Csoportok és reprezentációik
az OTKA T038059 pályázat zárójelentése

A kutatás eredményei

Kutatásaink a csoportelmélet számos részterületére terjedtek ki, sőt az algebra más ágainak a csoportelmélettel érintkező kérdéseit is vizsgáltuk. Az alábbiakban összefoglaljuk az elért eredményeket.

Végtelen csoportok esetében sokat vizsgált kérdés a részcsoport-növekedés problémája, azaz annak aszimptotikus meghatározása, hogy a csoportban hány legfeljebb n indexű részcsoport van. A [2] dolgozatban korlátot adtunk lokális gyűrűk felett értelmezett Chevalley csoportok részcsoport-növekedésére. Ezt az eredményt alkalmaztuk pozitív karakterisztikájú globális testek feletti aritmetikai csoportok kongruenciarészcsoport-növekedésének meghatározására. Speciális esetként választ adtunk Lubotzky egy kérdésére, kimutatva, hogy $n \geq 3$ esetén $\mathrm{SL}_n(F_p[t])$ részcsoport-növekedése $n^{\log n}$ típusú.

B. H. Neumann még 1937-ben konstruált kontinuum sok páronként nem izomorf, végesen generált csoportot. Ezt a módszert általánosítva a [32] dolgozatban a részcsoportnövekedéssel kapcsolatos problémákat oldottunk meg. Melléktermékként új példákat találtunk olyan csoportokra, amelyeknek izomorf a pro-véges lezárásuk (ez a kérdés Grothendiecktól származik).

Beláttuk, hogy ha egy permutációcsoportban különböző véges halmazoknak különböző a stabilizátoruk, akkor a csoport nem teljesít semmilyen azonosságot. Abban az esetben, ha topologikus csoporttal van dolgunk, akkor az is következik, hogy a csoport véletlenszerűen választott elemei 1 valószínűséggel szabad csoportok generálnak [1].

A [3] dolgozatban a Hausdorff-dimenzió segítségével elemeztük a gyökeres fák automorfizmuscsoportjának struktúráját. Ezáltal választ adtuk Turán Pál egy régi kérdésére és bebizonyítottuk Sidki, illetve Shalev egy-egy sejtését.

Tanulmányoztuk a klasszikus csoportok Borel- és Sylow-részcsoportjainak karaktereit [40]. Ha a q elemű alaptest p karakterisztikája páratlan, akkor bizonyítottuk, hogy a p-Sylow részcsoport irreducibilis reprezentációinak dimenziói q-hatványok. A 2 karakterisztikájú esetben ez nem mindig teljesül. A Borel-részcsoportról kimutattuk, hogy bizonyos kivételektől eltekintve M-csoport, azaz karakterei monomiálisak. Az irreducibilis reprezentációk dimenziói ebben az esetben $q^r(q-1)^s 2^k$ alakúak. Az eredmények egy részét sikerült kiterjeszteni csoportok egy szélesebb osztályára, nevezetesen a DN-algebrák egységcsoportjaira [21].

Teljes leírását adtuk azoknak a moduláris csoportalgebráknak, melyek Lie-algebraként tekintve nilpotensek és a nilpotencia-indexük maximális, azaz $|G'|+1$ [13]. Ezt a kutatási irányt folytatva meghatároztuk azokat a moduláris csoportalgebrákat is, amelyeknek a nilpotencia-indexe a következő legmagasabb érték, azaz $|G'|-p+2$ [11], [7].

Korábbi munkánkat folytatva meghatároztuk azokat a G véges p-csoportokat, melyeknek KG csoportalgebrájában található filtrált multiplikatív bázis [6]. Szintén a csoportalgebrák körében leírtuk azokat az eseteket, amikor a csoportalgebra szimmetrikus egységei valamilyen azonosságnak eleget tesznek [8].

