Beszámoló

Ortotrop lemez stabilitás-elemzését tanulmányoztuk a *Mathematica* szimbolikus-numerikus rendszer alkalmazásával. Adott anyag-paraméterek ismeretében meghatároztuk a kritikus erőt (*direkt feladat*), majd előírt kritikus erő ismeretében vizsgáltuk az ismeretlennek tekintett anyag és geometria paramétereket (*inverz probléma*). Megállapítottuk, hogy ebben az esetben az inverz-feladat is direkt problémaként kezelhető, mivel mindkét feladat közelítő megoldása visszavezethető mátrix sajátérték-feladatok szimbolikus-numerikus megoldására.

Tanulmányoztuk az egyensúlyi utak elágazásának különleges eseteit. A nemlineáris stabilitáselmélet alkalmazásával példákat mutattunk a ritkán előforduló indifferens egyensúlyi állapotokra, ahol a szerkezet egyensúlyát biztosító teher értéke nem változik nagy elmozdulások mellett sem. A szerkezetek további külső erők nélkül tudják változtatni alakjukat, úgy viselkednek akár a véges mechanizmusok. Az indifferens egyensúlyi állapotra vonatkozó eredményeinket több fórumon is közzétettük.
A mérnöki köztudatban elterjedt a nézet, amely szerint egy rugalmas szerkezet erősítése – akár a merevség növelése, akár a kényszerek számának növelése révén – növeli, vagy legalábbis nem csökkenti a szerkezet kritikus terheit és a sajátfrekvenciáit. Majdnem minden, a tárgyban megjelent dolgozat és tankönyv tételként állítja, hogy egy többletkényszer a kihajlást tekintve mindig stabilizáló, vagy legalábbis nem destabilizáló hatású, a rezgéseket illetően pedig frekvencianövelő, vagy legalábbis nem-csökkentő hatású. Ezen kijelentések közül azonban egy sem ad világos kritériumot arra, hogy a többletkényszer a szerkezetnek mely elmozdulását gátolja. Mindezért a többletkényszer hatásáról szóló tételt kihajlásra illetve rezgésre vonatkozóan pontosítottuk. Példával illusztráltuk, hogy egy többletkényszer adott esetben csökkentheti a szerkezet rugalmas kritikus terhét, valamint azt, hogy egy rudakból és rugókból összeállított szerkezet egy rugójának merevebbé tétele a szerkezet sajátfrekvenciájának csökkenését eredményezheti. A fenti példák jelentősége, hogy ellentmondanak a mérnöki szemléletnek a rugalmas szerkezetek kihajlási és rezgési tulajdonságaira vonatkozóan azokban az esetekben, amikor a többletkényszer a kihajlási illetve rezgési irányokra ortogonális elmozdulásokat gátol.

Figyelembe véve a szimbolikus és numerikus számítások végzésére alkalmas integrált rendszerek korszerű lehetőségeit, megmutattuk, hogy a Bairstow-módszer nagyon egyszerűen megvalósítható, pl. a *Mathematica* kombinált rendszer használatával. Vizsgáltuk a Bairstow-módszer olyan általánosításainak a hatását, amikor az osztópolinom harmad- illetve negyedfokú.

A *Numerikus módszerek* című tárgy tananyagát korszerűsítettük a *Mathematica* számítógép-algebrai rendszer (CAS) lehetőségeinek figyelembevételével. A tananyagot kibővítettük a Fredholm-féle alternatíva-tétel és a Gröbner-bázis ismertetésével.
A *Funkcionálanalízis* című tárgy anyagát ugyancsak átdolgoztuk a *Mathematica* által biztosított környezetet alapul véve. Az előadási anyag kiegészült a végeselem-módszer matematikai megalapozásához szükséges két alapvető, részben magyar matematikusoktól származó tétellel, nevezetesen a Riesz-féle reprezentációs tétellel és a Lax-Milgram-tétellel.

