

**2005. évi OTKA zárójelentés:  
OTKA nyilvántartási szám T 037922**

**Vezető kutató: Rozványi György Iván**

A pályázat címe: **Szerkezetek topológiai optimalizálásának néhány új elméletei és módszerei a számítástechnikai problémák megoldására**  
(részletes ismertetés)

Az utóbbi idők egyik legfontosabb eredménye a bizonyos számítási nehézségek áthidalása véges elemes topológiai optimalizálásban. Diszkretizációs hibák következtében az eljárások gyakran hibás megoldásokat eredményeznek, például „sakk-tábla mintákat” (checkerboard pattern). Ennek elkerülésére nagyszámú módszert találhatunk a szakirodalomban, de ezek az optimalitást és a feloldást hátrányosan befolyásolják. Az utóbbi két évben a Rozványi vezette kutatócsoport nagyon hatásos új módszereket fejlesztett ki ezeknek a hibás megoldásoknak az elkerülésére, amikben SIMP-et kombinálják különböző büntetőfüggvényekkel. Az új algoritmus neve CO-SIMP, ami maximális feloldást és valóban optimális topológiákat biztosít. Ez az új módszer több nemzetközi konferencián lett ismertetve.

A véges elemes topológiai optimalizálás másik hibája, hogy számos új módszer jelenik meg a szakirodalomban, de ezeknek a helyességét, hatásosságát és konvergenciáját senki sem ellenőrzi pontosabban. Ez okból kutatócsoportunk eljárásokat fejlesztett ki a topológiai optimalizációs módszerek minőségének az ellenőrzésére. Ezek pontos analitikai módszeres megoldásokkal való összehasonlításokon alapulnak, különböző számú véges elemek és különböző térfogat arányok („volume fraction”) felhasználásával.

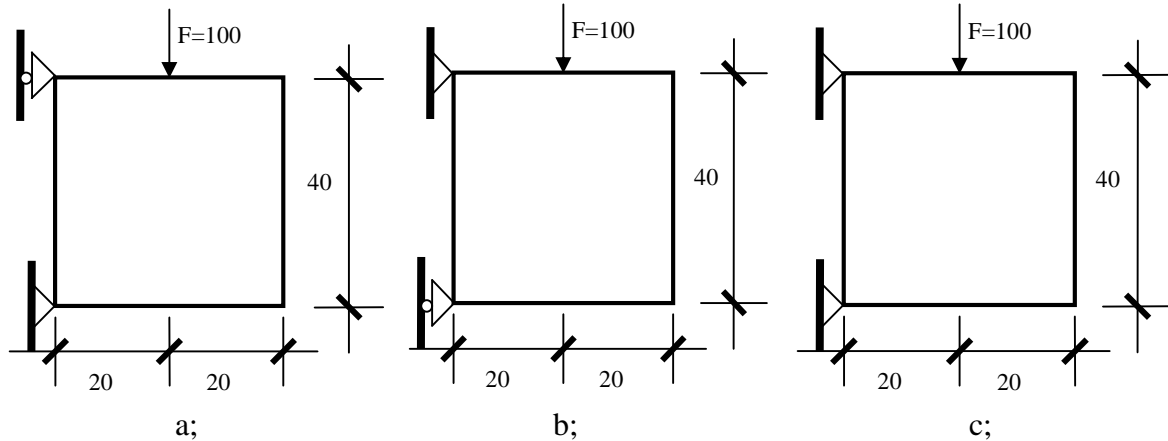
Másrészről egy rendkívül hatásos SIMP programot is fejlesztett csoportunk, amivel nagy véges elem rendszereket lehet optimalizálni topológiailag. Ezt a programot Lógó és Rozványi arra is használják, hogy új pontos analitikus topológiai megoldásokat ellenőrizzenek le. Ennek során több új probléma-kört vizsgálnak meg, többek között szerkezetek és alátámasztások egyidejű optimalizálását.