A [10] dolgozatunk a híres Zassenhaus sejtéssel foglalkozik, mely szerint egy véges csoportnak az egész számok gyűrűje feletti csoportgyűrűjében minden véges rendű egység konjugált valamely csoportelemhez a racionális test feletti csoportalgebrában. Luthar és Passi módszerét alkalmazva kimutattuk például, hogy a sejtés igaz a háromdimenziós krisztallográfiai pontcsoportokra, illetve a $PSL(2,p)$ csoportokra a sejtésnek egy p-variációját fogalmaztuk meg.

Vizsgáltunk különféle krisztallográfiai csoportokat is [9]. Többek között megmutattuk, hogy végtelen sok nem-izomorf olyan felbonthatatlan torziómentes krisztallográfiai csoport létezik, amelyeknek a holonómia csoportja az A_4 alternáló csoport.

A [12] cikkben a p-adikus számtest egy elágazó bővítése additív csoportjának a p elemű ciklikus csoporttal vett csoport-bővítéseit tekintettük át.

A [30] dolgozatban olyan csoportelméleti kérdéseket vizsgáltunk, amelyeket bizonyos analóg gyűrűelméleti eredmények inspiráltak. Meghatároztuk mindazokat a feloldható csoportokat, amelyekben $[[A,B],C]=[A,[B,C]]$ tetszőleges normálosztókra teljesül. Példát mutattunk arra, hogy általában ez a tulajdonság normálosztókra nem öröklődik. Olyan végtelen csoportot is konstruáltunk, amelyben bármely két normálosztóra $[A,B]=A\cap B$ teljesül, de ugyanez már nem igaz a csoport egy alkalmas normálosztójában.

Egy csoportot "capable" csoportnak neveznek, ha előáll egy csoport centrum szerinti faktoraként. Megmutattuk, hogy ilyen csoportokra $|G:\mathbf{Z}(G)|\leq|G'|^k$, ahol $k=c\log_2(|G'|)$ és $c=2$. Ez a becslés egyrészt erősebb, mint Isaacs egy korábbi eredménye, másrészt pedig a c konstanstól eltekintve tovább már nem javítható [31].

Több dolgozatot készítettünk speciálisan beágyazott részcsoportokkal kapcsolatban. Ezen az úton újfajta jellemzéseket adtunk például olyan szuperfeloldható csoportokra, amelyekben a normálosztó reláció tranzitív (úgynevezett T-csoportok), illetve amelyeknek minden Sylow részcsoportja kommutatív [18]. Vizsgáltuk azokat a csoportokat, amelyekben az általánosított Fitting részcsoport Sylowjainak maximális részcsoportjai mind S-kvázinormálisan beágyazottak a csoportban [4], illetve amelyekben (duális módon) az általánosított Fitting részcsoport prímrendű (azaz minimális) részcsoportjai S-kvázinormálisak [5].

A csoportok általánosításai az úgynevezett „loop"-ok, ahol az axiómák közül kihagyjuk az asszociativitást. Ezeknek a struktúráknak a tanulmányozása geometriai motivációjú. Vizsgáltuk azokat a loopokat, amelyeknek a belső permutációi (azaz a jobboldali és a baloldali szorzások által generált permutációcsoportban az egységelemet fixen hagyó permutációk által alkotott részcsoport) kommutatív [20]. Hatvan évvel ezelőtt Bruck megmutatta, hogy a 2 nilpotenciaosztályú loopok belső permutációinak csoportja kommutatív, és felvetette a probléma megfordítását. A [14] dolgozatban olyan loopokat vizsgáltunk, amelyeknél a baloldali transzlációk halmaza zárt a konjugálásra. Ilyen loopok esetében megmutattuk, hogy ha a belső permutációk csoportja kommutatív, akkor a loop nilpotencia osztálya 2 [17]. Azzal a kérdéssel is foglalkoztunk, hogy mely Abel-csoportok lehetnek loopok belső permutációcsoportjai [19], [15]. Ezeknek a kutatásoknak a betetőzéseként sikerült ellenpéldát találnunk Bruck régóta nyitott problémájára, nevezetesen megadtunk egy olyan 2^7 elemű loopot, amelyre a belső permutációk csoportja kommutatív, de a loop nilpotencia osztálya 3 [16].

A csoportelmélet univerzális algebrai alkalmazásainak keretében az általunk bevezetett öröklődő, illetve hatvány-öröklődő kongruenciaháló fogalmával foglalkoztunk. Operátorcsoportokat használva véges moduláris hálók egy viszonylag nagy varietásába tartozó hálókat sikerült véges algebrák kongruenciahálójaként reprezentálnunk [22]. Ugyanakkor John Snow kérdésére válaszolva az M_3 hálónak olyan kongruencia-reprezentációját találtuk a Higman–Sims csoport segítségével, ami nem hatvány-öröklődő [28].

Szintén az univerzális algebrai alkalmazások sorába tartozik az a munkánk [29], amelyben feltártuk a Rosenberg által leírt maximális klónok és az O'Nan–Scott tétel által jellemzett maximális permutációcsoportok közötti kapcsolatokat.

Új témaként kezdtünk foglalkozni az algebrai problémák bonyolultságának tanulmányozásával. A [33] dolgozatban a számítástudományban alapvető jelentőségű *constraint satisfaction problem* vizsgálatával kapcsolatban igazoltuk, hogy ez polinomiálisan ekvivalens egy könnyen megfogalmazható algebrai bonyolultsági kérdéssel. Alkalmazásképpen megmutattuk, hogy a kételemű test fölötti 2×2-es mátrixokra a szóprobléma coNP-teljes.

Vizsgáltuk a szóprobléma eldönthetőségét véges csoportokra is. Bebizonyítottuk, hogy nem feloldható véges csoportok esetén az azonosság-ellenőrzés problémája NP-teljes [24]. A [23] dolgozatban bebizonyítottuk, hogy bizonyos metaciklikus csoportokra az azonosság-ellenőrzés problémája könnyű. Ennek során megválaszoltuk Klima, illetve Goldmann és Russel egy kérdését: az egyenlet-megoldhatóság problémája az S_3 csoportra P-beli. Véges félcsoportok fölötti kifejezéseket is vizsgáltunk bonyolultságelméleti szempontból. A teljesen 0-egyszerű félcsoportok osztályára karakterizáltuk a termekre és polinomokra vonatkozó feladatok bonyolultságát [34]. Befejeztük az ún. termsigma probléma bonyolultságának leírását véges mátrixgyűrűkre. A [36] dolgozatban a véges gyűrűk fölötti kifejezések egyenlőségét eldöntő algoritmusok bonyolultságával foglalkoztunk. A korábbi vizsgálatok teljessé tételéhez a 2- és a 3-elemű test fölötti 2×2-es mátrixgyűrűk vizsgálata hiányzott. (Ezekben az esetekben az invertálható mátrixok csoportja feloldható, a többi esetben viszont nem — a korábbi eredmények erre alapoztak). Egy gráfelméleti probléma interpretációjának segítségével azt sikerült megmutatni, hogy már a mátrixok félcsoportjára vonatkozó azonosság-probléma is NP-teljes. A [37] dolgozatban megválaszoltuk Lawrence és Willard egy kérdését: Igazoltuk, hogy a 2 elemű test fölötti kétszer kettes mátrixgyűrűre az azonosságellenőrzés problémája coNP-teljes.

Aszimptotikus becslést adtunk az ötelemű Brandt-félcsoport által generált varietás szabad spektrumának logaritmusára [25].

A [35] dolgozatban egy csoportelméleti szimmetria feltételnek eleget tevő gyűrűosztályt írtunk le. Igazoltuk, hogy ezen gyűrűk radikálja nilpotens, és a szerintük vett faktor véges.

