T 037877 számú OTKA pályázat

Algebrák és kísérőstruktúráik

Témavezető: Szendrei Ágnes

==

Részletes zárójelentés

A pályázat munkaterve hat témakörben irányzott elő kutatásokat. Mind a hat témában számottevő eredmények születtek a pályázat négy éve alatt. Az elért eredményeket az alábbi összefoglaló e témakörök szerinti bontásban ismerteti.

Előrebocsátok néhány, az eligazodást segítő megjegyzést.

- A zárójelentésben az [1], [2], ... , [30] számok a pályázat keretében készült, s az OTKA adatbázisába bevitt közleményekre utalnak – a végleges adatbevitel után ott kialakult számozás szerint.
- Ezek közül a közlésre elfogadott, illetve közlésre benyújtott cikkek, valamint a kéziratok esetén az adatbázisban kötelezően megkívánt megjelenési évszám becslésen alapul, figyelembe véve a matematikában szokásos átlag két év átfutási időt (benyújtás után).
- A többi hivatkozás – megkülönböztetésül – betűvel kezdődik. Ezek adatai a zárójelentés végén lévő irodalomjegyzékben találhatók.
- Ez a zárójelentés olvasható a pályázat

  http://www.math.u-szeged.hu/kozos/37877/

  címen található honlapján is, ahonnan az [1]–[30] közlemények mindegyike pdf formátumban elérhető.

1. A véges algebrák struktúraelmélete, klónok véges alaphalmazon

A Hobby és McKenzie [HMc] által kifejlesztett struktúraelmélet azon a fontos észrevételen alapul, hogy egy véges algebra viselkedését nagy mértékben meghatározza bizonyos \`kicsi' részhalmazokon mutatott lokális viselkedése. A lokális viselkedést leíró algebrák megértése általában klónjuk megértését kívánja meg. Fordítva, az algebrák klónja nagyban meghatározza a struktúrális tulajdonságaikat. A struktúraelmélet és a klónelmélet kombinációja rendkívül széles alkalmazási lehetőségekkel bír a klasszikus algebrai struktúráktól kezdve olyan általános relációstruktúrákig, amelyek bizonyos optimalizálási problémáknál merülnek föl.

A csoport elméletben régóta vizsgált az a – Galois-elmélet által motivált – kérdéskör, hogy két csoport részcsoporthálói között (esetleg további feltételeknek is eleget tevő) izomorfizmus létezése milyen erős megszorítást jelent magukra a csoportokra. Suzuki 1951-ben bizonyította, hogy ha a G, H véges egyszerű csoportokra G^2 és H^2 részcsoporthálója izomorf egymással, akkor G és H is izomorf egymással. Bár ugyanez tetszőleges véges csoportokra nem igaz, az volt a sejtés, hogy ha a G, H véges csoportokra G^3 és H^3 részcsoporthálója izomorf egymással, akkor már következik, hogy G és H is izomorf egymással. A [4] cikk fő eredménye az, hogy ha a G, H véges csoportok Sylow-részcsoportjai ciklikusak, továbbá

(1) G és H részcsoporthálója között létezik a részcsoportok rendjét megőrző izomorfizmus, vagy
(2) G x G és H x H részcsopothálója izomorf egymással,

akkor G és H (izomorfiától eltekintve) term ekvivalens egymással, s így G^n és H^n részcsoporthálója izomorf egymással minden n-re. Mivel az ismert volt, hogy e tétel feltevéseinek nemizomorf G, H csoportok is eleget tesznek, ez a tétel megcáfolja az említett sejtést.

Ehhez a témakörhöz szorosan kapcsolódik az a probléma, hogy létezik-e olyan n természetes szám, amelyre tetszőleges G csoport esetén G^n részcsoportjai meghatározzák G-t term-ekvivalencia erejéig (azaz meghatározzák G klónját). A [13] cikk fő eredm énye az, hogy ha a G véges csoport Sylow-részcsoportjai Abel-félék, akkor G-t term-ekvivalencia erejéig meghatározzák G^3 részcsoportjai. A kvaterniócsoport példája igazolja, hogy szélesebb csoportosztályok esetén G^3 részcsoportjai biztosan nem elegendőek. Az viszont [13] egy eredménye szerint igaz, hogy nilpotens G csoportokra G^k részcsoportjai, ahol $k = |G|^{[G\,:\,Z(G)]\,-\,1}$, meghatározzák G-t term-ekvivalencia erejéig.

A véges algebrák elméletének egyik fontos nyitott kérdése a következő: igaz-e, hogy véges A halmazon csak megszámlálhatóan sok Malcev-algebra van (az azonos klónú algebrákat nem különböztetjük meg egymástól). Post [Po], illetve Bulatov [Bu] eredményeiből a válasz ismert és igenlő, ha A két- vagy háromelemű, és nem ismert, ha A legalább négyelemű. A fenti csoportelméleti eredmény kiterjesztésével ennek kapcsán azt sikerült bizonyítanunk, hogy bármely véges alaphalmazon csak véges sok olyan Malcev-algebra van, amelyik reziduálisan kicsi varietást generál (azaz olyan varietást, amelyben csak halmaznyi sok irreducibilis algebra van). Ebből a tételből egyszerű speciális esetként adódnak a két-, ill. háromelemű Malcev-algebrákra korábbról ismert eredmények. (Ez az eredmény írásban még nem publikált.)

A dualitáselmélet szerint, ha egy véges algebra rendelkezik n-változós többségi kifejezésfüggvénnyel valamely n-re, akkor az általa generált kvázivarietás algebrái a klasszikus Pontrjagin-, Stone-, illetve Priestley-féle dualitáshoz hasonlóan topológiai módszerekkel leírhatóak. Ha az algebra kongruenciadisztributív varietást generál, akkor a többségi kifejezésfüggvény létezése nem csak elégséges, hanem szükséges feltétele is a dualizálhatóságnak. A [DHM] cikk szerzői több, mint tíz éve tették fel azt a kérdés, hogy egy véges algebráról eldönthető-e, hogy rendelkezik többségi kifejezésfüggvénnyel. Jól ismert, hogy egy algebra akkor és csak akkor rendelkezik többségi kifejezésfüggvénnyel, ha létezik olyan kifejezésfüggvény, amely az általa generált varietás két elem által generált szabad algebrájában a két generátorelemre megszorítva többségi függvényként viselkedik. Ezért is érdekes McKenzie [Mc2] nem publikált eredménye, amelyben megmutatja, hogy véges algebrákban a többségi függvény létezése eldönthetetlen, ha azt két rögzített elemre vizsgáljuk. A [24] cikk fő eredménye ezt kiterjeszti kételemű részhalmazról nagyobb részhalmazokra, de nem a teljes algebrára. Mind a két eredmény olyan algebrák vizsgálatán alapszik, melyeknek van elnyelő tulajdonságú eleme, ami egy többségi függvénnyel rendelkező algebrának nem lehet. Ezért nagy meglepetést jelentett a [28] kézirat eredménye, amely megmutatja, hogy a többségi kifejezésfüggvény létezése eldönthető véges algebrákban. Ennek a ténynek egyik következménye, hogy kongruenciadisztributív varietást generáló véges algebrákról eldönthető, hogy az általuk generált kvázivarietás dualizálható-e.

A Hobby–McKenzie-féle struktúraelmélet öt típusba sorolja a véges egyszerű algebrákat. Az 5-ös típus kivételével ezen algebrák szabad spektrumának aszimptotikus viselkedését Berman [Be] pontosan meghatározta; 5-ös típus esetén a probléma nyitott. [25]-ben minden k pozitív egészre megadunk olyan 5-ös típusú véges egyszerű algebrát, amelynek szabad spektruma aszimptotikusan $2^{f(n)}$, ahol $f(n)=n^k$ vagy $f(n)=n^k \lg(n)$. Az a sejtés, hogy 5-ös típusú véges egyszerű algebra szabad spektruma nem lehet aszimptotikusan más, mint az e példákban fellépő lehetőségek.

Adott véges A relációstruktúra esetén az A-ra vonatkozó homomorfizmus problémának a következő döntési problémát nevezik: tetszőleges (A-hoz hasonló) I relációstruktúra esetén eldöntendő, hogy létezik-e I-t A-ba képező homomorfizmus. Ez a probléma, amelyet a továbbiakban Hom(A)-val jelölünk, a számítástudományban `constraint satisfaction problem' néven ismert, s nagy figyelmet kap sokrétű alkalmazásai miatt (pl. sceduling, machine vision, belief maintenance, temporal reasoning). Mivel Hom(A) nem-determinisztikus polinom idejű algoritmussal nyilván megoldható, a fő kérdés az, mely esetekben van determinisztikus polinom idejű algoritmus. A várt választ kifejező dichotómia-sejtés szerint a Hom(A) probléma minden A-ra vagy polinom idejű vagy NP-teljes.

Jeavons [Je] ismerte fel, hogy a Hom(A) probléma bonyolultságát meghatározza az A relációival kompatibilis műveletek C klónja. Ismert, hogy

(1) a Hom(A) probléma redukálható arra az esetre, amikor C idempotens, s hogy
(2) ez esetben, ha C-ben nincs Taylor-művelet, akkor Hom(A) NP-teljes.

A sejtés az, hogy ha C-ben van Taylor-művelet, akkor Hom(A) polinom idejű.

A többségi függvények a Taylor-műveletek egy fontos speciális osztályát alkotják. Nyitott kérdés, hogy polinom időben eldönthető-e tetszőleges véges relációstruktúra esetén, hogy létezik-e kompatibilis többségi függvénye. A [14] cikk azon véges gráfok leírását adja, amelyeken létezik kompatibilis többségi függvény. A gráfok esetén kapott eredmények sok tekintetben hasonlóak a szerzők korábbi, kompatibilis többségi függvénnyel rendelkező részbenrendezett halmazok jellemzésére vonatkozó eredményeihez, ld. [LZ]. Pl. érvényben marad a kompatibilis többségi függvény létezésének polinom időben való eldönthetősége. