OTKA nyilvántartási szḿ: **T 038397** **ZÁRÓJELENTÉS**

A KUTATÁSI TÉMA SZAKMAI ZÁRÓJELENTÉSE

Témavezető neve: **Bezdek András**
A téma cime: **Diszkrét és kombinatórikus geometriai kutatások**
A kutatás időtartama: **4 év (2002-5.) + 1 év hosszabbítás**

Az alábbiakban felsoroljuk a résztvevők (Bezdek András, Csizmadia György, Fejes Tóth Gábor, Heppes Aladár, G. Horváth Ákos, Hujter Mihály Talata István és Tóth Géza) által a támogatott időszak öt éve alatt végzett munkát. Az elért eredmények a diszkrét geometria területére esnek. Jó néhány közülük a konvexitás és a kombinatórikus geometria kérdéseit is érintik. A felsorolás a résztvevők nevének abc sorrendje szerint történik:

1. Bezdek András eredményei

Bezdek András a Marcel Dekker kiadó részére Discrete Geometry című kötetet szerkesztett. A kötet W. Kuperberg 60. születésnapja alkalmából készült. W. Kuperberg munkásságát áttekintő cikket Fejes Tóth Gáborral közösen írták. A kötet tartalmaz egy Bezdek András által összeállított problémagyűjteményt is [B2]. Fejes Tóth Gábor egyik sejtésének Donald Baggett és Bezdek András által adott bizonyítása szintén ebben a kötetben lett publikálva [B1]. A cikkben rövid út problémák azon változatát tárgyalják amikor egy mozaik adott és a határon haladva akarunk két pont összekötéséhez rövid utat biztosító stratégiát találni. Az eljárás egyik következménye adja Fejes Tóth Gábor körök rácsszerű elhelyezésére vonatkozó sejtésének a megol-dását.

A Tarski probléma néven ismert klasszikus eredmény szerint, ha egy kör alakú lemez sávokkal van fedve, akkor a sávok szélességeinek az összege legalább akkora, mint a kör átmérője. Számos általánosítása ismert ennek a problémának. [B4] a következő Bezdek Andrástól származó kérdést vizsgálja: Igaz marad-e Tarski tétele akkor is, ha a sávokkal a körlemeznek csak egy részét, nevezetesen azt a gyűrűt kell csak lefednünk, amit úgy kapunk, hogy a körlemezen a középpontja körül egy elegendően kis kör alakú lyukat vágunk. Ha igen akkor természetesen vetődik fel a kör alakú lyuk sugarának a maximalizálása, vagy annak vizsgálata, hogy a lyuknak szükségképpen a körlemez középén kell-e lenni, ill. hogy hasonló állítás igaz-e kör helyet más konvex tartományra is. [B4]-ben a négyzetlap és a páros oldalú centrálszimmetrikus lemezek esete van megoldva.

Littlewoodtól (1968) származik a következő kérdés: Legfeljebb hány egybevágó, mindkét végén végtelen hosszú körhenger helyezhető el a térben úgy, hogy bármely kettőnek legyen közös érintkezési pontja? Lehetséges hogy a maximum 7? Ez a kérdés a mai napig megválaszolatlan. A szerző 1991-ben Oberwolfachban vázolt egy bizonyítást a felső korlát létezésére. [B5] tartalmazza a részleteket. A korlát több Ramsey szám kombinációjaként fejezhető ki, igy lényegében csak a korlát létezését bizonyítja [B5]. [B6] Ramsey tétel alkalmazása nélkül közelíti meg a kérdést és azt bizonyítja, hogy a hengerek száma legfeljebb 24.

1994-ben amikor Bezdek Károllyal körök sávokkal történő részleges fedését vizsgátuk a következő önmagában is érdekes sejtést fogalmaztuk meg: legyen K az egység kör egy olyan konvex tartomámya amelynek a beírt sugara r. K-t az egységgömb fölé írt félgömbre merőlegesen vetitve olyan tartományt kapunk amelynek területe legfeljebb $r\pi$. Egyenlőség csak akkor lép fel ha K maga egy sáv. Ennek a sejtésnek a bizonyitását [B3] tartalmazza.

A transverzálisok elméletének témakörébe tartozik a következő eredmény: Azt mondjuk, hogy az n-dimeziós tér egység gömbjeinek egy rendszere $T(k)$ tulajdonságú, ha bármely k-elemének van tranzverzálisa. [B7]-ben azt bizonyítjuk be, hogy ha F n-dimenzios egyseggömbök családja azzal a tulajdonsággal hogy bármely ket gömb távolsága legalább $2\sqrt{2+\sqrt{2}} = 3.6955$. Ekkor ha bármely n^2 elemü részhalmaznak van közös tranzverzálisa akkor F-nek is van közös tranzverzálisa.

A [B8] dolgozat olyan euklideszi és hiperbolikus síkbeli ill. gömb felszinen levő pontok sűrű voltát vizsgálja amelyek rendelkeznek azzal a tulajdonsággal hogy bármely három pontjukkal együtt azok beírt körenek a középpontját is tartalmazzák.

A [B9] dolgozat olyan sikbeli ponthalmazok sűrű voltát vizsgálja amelyek rendelkeznek azzal a tulajdonsaggal hogy bármely három pontjaval egyutt azok magasság pontját is tartalmazza. Valójában azt bizonyítjuk be hogy ilyen halmazok A) sűrűek a síkon B) egy derékszögű hiperbola sűrű részhalmazai C) a derekszögű hiperbola egy jól leírható diszkrét részhalmaza.

2. **Fejes Tóth Gábor eredményei**

Fejes Tóth Gábor a Discrete and Computational Geometria folyóirat részére Discrete Geometry című külön kötetet szerkesztett W. Kuperberggel közösen az általuk szervezett, az OTKA és az NSF által közösen támogatott workshop után. A Marcel dekker kiadó kötet jelentetett meg W. Kuperberg 60. születésnapja alkalmából. W. Kuperberg munkásságát áttekintő cikket Fejes

Tóth Gábor Bezdek Andrással közösen írták. E kötetben jelent meg Fejes Tóth Gábornak Bisztriczky Tiborral közösen irt [BF] cikke.

[F3]-ben egy adott körnek 8, 9 ill. 10 körrel történő legritkább fedése kerül meghatározásra.

Azt mondjuk, hogy egy K konvez lemez *"r-fat"* ha a C egységkör tartalmazza, és ő maga tartalmaz egy r-sugarú kört. A közelmúltban Heppes Aladár azt bizonyította be, hogy a fennti egyenlőtlenség a kereszteződés megengedése mellett is igaz, ha K egy "0.8561-fat" ellipszis. [F2]-ben azt bizonyítja be a szerző, hogy a fennti egyenlőtlenség a kereszteződés megengedése mellett akkor is igaz, ha i) K egy "r_0-fat" konvex lemez, ahol $r_0 = 0.933$ vagy ii) K egy "r_1-fat" ellipszis, ahol $r_1 = 0.741$.

[F1] és [F5] felkérésre írt, a tudomáanyterülete áttekintő dolgozat.

[F4]-ben a következő kerül bizonyításra: Tekintsünk a síkon egy R területű konvex tarománnyt és legalább két egybevágó kört, amelyek összterülete t. Legyen F a tartományból a körök által lefedett rész területe. Jelölje $f(x)$ egy egységnyi területű kör és egy vele koncentrikus x területű szabályos hatszög metszetének területét. Akkor $F \leq tf(R/t)$.

3. **Heppes Aladár eredményei**

Szoliditási sejtés. Fejes Tóth László nyomán egy kitöltést (fedést) szolidnak neve-zünk, ha a benne szereplő tartományok bármely véges részhalmaza csak úgy rendezhető át az eredeti kitöltési (fedési) tulajdonság megtartása mellett, hogy a vége-redmény az eredetivel kongruens lesz. 1968-ban kimondott híres sejtése szerint az Archimedeszi félig szabályos mozaikok beírt (körülirt) köreiből álló rendszerek szoliditása csak attól függ, hogy a mozaik csúcsaiban hány cella találkozik. Ha a fokszám 3, akkor az elrendezés szolid, ha nagyobb háromnál, akkor nem. Heppes Aladár egy A. Florian-nal közös dolgozatban számol be [H3] az etéren elért legújabb eredményeikről. Ezzel a sikra és a gömbfelületre vonatkozóan a sejtés maradéktalanul igazolást nyert.

Kitöltések kétféle körrel. Az inkongruens körökkel való kitöltési problémákkal mintegy 50 éve foglalkoznak, de pontos eredmények a közel-egyforma körök esetét kivéve (Böröczky, 65) alig keletkeztek. Heppes Aladár nemrég kifejlesztett módszerével 5 új sugárérték-pár esetében maghatározta az elérhető maximális sűrűséget és ezzel extremálisnak sejtett konfigurációkat jellemzett. Az erről írt dolgozata [H4] megjelenőben van.

Körelhelyezések hatékonysági mértékei, k-szoros telítési sugár. A körelhelyezései vizsgálatok kezdetben a maximális kitöltési (minimális fedési) sűrűség meghatá-rozására irányultak, eleinte feltétel nélkül, később mellékfeltételekkel. Nemrég egyéb hatékony-sági mértékek (pl. a körök között maradó hézagok nagysága, k-szoros telítettség, stb.) vizsgálata is felmerült. (lásd pl. G. Fejes Tóth, W. Kuperberg, Packing and Covering with Convex Sets, in Handbook of Convex Geometry, 843-844). Heppes Aladár két dolgozatában rácsszerű körelhelyezéseket vizsgált [H5]. Bevezette a k-szoros telítési sugár fogalmát és meghatározta az egyszeres illetve a kétszeres telítési sugár és a telítési sűrűség kapcsolatát minden előforduló értékre.

A kitöltési sűrűség helyett más hatékonysági mértéket megközelítést, a fedetlenül hagyott rész területének becslését alkalmazza Heppes Aladár egy vizsgálata, amely különösen bizonyos nem-kongruens tartományok esetében mond lényegesen újat. Ha egy gömbfelületet olyan egyszeresen összefüggő (nem feltétlen kongruens) tartomá-nyokkal töltünk ki, amelyek határa nem görbül befelé jobban, mint egy r-sugarú kör, akkor a fedetlenül maradó részek összterülete legalább $2(n-2)t$, ahol t a három r-sug-arű kör által közrefogott terület n pedig a tartományok darabszáma. Ez a tétel számos esetben pontos értéket ad. A kitöltendő tartomány lehet a teljes gömbnél kisebb is, a határának görbülete a kitöltő tartományokéval ellentétesen korlátozott. Utóbbival analóg tételek érvényesek az euklideszi illetve hiperbolikus sík korlátos részén is. Heppes Aladár korábban meghatározota az elliptikus sík négy egybevágó körrel való legritkább fedését, ennek publikálására most került sor [H1].

Fedés nem-keresztezési feltétel nélkül [H2]. A sík centrálszimmetrikus konvex tartományokkal való legritkább fedésének meghatározása régi keletű probléma. Az eddigi eredmények olyan módszerre támaszkodtak, amely csak akkor eredményes, ha a tartományokról eleve feltesszük, hogy nem keresztezik egymást. Heppes Aladár eredményei szerint "nem nagyon elnyúlt" ellipszisek esetében a sík legritkább fedésének meghatározásánál el lehet tekinteni az u.n. nem-keresztezési feltételtől. Ilyen ellipszisek esetében tehát mellékfeltéttel nélkül is a rácsszerű fedés a leggazdaságosabb.

Mozaikokon értelmezett izoperimetrikus problémák [H6]. Heppes Aladár és Frank Morgan a szabályos hatszögmozaik véges darabjaira vonatkozó izoperimetrikus problémát vizsgálta. Az alapprobléma az, hogy a szabályos hatszögmozaik k számú celláját hogyan kell kiválasztani ahhoz, hogy a cellák együttesének a kerülete minimális legyen. Meghatározták az extremális klasztereket és becslést adtak a nem-merev mozaikok esetére is.

Borsuk-felosztás [H7]. A Borsuk-féle darabolási probléma alapkérdése, hogy ha egy egység átmérőjű, d-dimenziós testet kisebb átmérőjű részekre akarjuk feldarabolni, akkor mi a darabszám (dimenziótól függő) garantálható minimuma. Heppes Aladár és W. Kuperberg a problémának azt a variánsát vizsgálták, amelyben a darabolást u. n. hengeres darabolásra korlátozták. Hengeres feldarabolásról beszélünk, ha az a test valamely $(d-1)$-dimenziós vetületének feldarabolásán alapul olymódon, hogy a test egyes darabjait a vetület darabjaira emelt hengerek határozzák meg. A szerzők kimutatták, hogy hengeres Borsuk-felosztás létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy a test ne legyen állandó szélességű. Ezzel az állandó szélességű halmazok egy eddig ismeretlen jellemzését adták. A darabszámra alsó és felső korlátot is adtak. (Pl. $d = 3$ esetén a 7 részre vágás mindig elegendő.)