Véges részbenrendezett halmazokkal kapcsolatos vizsgálatainkban [26] karakterizáltuk azokat a részbenrendezett halmazokat, amelyeken definiálható monoton majdnem egyhangúsági függvény (azaz olyan, amelyre $f(x,\ldots,x,y,x,\ldots,x)=x$ bármely pozícióban is legyen az y). A részbenrendezett halmaznak itt megjelenő tulajdonságát abszolút összefüggőségnek neveztük el. Az abszolút összefüggő részbenrendezett halmazokon monoton Jónsson-függvényeket konstruáltunk.

Társszerzőkkel együtt elkészült a [27] könyv, ami a korábbi magyar nyelvű változat lényegesen átdolgozott és kibővített kiadása.

A pályázat előzményének tekinthető T29132 számú OTKA kutatócsoportjának résztvevője volt Szabó Edit is. Két dolgozatát hátrahagyott jegyzeteiből halála után rendeztük sajtó alá, ezeken a mostani OTKA számot tüntettük fel. A [38] dolgozatban Gerhard Pazderski ötlete nyomán bevezettük az abszolút feloldható csoport fogalmát. Ezek azok a csoportok, amelyek minden főfaktorukon abszolút irreducibilisen hatnak. Megmutattuk, hogy az abszolút feloldható csoportok formációt alkotnak, azonban ez a formáció nem telített. Jellemeztük azokat a csoportokat is amelyeknek minden részcsoportja abszolút feloldható, ezek már telített formációt alkotnak. Végül a [39] cikkben megmutattuk, hogy minden feloldható csoport részcsoportként beágyazható abszolút feloldható csoportba.

Az OTKA T038059 támogatásával készült munkák

1. M. Abért, Group laws and free subgroups in topological groups, Bull. London Math. Soc. 37 (2005), 525–534. folyóirat
2. M. Abért, N. Nikolov, B. Szegedy, Congruence subgroup growth of arithmetic groups in positive characteristic, Duke Math. J. 117 (2003), 367–383. folyóirat
3. M. Abért, B. Virág, Dimension and randomness in groups acting on rooted trees, J. Amer. Math. Soc. 18 (2005), 157–192. folyóirat
4. M. Asaad, A. A. Heliel, M. Ezzat Mohamed, P. Csörgő, Finite groups with some subgroups permutable with all Sylow subgroups, JPANTA 4 (2004), 437–446. folyóirat
5. M. Asaad, P. Csörgő, Characterization of finite groups with some S-quasinormal subgroups, Monatshefte Math. 146 (2005), 263–266. folyóirat
6. V. Bovdi, On a filtered multiplicative bases of group algebras II, Algebr. Represent. Theory 6 (2003), 353–368. folyóirat
7. V. Bovdi, Modular group algebras with almost maximal Lie nilpotency indices, II, Sci. Math. Japon. közlésre elfogadva. folyóirat
8. V. Bovdi, Symmetric units and group identities in group algebras, I, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. 22 (2006), 149–159. folyóirat
9. V. Bovdi, P. M. Gudivok, V. P. Rudko, Torsion free groups with indecomposable holonomy group, II, J. Group Theory 7 (2004), 555-569. folyóirat
10. V. Bovdi, C. Höfert, W. Kimmerle, On the first Zassenhaus conjecture for integral group rings, Publ. Math. Debrecen 65 (2004), 291–303.
11. V. Bovdi, T. Juhász, E. Spinelli, Modular group algebras with almost maximal Lie nilpotency indices, I, Algebras and Representation Theory 9 (2006), 1–10. folyóirat
12. V. Bovdi, V. P. Rudko, Extensions of the representation modules of a prime order group, J. Algebra 295 (2006), 441–451. folyóirat
13. V. Bovdi, E. Spinelli, Modular group algebras with maximal Lie nilpotency indices, Publ. Math. Debrecen 65 (2004), 243–252. folyóirat
14. P. Csörgő, Extending the structural homomorphism of LCC loops, Comment. Math. Univ. Carolin. 46 (2005), 385–389. folyóirat
15. P. Csörgő, On connected transversals to abelian subgroups and loop theoretical consequences, Arch. Math. 86 (2006), 499–516. folyóirat
16. P. Csörgő, Abelian inner mapping group and nilpotency class greater than two, Europ. J. Combinat. közlésre elfogadva. folyóirat
17. P. Csörgő, A. Drapal, Left conjugacy closed loops of nilpotency class two, Resultate Math. 47 (2005), 242–265. folyóirat
18. P. Csörgő, M. Herzog, On supersolvable groups and the nilpotator, Commun. Algebra 32 (2004), 609–620. folyóirat
19. P. Csörgő, A. Jancarik, T. Kepka, Generalized capable abelian groups, Non-Associative Algebra and its Applications, in: Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 246, 129–136. konferenciakötet
20. P. Csörgő, T. Kepka, On loops whose inner permutations commute, Comment. Math. Univ. Carolin. 45 (2004), 213–221. folyóirat