Nemlineáris numerikus problémákat vet föl a természetben előforduló, magas rendben szimmetrikus mechanizmusok (tágulásra képes ikozaéderes vírusok) mérnöki modellezésének kérdésköre is. A vírusok vázszerkezetét alapjában véve a közismerten mérnöki modellezési eszköznek számító rácsostartó-modell alapján leíró, de általánosabb megfogalmazású kényszerfeltételeket is alkalmazó vizsgálat kiegészült a szimmetria-tulajdonságok csoportelméleti eszközökkel történő figyelembevételével. A szerkezetek mozgásvizsgálata során lineáris algebrai eszközöket szimmetria-orientált koordináta-rendszerben alkalmaztunk, illetve kritériumokat fogalmaztunk meg az infinitezimális mechanizmusok másodrendben történő merevíthetőségével, azaz közvetve a véges mozgások létezésének igazolásával illetve cáfolatával kapcsolatban, mely utóbbi a magasabb rendű merevség vizsgálatából eredően már nemlineáris analízist igényelt. Szintén mechanizmusok véges illetve infinitezimális jellegét vizsgáltuk gömbfelszínen mozgó csuklós kupolaszerkezetek mozgásával összefüggésben. Erre a célra kidolgoztuk a gömbi rácsos tartók kétdimenziós analízisére alkalmas numerikus vizsgálati eljárást.

A betonnak egy jelentős terhelési szakaszában jó anyagmodellként használható a húzás hatására berepedő (nem ellenálló), de nyomásra lineárisan viselkedő anyag feltételezése. Ha egy vasbeton rúd általános alakú keresztmetszetére külpontos nyomóerő hat, akkor e keresztmetszetben ható feszültségek meghatározására nemlineáris feladatot kell megoldanunk. Kidolgoztunk egy iterációs eljárást, amellyel meghatározható a semleges tengely helye és a létrejövő feszültségek. Az eljárásról igazoltuk, hogy az minden esetben a fizikailag is létrejövő megoldáshoz konvergál.

Ha egy egyenes tengelyű, körkeresztmetszetű prizmatikus rudat (mely végig lineárisan rugalmas anyagúnak tekinthető) először tórusz alakúra hajlítunk, majd a rúd két végét egymáshoz képet elcsavarjuk, akkor a kritikus értéknél nagyobb relatív elfordulás után a rúd kifordul a síkból, és nagy elmozdulások után egy önmagával is érintkező alakot vesz fel. Az elfordítás értékét tovább növelve olyan szakaszhoz érünk, amelynél már nem csak diszkrét pontokban jön létre az önérintkezés, hanem egy szakaszon, megszámlálhatatlanul sok pontban. Az ilyen típusú alakok meghatározásához egy nemlineáris differenciálegyenlet-rendszerhez tartozó peremérték-feladatot kellett megoldanunk. A cikkben ismertetjük a megoldandó feladatot, és numerikus példán bemutatjuk a javasolt megoldási módszer használhatóságát. Megjegyezzük, hogy világon több helyen is vizsgálják e csavart rudat, mert ez segíthet megérteni a DNS-láncok kialakulásának hátterét.

A Mechanikai Tudományok Nemzetközi Központjában (CISM, Udine, Olaszország) egy nemzetközi tanfolyamot szerveztek a Szerkezetek stabilitásvesztésének fenomenológiai és matematikai modellezéséről. E kurzus egyik előadójaként egy 60 oldalas anyagot készítettünk, amelyben több, korábban még nem illusztrált stabilitásvesztési típusra mutattunk egyszerű modelleket. E szerkezetek teljes potenciális energiájának függvényét előállítottuk, majd a gradiensének zérus voltát, valamint a Hesse-mátrixának szingularitását előíró feltétel alapján adódó nemlineáris egyenletrendszert kellett megoldanunk. A szerkezet tökéletlenségérzékenységének vizsgálatát az nehezíti, hogy az energiafüggvényben paraméterként szerepelnek a tökéletlenségeket leíró paraméterek és a teherparaméter is. A Taylor-sorfejtés, a szétválasztási algoritmus során nagyon jól lehetett használni a szimbolikus kifejezéseket is kezelni tudó programrendszereket. (A Springer kiadó kiadványában nem volt lehetőség a támogatók feltüntetésére.)