Álladó szélességű halmazok jellemzés [H8]. Heppes Aladár és G. Averkov az álladó szélességű halmazok újfajta, kettévágáson alapuló jellemzésével kapcsolatban ért el eredményeket.

Kör, négyzet és szabályos háromszög átmérő-korlátozott fedései [H12]. Többen vizsgálták négyzet, kör és szabályos háromszög fedését adott számú körrel azt követelve, hogy a körök átmérője minél kisebb legyen. Heppes egy rokon problémát vizsgált meg valamennyi olyan esetre, amikor a körök méretére a pontos korlát. Ebben a fedő tartományként bármilyen alak megengedett, de változatlanul átmérőjük csökkentése volt a cél. Valamennyi esetben sikerült tisztázni, hogy a fedő halmazok alakjának feloldása csökkenti-e a darabok átmérőjének maximumát. Sok esetben a maximális átmérő minimumát is meghatározta.

Helly típusú transzverzális problémák [H9] [H10] [H11] [H13] [H14]. A vizsgált transzverzális problémák a Helly tétellel mutatnak rokonságot. Tartományok egy halmazáról azt mondjuk, hogy rendelkezik a $T(k)$ tulajdonsággal, ha bármely k eleméhez található transzverzális, azaz valamennyit metsző egyenes. A vizsgálatok arra irányulnak, hogy mely tartomány-együttesek esetében mely k érték garantálja az összes tartományt szelő egyenes létezését, illetve ez a cél milyen mértékben garantálható. Tipikus eredményként említhető Hadwiger tétele, mely szerint egy konvex tartomány diszjunkt eltoltjaiból álló végtelen sok elemű halmaz esetében $T(3)$ biztosítja a mindent szelő egyenes létezését. Vizsgálataink az euklideszi síkra vonatkoztak és több irányban hoztak eredményt. Heppes Aladár vizsgálta, hogy egy konvex tartomány diszjunkt eltoltjaiból álló véges sok elemű halmaz esetében hogyan függ a halmaz elemszámától az összes halmazt fedő sáv relatív szélessége. Igazolta, hogy ez a Hadwiger fenti tételében szereplő 0-hoz tart [H9]. Körök diszjunkt rendszereire szorítkozott több vizsgálatunk. Egy az irodalomban régen kimondott sejtést megközelítve Heppes Aladár igazolta, hogy diszjunkt d átmérőjű körökből álló $T(3)$ halmaz esetén (amikor tehát bármely három középpont egy d szélességű sávban van) a középpontok halmaza $1.65d$ szélességű sávval mindig lefedhető [H10]. (A sejtett legjobb érték $1.618d$.) Részben a fenti eredményre támaszkodva Heppesnek sikerült igazolnia Katchalski és Lewis 20 éves sejtését, mely szerint diszjunkt egységkörökből álló rendszereknél a $T(3)$ tulajdonság garantálja a $T-2$ tulajdonságot, vagyis azt, hogy van olyan egyenes, amely legfeljebb 2 kör kivételével valamennyit metszi. Előzőleg Kaiser $T-12$ becslése volt a legjobb eredmény. Dolgozatát közlésre benyújtotta [H13].

Új kutatási irányként Bezdek Károly, Bisztriczki Tibor, Csikós Balázs és Heppes Aladár tanulmányozta azt a Helly típusú kérdést, hogy milyen feltételek mellett garantálhatjuk, hogy ha egy egységnyi átmérőjű körökből álló rendszer bármely k eleméhez van a köröket metsző egyenes, akkor az összes körhöz is van ilyen. Belátható, hogy minden k-hoz van olyan d, hogy a fenti Helly-típusú tétel igaz azzal a feltétellel, hogy a középpontok távolsága $> d$. Az ilyen d távolságok infimumaként adódó t_k sorozatnak sikerült pontosan meghatározni néhány kezdő tagját, és bebizonyítottuk a $t_k = O(1/k)$ aszimptotikát [H11], [H14].

4. G. Horváth Ákos eredményei

[Ho1]-ben cikkben két kitérő egyenes normáltranszverzálisát szerkeszti meg a szerző a Poincare féltér modellben és abszolut szerkesztéssel egyaránt, igazolva, hogy a hiperbolikus térben is egyértelműen létezik.

[Ho2] egy rekurziós és egy explicit formulát tartalmaz a másodrendű Reed-Muller kódhoz rendelhető súlyeloszlás függvények kiszámítására.

[Ho3] hiperbolikus sík egyenlőszögű sokszögeivel foglalkozik.

[Ho5] egy a parallelotopok vetuleteirol szolo cikk, amelyet a "Monatshefte fur Mathematik" folyoiratban fogadtak el publikalasra.

5. Hujter Mihály eredményei

Hujter Mihály két megjelenés alatt álló cikke [Hu1, Hu2] a
www.math.bme.hu/ hujter címen olvashatóak, itt a címüket soroljuk fel:

[Hu3] a Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem által használt egyetemi jegyzet. Perfekt gráfok és alkalmazásaik címmel jelent meg. A kéziratban – többek között – a perfekt gráfok geometriai vonatkozásai is részletesen tárgyalva vannak. Nemcsak a lineáris algebrai háttér van részletesen ismertetve, hanem a geometria jellegű alkalmazások is. Sok ábra illusztrálja a módszereket és az alkalmazásokat. A könyv teljes terjedelemben letölthető a http://www.math.bme.hu/˜hujter címről.

Pár éve a szerző és Tuza vezették be a "cograph contraction" gráfok – azaz a 4-pontú út-gráfokat nem tartalmazó gráfokból összehúzással nyerhető gráfok – osztályát, mely osztály a perfekt gráfok között speciális helyet foglal el. A gráfosztály karakterizálását részben Le oldotta meg, eredményét Zverovich es Zverovich fejlesztette. A karakterizációt [Hu4] teszi teljesebbé.

[Hu5] és [Hu6] egy sokdimenziós poliedrikus szita-formula precíz bizonyítással, mely a lineáris programozás dualitás-elméletén és a véges halmazrendszerek elméletén alapul.

6. **Poor Attila eredményei**

Két cikke [P1, P2, P3, P4] megjelenés alatt áll. A doktori disszertáció leadása és védese az egész 2003-as évre kiterjedt. [P2] azzal foglalkozik, hogy ha egy n dimenziós egységkocka egy nyílt gömbpakolását elhagyjuk, akkor a hátramaradó halmaz hausdorff dimenziója mennyire lehet kicsi. Amennyiben n tart a végtelen-hez, akkor ez az érték lineárisan közeledik n-hez, azaz $n - O(\frac{1}{n})$.