A SERA (Sequential Element Rejections and Admissions = sorozatos véges elem eltávolítások és beillesztések) módszert egy szigorú „rigorózus” elmélet alapján továbbfejlesztettük különböző kombinált mellékfeltételek és többszörös terhelés esetére és a helyes Lagrange szorzókat alkalmazzuk intuitív súlyozási faktorok helyett. A SERA (korábban ESO, vagy „hard-kill”) módszerben minden elemre kiszámítjuk egy feltételi-függvény „criterion-function” értékét. Ha ez alacsony, akkor az elemet eltávolítjuk, ha magas, akkor új elemet illesztünk be. Ez a módszer korábban teljesen heurisztikus volt, Zhou és Rozványi (2001) kimutatta, hogy ez több mint 1000 százalékos hibát eredményezhet. Az egyik módosítás az ún. „virtuális” anyagon alapul, aminek az rugalmassági modulusa nagyon alacsony az „igazi” anyaghoz viszonyítva. Az érzékenység „sensitivity” változásának rendszeres ellenőrzésével és a megfelelő korrekciók alkalmazásával a módszer helyességét biztosítjuk.

**Néhány jellegzetes feladat és megoldása:**

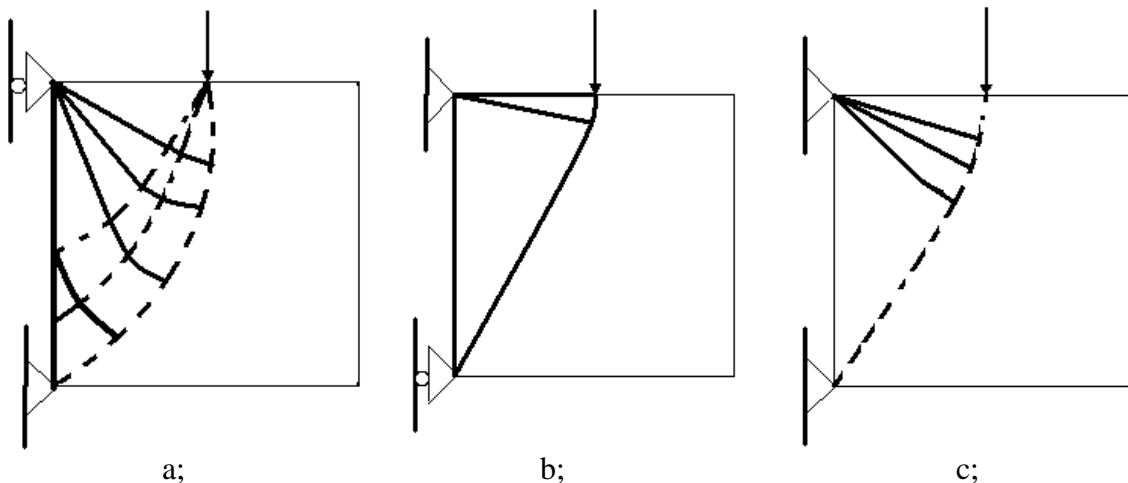
**Csuklós illetve görgős megtámasztású szerkezetek optimális topológiái**

A megoldáshoz az al-hálózatra való bontás módszerét használtuk. (2x2 al-elem) A feladatban három, egyenként 40x40 egység (dimenzió nélküli) méretű szerkezet volt a tervezés tárgya (1.a-c ábra).



1. a-c ábra Különböző megtámasztású szerkezetek tervezési tartománya

Az egyes szerkezetek megtámasztási viszonyai az ábrán láthatók. A szerkezeteket 80x80 alapelemre és minden alapelemet 2x2 al-elemre bontottunk. (A teljes elemszám 25600.) A Poisson tényező zérus (ez a nemzetközi irodalomban szokásos érték). A teher (100 egység) a tervezési tartomány felső szélének középpontjában hatott. A  $p$  büntetőparaméter értékét dinamikusan változtattuk, kiindulási érték  $p=1$ . A  $p$  paraméter értéke  $p=1.5$ -ig  $\Delta = 0.1$  lépésközzel növeltük, majd  $p=2.5$ -ig (ami a végső érték volt) már  $\Delta = 0.25$  volt a növekmény.



2. a-c ábra Analitikus megoldások

A feladatok analitikus megoldásai zérus térfogati arány esetén az 2.a-c ábrákon láthatók (Rozvany, Lógó és Querin (2004), Lógó (2005)). A numerikus megoldáshoz tartozó optimális

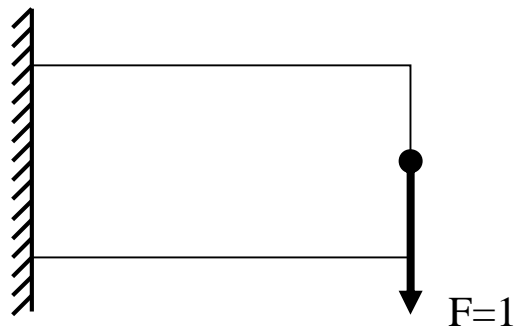
topológiák az 3.a-c ábrákon vannak bemutatva. Látható, hogy a numerikus illetve az analitikus megoldások egyezőséget mutatnak. Az egyes optimális topológiákból jól megfigyelhető a támaszok hatása az optimális topológiára. A feladatok megoldására 950 és 1000 közötti iteráció szám volt szükséges.



a; Görgős és csuklós támasz    b; Csuklós és görgős támasz    c; Csuklós és csuklós támasz  
3.a-c ábra Numerikus megoldások

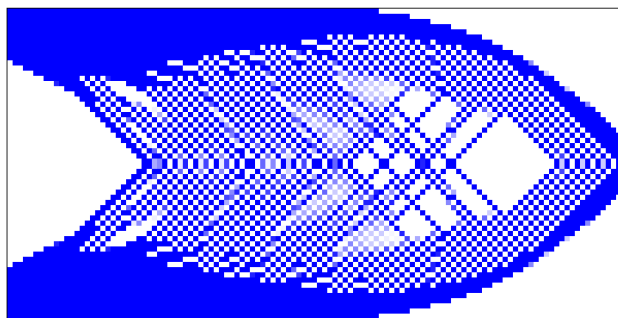
#### A SIMP eljárás bővítésének alkalmazása

Példaként egy a szabad végén koncentrált erővel terhelt állandó keresztmetszetű konzolt vizsgáltunk (4. ábra). A konzol hossza és magassága 2:1 arányú. Itt bemutatjuk a különbséget a hagyományos és a bővített algoritmus alapján kapott numerikus eredmények között.



4. ábra Prizmatikus gerendatartó egységnyi teherrel

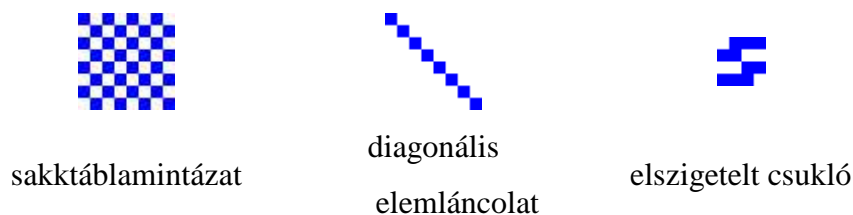
A hagyományos algoritmus felhasználásával az eredményként kapott tartó külső körvonala jól kirajzolódik, belsejében viszont jól megfigyelhetőek a sakktáblamintázat jellegzetességei (5. ábra), amely hibás megoldásnak minősül.



5. ábra 120x60 méretű tárcsa megoldása a hagyományos SIMP eljárással

A mintázat alapját az egyes elemek közötti sarokkapcsolat adja. Ez, a számításokban alkalmazott mechanikai modell szerint egy sarokponti csukló létrejöttét jelenti.

E kapcsolati mód különböző mintázatokat hozhat létre (6. ábra). Ezek az alakzatok az optimálás szempontjából jó (legmerevebb) kialakítások, mérnöki szempontból viszont hibás megoldásnak tekinthetők (mivel a csuklókapcsolat egy végtelenül kicsiny pontban van, így a kapcsolat a gyakorlatban nem létrehozható).