A szimbolikus-numerikus számítások egyik fontos területe a függvények közelítése mérési adatok alapján. Egy robusztus, a support vector regresszión (SVR) alapuló numerikus szimbolikus eljárást dolgoztunk ki a – geodéziában gyakori – kiegyenlítő számítások tetszőleges pontosságú, racionális számokon történő elvégzésére, amely optimális arányt biztosít a kiegyenlítés megbízhatósága és a rezidium nagysága között. A módszer az egyik rangos nemzetközi szimpóziumon, EGU G9-n, Bécsben került ismertetésre és mint kiemelt előadás, a *Report on Geodesy* c. szaklapban került közlésre. Ezzel összefüggésben elkészült a SVR algoritmusnak egy általánosított, tetszőleges magfüggvénnyel alkalmazható változata, mint a *Mathematica* számítógép-algebrai rendszer (CAS) felhasználói függvénye. Ez azután bekerült a *Mathematica*-t kifejlesztő kutatóintézet, a Wolfram Research Institute programgyűjteményébe (MathSource), amely nyilvánosan hozzáférhető.
Talán a CAS legfontosabb felhasználói területe a polinomiális egyenletrendszerek megoldása. A szokásos Buchberger-algoritmuson alapuló, Gröbner-bázist használó technikán kívül a geodéziai számításoknál először került alkalmazásra a Dixon-módszer, amely sok esetben hatékonyabbnak bizonyult a hagyományos Gröbner-bázis előállításánál. A módszert GPS navigációs műholdak alapján történő helymeghatározási feladat megoldására alkalmaztuk N tetszőleges számú műhold esetére. Ezzel az algebrai megoldási módszerrel lehetővé válik a hibás (kieső), azaz rossz geometriai konstellációban lévő műholdak adatainak elhagyása. Az eredményeket a 8. Nemzetközi *Mathematica* Kongresszuson ismertettük, a franciaországi

Avignonban. Az eljárás *Mathematica*-ban történt implementációja szintén bekerült a MathSource-ba. A *Mathematica*, mint CAS rendszer, nagyon hatékony lehet nagyméretű, ritka és rosszul kondicionált egyenletrendszerek megoldásánál, mivel a számítás tetszőleges pontossággal történhet. Erre vonatkozóan oldottunk meg a geofizikában felmerülő, több ezer ismeretlent tartalmazó, a gravitációs erőtér lokális komponenseinek meghatározására szolgáló modellt. Megmutattuk, hogy egy egyszerű felhasználó milyen könnyen képes alkalmazni a CAS–t ilyen nagyméretű, valós feladatok esetén is. Az eljárás az IAG International Symposium, Gravity, Geoid and Space Missions konferencián került ismertetésre a portugáliai Porto-ban.

Az amerikai kollégák szerint a MathSource-ban archivált programjainkra több mint száz letöltést regisztráltak.

Rendszeresen részt veszünk a *Mathematica* új verzióinak béta tesztelésében, jelenleg éppen a hamarosan megjelenő 6. verziót teszteljük.

Lényeges eredményünknek tartjuk, hogy közleményekben megmutattuk, hogy nem csak numerikus, hanem általánosabb matematikai problémákat is lehet hatékonyan megoldani a *Mathematica* szimbolikus-numerikus rendszer alkalmazásával. Erre vonatkozóan lásd az angol nyelvű egyetemi (PhD-hallgatói) jegyzetet. A jegyzet a nemzetközi vérkeringésbe is bekerült azáltal, hogy a Wolfram Research Institute által ajánlott irodalmak jegyzékében szerepel.