Por Attila láthatósági gráfok chromatikus száma és klik-száma közötti összefüggéssel foglalkozott. Wood es Kara-val közösen [P5] példát mutattak olyan láthatósági gráfra melynek klik-száma n és chromatikus száma legalább $exp(lognloglogn)$. Ezenkivül a theta gráfok részleges fedésének komplexitásával is foglalkozott. A Discrete and Computational Geometry folyoirathoz Ricardo Strausz Juancho Montellano közösen benyújtott "Tverberg-type theorems for separoids" c. cikküket [P6] elfogadták közlésre.

7. **Talata István eredményei**

[Ta1]: Bezdek K. és Pach J. 1986-ban azt sejtette, hogy legfeljebb 2^d darab homotetikus példánya helyezheto el egy d-dimenziós centrálszimmetrikus konvex testnek úgy, hogy bármely kettő érintse egymast. Másként fogalmazva, eszerint a sejtés szerint R^d-t akármilyen Minkowski metrikával is látjuk is el, az ebben vett olyan gömbpakolások, amelyekben bármely két gömb érintő , legfeljebb 2^d gömbből állhat-nának. A sejtésnél egy kicsit gyengébb állitást sikerült igazolnom, belátva, hogy legfeljebb $f(d) = (1 + o(1))ed\log(d)2^d$ számú homotetikus példánya helyezhető el tetszőleges d-dimenziós centrálszimmetrikus konvex testnek úgy, hogy bármely kettő érintse egymást (itt $e = 2.71\ldots$ az Euler-szám). Sőt, a bizonyítás müködik nem feltétlenül centrálszimmetrikus konvex testekre is, amennyiben pozitív homotetikus példányait tekintjük ilyen testeknek.

[Ta2]: R^d-ben egy d-dimenziós szimplexnek két olyan diszjunkt lapját, amelyek a szimplex összes csúcsát lefedik, átellenesnek nevezzük. Talata Istvánnak egy képletet sikerült adnia két tetszőleges átellenes lap által meghatározott affin alterek távolságára, emelyben Cayley-Menger típusú determinánsok szerepelnek (azaz olyan determinánsok, melyekben a szimplex élhosszainak a négyzetei az elemek, ill. néhány sorában és oszlopában pedig 0-k és 1-ek állnak). Mindezt általánosította is, hasonló típusú képleteket adva a szimplex bizonyos típusú projekcióinak a térfogatára. Szférikus és hiperbolikus térben belátta, hogy hasonló képletet nem lehet adni, sőt szimplex átellenes lapjainak a távolságát általában nem lehet kifejezni az élhosszak koszinuszainak ill. hiperbolikus koszinuszainak gyökjelekkel bővített algeblai kifejezéseként sem.

[Ta3]: Legyen $m \geq 2$ tetszőleges egész szám. Egy K d-dimenziós konvex test esetén definiáljuk K-nak az m-edik érintési számát (amit jelöljünk

$t(m, K)$-val) úgy, hogy az a legnagyobb olyan n szám, amelyre teljesül, hogy létezik K-nak n eltoltja úgy, hogy ezek közül bárhogy kiválasztva m darabot, mindig van közöttük legalább két érintő. (Megjegyzés: az n eltolt között egymásba nyúlóakat is megengedünk.) Bezdek K., Naszódi és Visy (2002) belátták, hogy $t(m, K) \leq O(m^2)3^d$ általában,ill. $t(m, B) \leq (m-1)3^d$ euklideszi gömbökre. Talata Istvánnak sikerült bizonyos értelemben javítania a becsléseiken, a következő korlátokkal: $t(m, K) \leq O(m^m)2.7145^d$ általában,ill. $t(m, B) \leq (m+k)^k(1+\sqrt{(2)(k+1)/k})^d$ euklideszi gömbökre, ahol $k \geq 1$ tetszőleges egész szám.

[Ta4]-ben egy K d-dimenziós konvex test m-edik érintési számán a K test eltoltjainak egy olyan családjának a minimális számosságát értjük, amelyben bármely m eltolt között van két érintő ($m \geq 2$), és $t(m, K)$-val jelöljük ezt a mennyiséget (megj: az eltoltak közt megengedünk egymásba nyúlást is). Azt bizonyitja be a szerző, hogy a C_d d-dimenziós keresztpolitópokra fennáll $t(m, K) \leq m^3(1.5+\sqrt{2})^{d+o(d)}$.

[Ta5]: Egy K d-dimenziós konvex test $H(K)$ Hadwiger-számán a K eltoltjaival vett pakolásokban előforduló, az egyes eltoltakat érintő többi test (azaz szomszédok) számának lehetséges maximumát értjük. A $H_L(K)$ rács-érintési szám hasonló módon definiálható a rácsszerű pakolásokra vett megszorítással. Zong (1997) bebizonyította a $H(K_1 \times K_2)+1 = (H(K_1)+1)(H(K_2)+1)$ képletet konvex testek direkt szorzataira, abban az esetben, amikor K_1 és K_2 közül legalább az egyik konvex test legfeljebb kétdimenziós. Zong azt sejtette, hogy ha mindkét test elég magas dimenziós, akkor a képlet már nem feltétlenül marad igaz. Igazolom ezt a sejtést, pontosabban tetszőleges $d_1, d_2 \geq 3$ esetére megadok olyan K_1 és K_2 konvex testeket, ahol K_1 d_1-dimenziós és K_2 d_2-dimenziós konvex testek, és Zong képlete nem teljesül rájuk. Ebben a cikkben azt is belátom, hogy minden $d \geq 3$ esetén van olyan K d-dimenziós szigorúan konvex test, amelyre $H(K) \geq \frac{16}{35}(\sqrt{7})^{d-1}$. Ebből következik $H(K)-H_L(K) \geq (\sqrt{7})^{d-o(d)}$, ami a $\max(H(K)-H_L(K)) \geq 2^{d-1}$, $d \geq 3$ (Talata I.: On a lemma of Minkowski, Period. Math. Hungar. 32 (1998), 199-207.) eredményen javít magasabb dimenziós terek esetében (itt a maximumot az összes K d-dimenziós konvex test esetére kell érteni).