6. ábra A sarokponti kapcsolatból létrejövő alakzatok

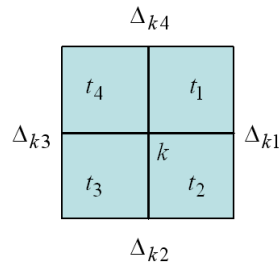
Kutatásaink alapján arra a következtetésre jutottunk, hogy a sakktablamintázat kialakulása ellen közvetlenül, valamilyen büntetőfüggvény alkalmazásával lehet védekezni.. Ennek megfelelően új célfüggvényt vezetünk be a minimumfeladat felírásakor:

$$V = \sum_g A_g t_g^{1/p} + H(\mathbf{t}) = \min!,$$

ahol  $H(\mathbf{t})$  az alkalmazott alapelemek vastagságától függő büntetőfüggvény. Néhány jellegzetes formáját az alábbi módon ismertetjük:

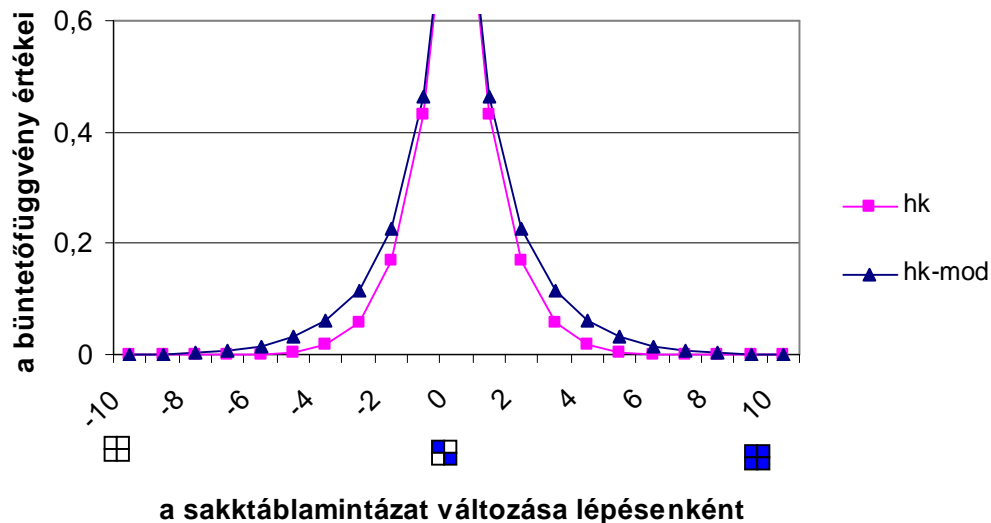
A minimumfeladatban alkalmazott büntetőfüggvényt ( $H(\mathbf{t})$ ) tekintsük, mint a belső sarokpontokhoz rendelt büntetőfüggvények ( $h_k$ ) összegét:  $H(\mathbf{t}) = \sum_k h_k$ .

A feladat megoldásaként kapott iterációs eljárás alkalmas a sakktablamintázat kialakulásának megakadályozására és ennek igazolására két esetet mutatunk itt be: A 7. ábra a  $k$  jelű belső sarokpont környezetét mutatja. A  $\Delta_{ki}$  mennyiségek a jelzett szomszédos elemek vastagságának különbségei. A sarokponti büntetőfüggvény:  $h_k = (\Delta_{k1}\Delta_{k2}\Delta_{k3}\Delta_{k4})^2$ .



7. ábra A büntetőfüggvényhez használt változók jelentése

A függvényt a 8. ábra szemlélteti (hk). A diagramban középen helyezkedik el a sakktablát jelképező sarokponti kapcsolat. Ezt tekintjük origónak. Ekkor a büntetőfüggvény értéke egy. E sakktablakapcsolatot két módon lehet megszüntetni: vagy a vastag elemeket elvékonyítjuk