21. Z. Halasi, On the characters of the unit group of DN-algebras, J. Algebra 302 (2006), 678–685. folyóirat

22. P. Hegedűs, P. P. Pálfy, Finite modular congruence lattices, Algebra Universalis 54 (2005), 105–120. folyóirat

23. G. Horváth, Cs. Szabó, The complexity of checking identities over finite groups, Int. J. Alg. Comp. közlésre elfogadva. folyóirat

24. G. Horváth, J. Lawrence, L. Mérai, Cs. Szabó , The complexity of the equivalence problem for nonsolvable groups, Bull. London Math. Soc. közlésre elfogadva. folyóirat

25. K. Kátai, Cs. Szabó, The free spectrum of the variety generated by the 5 element Brandt semigroup, Semigroup Forum közlésre elfogadva. folyóirat

26. G. Kun, Cs. Szabó, Jónsson terms and near-unanimity functions in finite posets, Order 20 (2003), 291–298. folyóirat

27. L. Lovász, J. Pelikán, K. Vesztergombi, Discrete matematics. Elementary and beyond. Springer Verlag, New York, 2003. könyv

28. P. P. Pálfy, A non-power-hereditary congruence representation of M_3, Publ. Math. Debrecen közlésre elfogadva. folyóirat

29. P. P. Pálfy, Maximal clones and maximal permutation groups, Discuss. Math. közlésre elfogadva. folyóirat

30. P. P. Pálfy, O. Steinfeld, Some group theoretic problems inspired by ring theoretic analogies, Math. Pannon. 13 (2002), 167–174. folyóirat

31. K. Podoski, B. Szegedy, Bounds for the index of the centre in capable groups, Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), 3441–3445. folyóirat

32. L. Pyber, Old groups can learn new tricks, in: Groups, combinatorics & geometry, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2003. 242–255. konferenciakötet

33. S. Seif, Cs. Szabó, Algebra complexity problems involving graph homomorphism, semigroups and the constraint satisfaction problem, J. Complexity 19 (2003), 153–160. folyóirat

34. S. Seif, Cs. Szabó, Computational complexity of checking identities in 0-simple semigroups and matrix semigroups over finite fields, Semigroup Forum 72 (2006), 207–222. folyóirat

35. Cs. Szabó, On rings with few orbits, Commun. Algebra 34 (2006), 2251 - 2260. folyóirat

36. Cs. Szabó, V. Vértesi, The complexity of checking identities for finite matrix rings, Algebra Universalis 51 (2004), 439–445. folyóirat

37. Cs. Szabó, V. Vértesi, The complexity of the word problem for finite matrix rings, Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), 3689–3695. folyóirat

38. E. Szabó, Formations of absolutely solvable groups, Publ. Math. Debrecen, közlésre elfogadva. folyóirat

39. E. Szabó, Embeddings into absolutely solvable groups, Publ. Math. Debrecen, közlésre elfogadva. folyóirat

40. B. Szegedy, Characters of the Borel and Sylow subgroups of classical groups, J. Algebra 267 (2003), 130–136. folyóirat