[Ta6]: Egy elhelyezésben (azaz pakolásban) két konvex testet szomszédosnak nevezünk, ha azok érintik egymást. Belátom, hogy szabályos oktaéder véges sok eltoltjából álló elhelyezésben (azaz pakolásban) mindig található olyan test, amelynek legfeljebb 9 szomszédja van. Másrészt megmutatom, hogy létezik szabályos oktaéder 146 eltoltjából álló olyan elhelyezés, amelyben mindegyik testnek legalább 9 szomszédja van. Összegezve tehát elmondható, hogy 9 a legnagyobb minimális szomszédszám egy szabályos oktaéder eltoltjainak véges elhelyezéseiben.

8. **Tóth Géza eredményei**

Geometriai gráfnak (topologikus gáfnak) nevezünk egy gráfot lerajzolva a síkra úgy hogy a csúcsoknak pontok felelnek meg, az éleknek pedig a megfelelő pontokat összekötő egyenes szakaszok (görbék).

Az Euler formula közismert és egyszerű következménye hogy egy n csúcsu geometriai illetve topologikus gráfnak, ha az élei nem metszik egymast, legfeljebb $3n-6$ éle van. Ennek az állításnak különböző általánosításait bizonyította Tóth Géza, illetve már ismert általánosításait javította meg társszerzőivel:

[T39]: 1997-ben Agarwal, Aronov, Pach, Pollack és Sharir bizonyítják hogy van olyan C konstans, hogy minden n csúcsu és legalább Cn élű geometriai gráf tartalmaz három paronkén metsző élet. [T39]-ben az kerül bizonyításra, hogy van olyan C' konstans, hogy minden n csúcsu és legalább $C'n$ élű *topologikus* gráf tartalmaz három paronkén metsző élet. Sőt, tetszőleges r természetes számra van olyan C_r konstans, hogy minden n csúcsu és legalább C_rn élű topologikus gráf tartalmaz $r+2$ élet amelyek közül az első kettő metszi egymást is, es a többi r él mindegyikét.

[T26]-ben egy gráflerajzolást egyszerűnek nevezünk, ha az élek görbék, de bármely két görbének legfeljebb egy közös pontja van. A szerzők bevezetik a teljes gráfnak két "kanonikus" egyszerű lerajzolását, és bebizonyítják hogy a teljes n csúcsú gráf bármely egyszerű lerajzolásában található egy $c\log^{1/8} n$ méretű teljes ami az egyik kanonikus módon van lerajzolva.

[T27]-ben a szerzők konstruálnak egy n elemű egyenes elrendezést a síkon, amelyben $cn^{7/4}$ hosszúságú monoton út található. Ez Matousek $cn^{5/3}$-os konstrukcióját javította meg.

[T29]-ben a szerzők bebizonyítják hogy a 3 dimenziós tér pontjai kiszinezhetők 15 szinnel úgy hogy bármely két egységtávolságra levő pont különböző szinű.

[T37]-ben a szerzők bebizonyítják hogy ha egy n csúcsú, $e > c_{kn}$ élű gráfot bárhogy lerajzolunk a sikra, akkor található $k+2$ él úgy, hogy az első kettő metszi egymást, és mind a kettő metszi a másik k élet.

[T38]-ban a szerzők bebizonyítják hogy ha egy n csúcsú, $e > C_{kn}$ élű gráfot bárhogy lerajzolunk a síkra, akkor található $2k$ él úgy, hogy az első k mindegyike metszi a második k mindegyikét.

[T33]-ben a szerzők bebizonyítják hogy ha egy n csúcsú geometriai gráf úgy van lerajzolva hogy nincs 3 hosszu önmagát nem metsző ut, akkor az éleinek a száma legfeljebb $cn\log n$, és ez a korlát nagyságrendileg nem javitható.

[T32]-ben Fary és Hanani tételét általánosítva a szerzők bebizonyítják, hogy ha egy gráf le van rajzolva a síkra x-monoton görbékkel mint élekkel, úgy, hogy bármely kettő páros sokszor metszi egymást, akkor úgy is lerajzolható, hogy a csúcsok x-koordinátája nem változik, az élek szakaszok, és nem metszik egymást.

[T41]: Az Erdős-Szekeres tétel szerint minden n-hez létezik olyan (legkisebb) $f(n)$ hogy $f(n)$ altalanos helyzetű pont között a síkon mindig van n konvex helyzetben. [T41]-ben Tóth es Valtr tovább javitják az $f(n)$-re vonatkozó felső korlátot, bebizonyítják hogy $f(n) <= \binom{2n-5}{n-2} + 1$.

[T42]-ben Tóth Géza és Tardos Gábor tovább általánosította Agarwal, Aronov, Pach, Pollack es Sharir eredményét és bebizonyította hogy ha egy n csúcsú gráf lerajzolható úgy hogy nincs $k+k+k$ éle, amelyek közül bármely két különböző csoportban levő él metszi egymást, akkor legfeljebb $C_k n$ éle van.

[T43]-ben Jan Kyncl, Pach Janos és Tóth Géza bebizonyította hogy n piros es n kék, konvex helyzetben levő pont között a síkon mindig van egy önmagát nem metsző alternaló (piros-kék-piros-...) út amelynek a hossza legalább $n + c\sqrt{\frac{n}{\log n}}$. Konstruáltak egy példát ahol a leghosszabb ilyen út is legfeljebb $\frac{4}{3}n + c'\sqrt{n}$ hosszú.

[T44, T50]: Egy G gráf metszési száma, $cr(G)$, a legkevesebb él-metszés száma, amivel G lerajzolható. Pach János és Tóth Géza bebizonyitották hogy ha egy gráf lerajzolható a tóruszra metszés nélkül, és a maximális fokszáma d, akkor a sik-metszési száma legfeljebb cdn vagyis lineáris. Erősebb és altalánosabb változatot is bizonyítottak, ahol a tórusz helyett tetszőleges iranyítható felület szerepelhet, és a fokszámokra vonatkozó korlátozást is kiküszöbölték. Ezeket az eredményeket Böröczky Károly, Pach János és Tóth Géza tovább általánosította nem irányítható felületekre.

[T45, T48]: Egy sikbeli C halmazt fedés-felbonthatónak hívunk ha létezik olyan k szám, hogy minden, a C eltoltjaiból álló k-szoros fedés felbontható két (legalább egyszeres) fedésre. Pach 1986-ban bebizonyította hogy a középpontosan szimmetrikus konvex sokszögek fedés-felbonthatóak. Tóth Géza és Tardos Gábor ezt általánosítva belátta hogy minden háromszög, konvex sokszög fedes-felbonthato. Pach János, Tardos Gábor és Tóth Géza azt vizsgálták hogy milyen halmazok nem fedés-felbonthatóak. Többek között bebizonyították hogy a konkáv négyszögek nem fedés-felbonthatóak. Vizsgálták a kérdés duális változatát is, és olyan halmazrendszereket is, amelyek nem egy halmaz eltoltjaibol állnak.