8. ábra A büntetőfüggvény és annak módosítása  $c = 1$  esetén

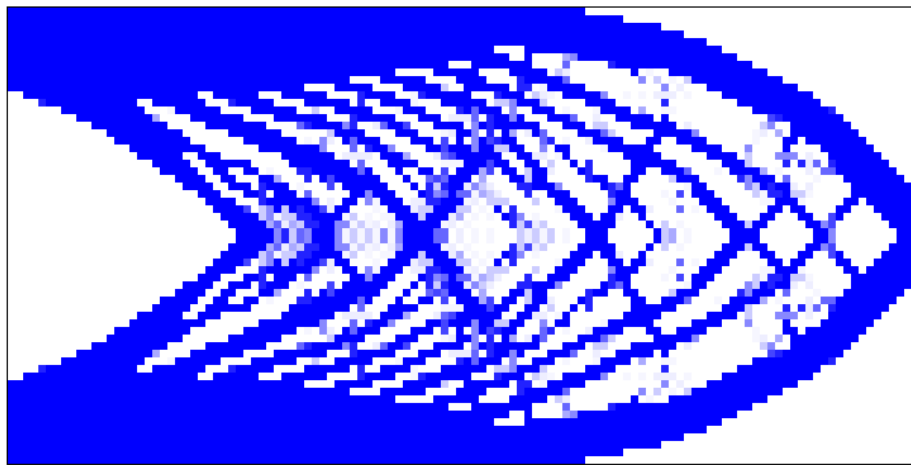
(diagramban balra), vagy pedig a hiányzó elemeket megvastagítjuk (diagramban jobbra). A vékonyítást ill. vastagítást 10 lépésben végeztük el, szimmetrikusan ( $t_1=t_3$  és  $t_2=t_4$ ), így a diagramban  $\Delta_{ki} = 0.1, i=1..4$  lépésközöket alkalmaztunk. Mint azt a diagram is jól mutatja, a függvénynek hibája, hogy kis vastagságkülönbség esetén ( $\Delta_k \leq 0.5$ ) a függvény meredeksége közel zérus. Ez káros az optimalizációs iteráció hatékonyságára. Ezért a büntetőfüggvényt

$$\text{átalakítottuk: } \tilde{h}_k = \frac{c(\Delta_{k1}\Delta_{k2}\Delta_{k3}\Delta_{k3})^2}{\left[\cos^2\left(\left(t_1+t_2+t_3+t_4-2\right)\frac{\pi}{4}\right)\right]^3},$$

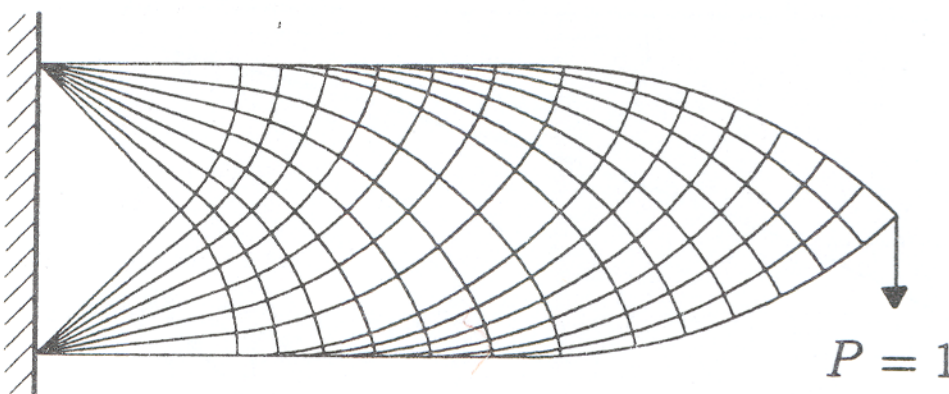
ahol a  $\cos^2$  függvény alkalmazására a szimmetria megőrzése miatt került sor. A módosítás hatását szintén az 1. diagram mutatja (hk-mod).

Ezzel a büntetőfüggvénnyel ellátva az optimalizációs eljárás igen jó eredményt ad (9. ábra). A mintapéldaként vizsgált tartó külső körvonala közel azonos a korábban bemutatottal (4. ábra). A tartó belsejéből a jól látható (fekete-fehér) sakktáblamezők és láncolatok eltűntek. A szerkezetben kialakult rudak elhelyezkedése sűrűbb.

