ természetes szám. Tekintsük a következő véletlen összeget: $Y_\lambda := \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \lambda^k$ ahol a θ_k értékeit a $\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ halmazból veszi fel azonos $\frac{1}{m}$ valószínűséggel minden lépésben mindentől függetlenül. Kérdés milyen λ-ra lesz abszolút folytonos az Y_λ valószínűségi változónak a ν_λ eloszlása. Ennek a problámának egy speciális esete (nevezetesen mikor $m = 2$) volt Erdős Pál egy majdnem 60 évig nyitott kérdése, melyet B. Solomyak válaszolt meg 1995-ben. Mi (Tóth H. és Simon K.) azt láttuk be, hogy Lebesgue majdnem minden $\lambda \in (\frac{1}{m}, 1)$-re $\nu_\lambda \ll \mathcal{L}eb$ teljesül. Ez a fenti Soloymyak tétel általánosítása. Cikkünk a Real Analysis Exchange folyóiratban jelent meg.

7. **Különböző valószínűséggel megkonstruált Bernoulli konvolúciók abszolút folytonossága.** $Y_{\lambda,p} := \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \lambda^k$ ahol a θ_k értékeit a $\{-1, 1\}$ halmazból veszi fel $(p, 1-p)$ valószínűséggel minden lépésben mindentől függetlenül. Legyen $\nu_{\lambda,p}$ az $Y_{\lambda,p}$ eloszlása. Kérdés mikor lesz $\nu_{\lambda,p}$ abszolút folytonos a Lebesgue mértékre? A természetes határt az entropia/Lyapunov exponens hányados adja. Nevezetesen ez a hányados mindig flesőkorlát a Hausdorff dimenzióra tehát ha ezen

hányados egynél kisebb, akkor a $\nu_{\lambda,p}$ eloszlás csakis szinguláris lehet (a Lebesgue mértékre). Peres és Solomyak belátta, hogy amennyiben $p \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ és ez az entropia/Lyapunov exponens nagyobb mint 1, akkor Lebesgue majdnem minden λ-ra $\nu_{\lambda,p} \ll \mathcal{L}eb$. Ezen OTKA projekt keretében Tóth H. kiterjesztette a fenti Peres, Solomyak eredményt azon p-kre, melyek az $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ intervallumon kívül esnek de ezen p esetén csak rész eredményeket ért el. Cikke a Continuous and Discrete Dynamical Systems A-ban jelent meg.

8. **Internet forgalom modellezése multifractal analízissel.** A szerzők: Székely B. és a csoportunkhoz nem tartozó , Trang Dinh Dang, Maricza I., Molnár S. a Stochastic Models című folyóiratban megjelent cikkükben a következőkkel foglalkoztak: Az utóbbi időben a nagysebeségű hálózatok vizsgálatával foglakozó tanulmányokban sokan kimutatták, hogy a hálózati forgalom multifraktális tulajdonságokkal rendelkezik. Számos heurisztikus megfontolásból látható, hogy a multifraktál spektrum, ugyanúgy, mint néhány pénzügyi folyamat esetében, a rendszerre jellemző mennyiség. Ezért hálózat tervezési szempontból és elmételig is nagyon fontos, hogy tudjunk olyan sztochasztikus folyamatokat generálni, ahol a spektrum előre megadott.

   Olyan konstrukciót mutattak meg a dolgozatukban, mely alkalmas az előbb említett célra. A folymatkonstrukció egyik lényegi lépése, hogy megfelelő időátparaméterezést alkalmazunk a frakcionális Brown-mozgás idejére.

   A fő eredményünk olyan időátparaméterező folyamat konstrukciója, melynek Legendre-spektruma egy nagy szabadsággal választható szakasz. Ezt a lineáris spektrumot adó időátparaméterezést használjuk bizonyos feltételek mellett tetszőleges konkáv Legendre-spektrummmal rendelkező folyamat előállítására.

   Konstrukciójukk működőképességét számos statisztikai vizsgálattal támasztjuk alá.

Dr. Simon Károly