[T46]-ban Adrian Dumitrescu, Pach János és Tóth Géza, Brass sejtését megcáfolva, minden n-re konstruált olyan n pontú halmazt amely $cn \log n$ üres (a többi pontot nem tartalmazó) egybevágó háromszöget határoznak meg. Itt n-nel maga a háromszög is változik. Elképzelhető hogy csak lineárisan sok ilyen háromszög lehet ha egy rögzített háromszöggel kell egybevágonak lenniük. Ezt az állítást sikerult belátni tompaszögű háromszögekre.

[T47]: Egy G gráf metszási száma, $cr(G)$, a legkevesebb él-metszés száma, amivel G lerajzolható. Egy lerajzolásban három él nem mehet át egy ponton, illetve ha mégis, akkor a metszéspontokat multiplicitással számoljuk. Közismert, hogy egy n csúcsú, $e \geq 4n$ élű gráf metszési száma $cr(G) \geq ce^3/n^2$ és ez a korlát nagyságrendileg pontos. Sharir és Rote kérdezték hogy mennyiben módosul ez a korlát ha a metszéspontokat nem multiplicitással számoljuk. Tehát a degenerált metszési szám $deg - cr(G)$, a legkevesebb metszéspont száma, amivel G lerajzolható. Pach János és Tóth Géza bebizonyították hogy a helyzet egészen más mint a szokásos metszési számnal. Minden $e \geq 4n$ élű gráfra $deg - cr(G) \geq ce$, és ez a korlát nagyságrendileg pontos. Ha viszont kikötjük hogy barmely két él legfeljebb egyszer metszheti egymást, akkor sokkal jobb alsó korlát érvényes, $deg - cr(G) \geq ce^4/n^4$. Ez a korlát valószínűleg nem pontos.

[T49]: Ismert, (N. Alon, J. Pach, R. Pinchasi, R. Radoicic, M. Sharir) hogy n sikbeli, korlátos fokú algebrai görbe közül mindig választható két cn méretű részhalmaz, A és B, azzal a tulajdonsággal hogy vagy (i) bármely A-beli és B-beli görbe metszi egymást, vagy (ii) bármely A-beli és B-beli görbe diszjunkt. Pach János és Tóth Géza bebizonyitották hogy az állítás nem teljesül általános síkbeli görbékre; mutattak olyan n sikbeli görbéből álló halmazt, amelynek nincs két cn méretű részhalmaza, A és B a fenti tulajdonsággal.

[T51]-ben Keszegh Balázs, Pálvölgyi Dömötör, Pach János és Tóth Géza bebizonyitották hogy ha egy gráf maximális fokszáma 3, akkor lerajzolható szakaszokkal mint élekkel úgy, hogy az élek legfeljebb 5 különböző irányba mutatnak, és semelyik él nem megy át egy csúcson. Korábban Pálvölgyi és Pach bebizonyitották hogy ha a maximális fokszám 5, akkor már nem elég korlátos sok irány. Továbbra is nyitott az az eset, amikor a maximális fokszám 4.

9. **A résztvevők publikációi**

B1 D.R. Baggett and A. Bezdek, *On a shortest path problem of G. Fejes Tóth* in Discrete Geometry by Marcel Dekker Inc. (ed.: András Bezdek). (2002), 19–26.

B2 A. Bezdek, *Open problems* in Discrete Geometry by Marcel Dekker Inc. (ed.: András Bezdek). (2002), 447–458.

B3 A. Bezdek On a generalization of Tarski's plank problem Accepted in 2006 in the Special issue (dedicated to L. Fejes Toth) of the J. of Discrete and Computational Geometry (edited by J. Pach and I. Barany)

B4 A. Bezdek, *Covering an annulus by strips*, Discrete Comput. Geom. 30:177-180 (2003) pp. 177-180.

B5 A. Bezdek, *a Ramsey-type bound on the number of mutually touching cylinders* Rev. Romaine Math. Pures Appl. 2005, 50, 455-460.

B6 A. Bezdek, *On the number of mutually touching cylinders* Combinatorial and Computational Geometry MSRI publication, Cambridge 2006, 121-129.

B7 G.Ambrus, A.Bezdek and F.Fodor, A Helly type transversal theorem for n-dimensional unit balls Arc. Math. 86 (2006) 470-480

B8 A. Bezdek and T. Bisztriczky, Incenter iterations in the plane and on the sphere (accepted in 2006 in the Bambah's Birthday Festschrift edited by R. Hansgill)

B9 G. Ambrus and A. Bezdek On iterated processes generating dense point sets Periodica MAthematica Hungarica Vol. 53 (1-2), 2006, pp 1-18

B10 G. Ambrus and A. Bezdek Incenter iterations in the space J. of Computational geometry submitted 2006

BF T. Bisztriczky and G. Fejes Tóth, *The Erdős-Szekeres problem for planar points in arbitrary position* in Discrete Geometry by Marcel Dekker Inc. (ed.: András Bezdek). (2002), 19–26.

F1 G. Fejes Tóth: Packing and covering, Handbook on Discrete and Computational Geometry, second edition, E.J. Goodman and J. O'Rourke eds., CRC Press (2004), 25-52

F2 G. Fejes Tóth: Covering with fat convex discs, Discrete and Computational Geometry, 34, 105-123, 2005

F3 G. Fejes Tóth: Covering a circle by eight, nine, or ten congruent circles, Combinatorial and Computational Geometry, eds. Jacob E. Goodman, János Pach and Emo Welzl, MSRI Publications, Cambridge, 361-375, 2005

F4 G. Fejes Tóth: Best partial covering of a convex domain by congruent circles of a given total area, Discrete and Computational Geometry, közlésre elfogadva

F5 G. Fejes Tóth: Covering with convex bodies, Proceeidings of the conference on Discrete Geometry and Number Theory in honour of Professor R.P. Bambah, Chandigarh (2005), R.J. Hans Gill ed., Indian Math. Soc., közlésre elfogadva

H1 A. Heppes : *Az elliptikus sík legritkább fedése négy egybevágó körrel,* Mat Lapok, elfogadva (2002 okt.)

H2 A. Heppes: *Covering the plane with fat ellipses without non-crossing assumption,* Disc. Comput. Geom, megjelenés alatt, kefe 2003,jan. (hivatkozással aT030012-re).

H3 A. Florian and A. Heppes, *On the non-solidity of some packings and coverings with circles*, megjelenőben a Kuperberg kötetben (Marcel Decker) (hivatkozással a T030012-re és T037752-re)

H4 A. Heppes, *Some densest two-size packngs in the plane*, DCG kötet (Am-Hung Workshop) (hivatkozással a T030012-re és T037752-re) megjelenőben...

H5 *A. Heppes, Expandability radius versus density of a lattice packing*, Periodica Math. Hungar., 45(2002/1-2) 65-71. (hivatkozással aT030012-re és T037752-re)

H6 A. Heppes, F. Morgan, Planar clusters and perimeter bounds, Philosophical Magazine 83/12 (2005), 1333-1345.

H7 A. Heppes, W. Kuperberg
Cylindrical partitions of convex bodies, in Combinatorial and Discrete Geometry (Eds. J.E.Goodman, J. Pach nad E. Welzl), MSRI 52, 2005 399-407.

H8 A. Heppes, G. Averkov Constant Minkowskian width in terms of boundary cuts Rev. Roumaine Math. Pures 50 (2005) 5-6, 423-429, ("Zamfirescu 60")

H9 A. Heppes, The width of the transversal strips of T(3) families in the plane Discr. Comput. Geom. 34 (2005) 455-461.

H10 A. Heppes, New upper bound on the transversal width of T(3)-families of discs Discr. Comput. Geom. 34 (2005) 463-474.

H11 K. Bezdek, T. Bisztriczky, B. Csikós, A. Heppes On the transversal Helly numbers of disjoint and overlapping discs Archiv d. Math. 87 (2006), 86-96.

H12 A. Heppes, Covering a planar domain with sets of smaller diameter. ("Bezdek K. 50" ed. F Fodor) Periodica Math. Hungar. 53 (2006), 157-168.

H13 (H) A. Heppes, Proof of the Katchalski-Lewis transversal conjecture for T(3)-families of congruent discs, Discr. Comput. Geom. (leadva, 2005. jan)

H14 (I) A. Heppes, Near-transversals in moderately overlapping T(3)-families of congruent discs, Discr. Comput. Geom. (leadva, 2006. okt.)

Ho1 G. Horváth Ákos: *Skew lines in hyperbolic space*, Per.Poly. ser. Mech. Eng.)

Ho2 G. Horváth Ákos: *On the second order Reed-Muller code*, Per.Poly. ser Mech. Eng.

Ho3 G. Horváth Ákos: *Bisectors in 3-space*, Beitrage fur algebra and Geometry.

Ho4 A. G. Horváth, I. Vermes *Polygons with equal angles in the hyperbolic plane.* Studies of the University of Zilina **16/1** (2003) 47–51.

Ho5 G. Horváth Ákos, *On the connection between the projection and the extension of a parallelotope.* elfogadva a Monatshefte fur Mathematik folyoiratban.

Hu1 Hujter Mihály, *An improved online algorithm for strip packing by flexible boxes* NMCM2002, An Euro Conference on Numerical Methods and Computational Mechanics, July 15-19, 2002, Miskolc, Hungary (Edited by A. Galántai et al.) pp. 119-120. HU ISBN 963 661 535 7

Hu2 Hujter Mihály, *Improving a lower bound for online strip packing with modifiable boxes* Proceedings of the microCAD 2002 International Scientific Conference, 7–8 March 2002. Miskolc, Egyetemváros, Hungary Volume D: Basic Engineering Sciences Editors: L. Lehoczky and L. Kalmár ISBN 963 661 515 2 ISBN 963 661 519 5 pp. 1–5.

Hu3 M. Hujter, *Perfekt gráfok és alkalmazásaik* könyv, egyetemi jegyzet Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem (Aula nyomda) Budapest 2003.

Hu4 M. Hujter, *Caracterizing cograph contractions*, Eurocomb 03 Konferencia Prága, 2003. szeptermber 8-12 (Kézirat).

Hu5 J. Bukszár, R. Henrion, M. Hujter and T. Szántai, *Polyhedral Inclusion-Exclusion*, Weierstrass Institute Berlin, Preprint No. 913, 2004. The paper can be found at http://www.wias-berlin.de/publications/preprints/913/

Hu6 J. Bukszár, R. Henrion, M. Hujter and T. Szántai, *Polyhedral Inclusion-Exclusion*, SPEPS (Stochastic Programming E-Print Seriers), 2004-17. The paper can be found at http://hera.rz.hu-berlin.de/speps/

P1 Izabella Jagos, György Kiss and Attila Pór: *On the intersection of Baer subgeometries of* $PG(n, q^2)$, (2003) pp.1-11,(elfogadva)

P2 Attila Pór and Pavel Valtr: *Partitioned version of the Erdős-Szekeres theorem for convex bodies*, Discrete and Computational Geometry, (2002) pp.1-18 (elő készületben)

P3 A. Pór *On edge-antipodal polytopes*, Periodica (benyújtva).

P4 A. Pór *On the Hausdorff dimension of the residual set of a sphere packing*, Journal of the London Mathematical Society (benyújtva).

P5 Kára, Jan and Pór, Attila and Wood, David R., On the chromatic number of the visibility graph of a set of points in the plane, Discrete Comput. Geom., Vol. 3, 2005, no.3, pp. 497–506,

P6 J. Fiala, , J. Kratochvíl and A. Pór, On the computational complexity of partial covers of theta graphs, Proceedings of GRACO2005, Electron. Notes Discrete Math., Vol. 19, 2005, pp. 79–85 (electronic), Elsevier, Amsterdam

Ta1 Talata, I., *On arrangements of pairwise touching balls in Minkowski metrics*

Ta2 Talata, I., *A distance formula for opposite faces of a simplex*

Ta3 Talata, I., *Upper bounds for generalized touching numbers of convex bodies*

Ta4 Talata, I., *On generalized touching numbers of crosspolytopes*, Studies of the Univ. of Zilina, Vol. 16 (2003), 99-106.

[Ta5] Talata I.: On Hadwiger numbers of direct products of convex bodies, in Combinatorial and Computational Geometry, ed. by J. E. Goodman, J. Pach and E. Welzl (MSRI Publications Vol. 52), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005, 517-528.

[Ta6] Talata I.: A legnagyobb minimális szomszédszám egy oktaéder eltoltjainak véges elhelyezéseiben, Tudományos Közlemények 2006, Szent István Egyetem Ybl Miklós Műszaki Főiskolai Kar, 122-125.