Az eredmény helyességét igazolja ugyanennek az optimalizációs feladatnak az analitikusan meghatározott megoldása (10. ábra), melyben a görbék a feszültségi trajektóriákat követik.



9. ábra 120x60 méretű tárcsa megoldása CO-SIMP eljárással, alapelemenként 1 véges elemet és a bemutatott büntetőfüggvényt használva,  $c=200$

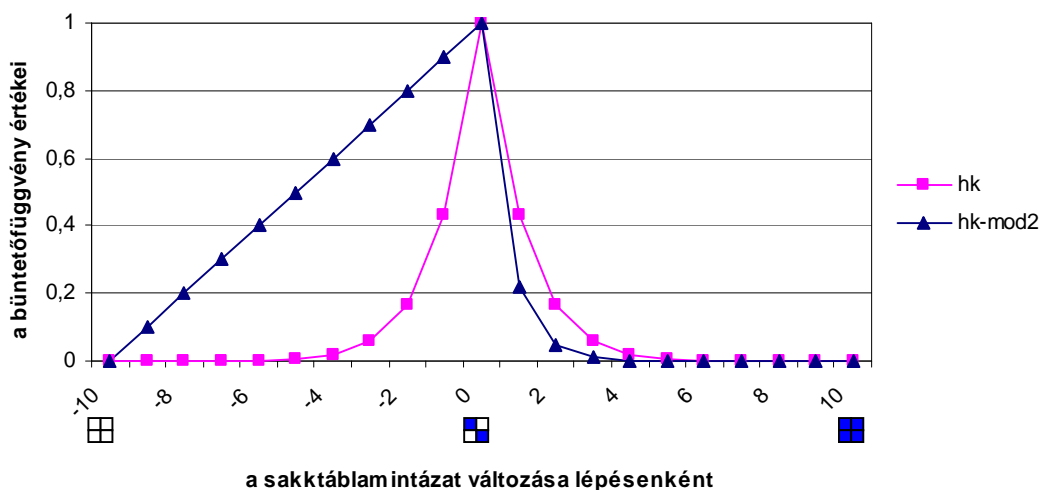


10. ábra Az optimalizációs feladat pontos megoldása

Egy másik hatásos büntetőfüggvény a Rozványi által javasolt:  $\tilde{h}_k = \frac{c(\Delta_{k1}\Delta_{k2}\Delta_{k3}\Delta_{k3})^2}{(t_1+t_2+t_3+t_4)^7} 2^7$ .

E függvény az üres és vékony elemek alkotta sakktáblánál lineáris, míg a vékony és teli elemek alkotta sakktábla esetén parabolikus görbét ad (11. ábra).

A szimmetria illetően feloldásának oka/magyarázata, hogy a megoldás szempontjából kevésbé büntetendő, ha különböző vastagságú de nem üres elemek alkotnak fekete-szürke sakktáblát, mint amikor üres és vékony vastagságú elemek fehér-szürke sakktáblát alkotnak (11. ábra).



11. ábra A büntetőfüggvény (hk)és annak módosítása (hk-mod2),  $c = 1$  esetén

### Összefoglalás:

A fenti javaslatok nagyon intenzív számítógép programozási munkát igényeltek, de az eredmények gyakorlati jelentősége ezt teljes mértékben indokolta. A véghezvitt kutatás elméleti jellegű volt, de eredményei a jármű-, gép-, és építőiparban széles körben alkalmazhatók lehetnek. A nagyszámú tervezési ismeretlen pedig az eddig alkalmazott matematikai programozási módszerek egyik fő hiányosságát küszöböli ki. A kutatás összefoglaló jelentése egy összefoglaló jellegű munkánkban is megtalálható:

**Rozvany, G.I.N., Querin, O.M., Pomezanski, V., Gáspár, Zs., Lógó J.:** Some Basic Issues of Topology Optimization, Proc. of the IUTAM Symposium "Topological Design Optimization of Structures, Machines and Materials - - Status and Perspectives", Rungstedgaard, Denmark, Oct. 26-29, 2005, (2006), Springer-Verlag, megjelenés alatt.