T20 A. Dumitrescu, G. Tóth: *Ramsey-type results for unions of comparability graphs,* Proceedings of the 11th Canadian Conference on Computational Geometry, 1999, 178-181. Also in: Graphs and Combinatorics **18** (2002) 245-251.

T26 J. Pach, J. Solymosi, G. Toth: *Unavoidable configurations in complete topological graphs*, Discrete and Comput. Geometry 30 (2003) 311-320.

T27 R. Radoičić, G. Tóth: *Monotone paths in line arrangements*, Proceedings of the 16th Annual ACM Symposium on Computational Geometry 2001, 312-314. Also in: Computational Geometry: Theory and Applications **24** (2003), 129-134.

T28 J. Pach, G. Tóth: *The string graph problem is decidable,* Lecture Notes in Computer Science **2265**, Spinger–Verlag, 2001, 247-260. Also in: Discrete and Computational Geometry **28** (2002), 593-606.

T29 R. Radoičić, G. Tóth: *Note on the chromatic number of the space,* in: Discrete and Computational Geometry (S. Basu et al., eds.), Algorithms and Combinatorics **25**, Springer–Verlag, Berlin, 2003, 695-698.

T30 J. Spencer, G. Tóth: *Crossing numbers of random graphs,* Random Structures and Algorithms **21** (2002), 347-358.

T31 J. Pach, G. Tóth: *How many ways can one draw a graph?* in Graph Drawing (G. Liotta, ed.), Lecture Notes in Computer Science **2912**, Springer-Verlag, Berlin, 2004, 47–58. Also in: Combinatorica **26** (2006), 559-576.

T32 J. Pach, G. Tóth: *Monotone drawings of planar graphs,* Algorithms and Computation (P. Bose, P. Morin, eds.) Lecture Notes in Computer Science **2518**, Springer-Verlag, Berlin, 2002, 647–653.

T33 J. Pach, R. Pinchasi, G. Tardos, G. Tóth: *Geometric graphs with no self-intersecting path of length three,* Graph Drawing (M. T. Goodrich, S. G. Kobourov, eds.), Lecture Notes in Computer Science **2528**,Springer-Verlag, Berlin, 2002, 295–311.

T34 G. Tóth: *Ramsey-type theorems and exercises* (in Hungarian), in: New Mathematical Mosaic (A. Hraskó, ed.), Typotex, Budapest, 2002, 211-221.

T35 J. Pach, R. Radoičić, G. Tardos, G. Tóth: *Improving the Crossing Lemma by finding more crossings in sparse graphs,* Proceedings of the 19th Annual ACM Symposium on Computational Geometry 2004, 68-75. Also in: Discrete and Computational Geometry **36** (2006), 527-552.

T36 J. Pach, G. Tóth: *Note on conflict–free colorings* in: Discrete and Computational Geometry (S. Basu et al., eds.), Algorithms and Combinatorics **25**, Springer–Verlag, Berlin, 2003, 665–672.

T37 J. Pach, R. Radoičić, G. Tóth: *Relaxing planarity for topological graphs* in: Discrete and Computational Geometry (J. Akiyama, M. Kano, eds.), Lecture Notes in Computer Science **2866**, Springer-Verlag, Berlin, 2003, 221–232. Also in: More Sets, Graphs and Numbers, (E. Győri, G. O. H. Katona, L. Lovász, eds.), Bolyai Soc. Math. Studies **15**, J. Bolyai Math. Society, Budapest, 2006, 285-300.

T38 J. Pach, R. Pinchasi, M. Sharir, G. Tóth: *Topological graphs with no large grids* Special Issue dedicated to Victor Neumann-Lara, Graphs and Combinatorics **21** (2005), 355-364.

T39 J. Pach, R. Radoičić, G. Tóth: *A generalization of quasi-planarity* in: Towards a Theory of Geometric Graphs, (J. Pach, ed.), Contemporary Mathematics **342**, AMS, 2004, 177-183.

T40 J. Pach, G. Tóth: *Disjoint edges in topological graphs* Lecture Notes in Computer Science **3330**, Springer-Verlag, Berlin, 2005, 133-140.

T41 G. Tóth, P. Valtr: *The Erdős-Szekeres theorem, upper bounds and generalizations* Discrete and Computational Geometry – Papers from the MSRI Special Program (J. E. Goodman et al, eds.) MSRI Publications **52** Cambridge University Press, Cambridge (2005), 557-568.

T42 G. Tardos, G. Tóth: *Crossing stars in topological graphs,* Japan Conference on Discrete and Computational Geometry 2004, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, Berlin, (accepted)

T43 J. Kynčl, J. Pach, G. Tóth: Long alternating paths in bicolored point sets, Graph Drawing (J. Pach, ed.), Graph Drawing 2004, (J. Pach, ed.), Lecture Notes in Computer Science **3383**, Springer-Verlag, Berlin, 2005, 340-348.

T44 J. Pach, G. Tóth: *Crossing numbers of toroidal graphs,* Graph Drawing 2005, Lecture Notes in Computer Science **3843**, Springer-Verlag, Berlin, 2006, 334-342, Also in: Topics in discrete mathematics, Algorithms Combin., **26**, Springer, Berlin, 2006, 581–590.

T45 G. Tardos, G. Tóth: *Decomposing multiple coverings with triangles,* Discrete and Computational Geometry, accepted

T46 A. Dumitrescu, J. Pach, G. Tóth: *The maximum number of empty congruent triangles determined by a point set,* Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées **50**, (2005), 613-618.

T47 J. Pach, G. Tóth: *Degenerate crossing numbers,* Proceedings of the 22nd Annual ACM Symposium on Computational Geometry 2006, 255-258. Also in: Discrete and Computational Geometry, accepted.

T48 J. Pach, G. Tardos, G. Tóth: *Indecomposable coverings,* in: The China–Japan Joint Conference on Discrete Geometry, Combinatorics and Graph Theory (CJCDGCGT 2005), Lecture Notes in Computer Science, Springer, submitted.

T49 J. Pach, G. Tóth: *Comment on Fox News,* Geombinatorics **15**, (2006), 150-154.

T50 K. Böröczky, J. Pach, G. Tóth: *Crossing number of graphs embeddable in some other surface,* International Journal of Foundations of Computer Science, Special Issue on Graph Drawing **17**, (2006), 1005-1017.

T51 B. Keszegh, J. Pach, D. Pálvölgyi, G. Tóth: *Drawing cubic graphs with at most five slopes,* Graph Drawing 2006, Lecture Notes in Computer Science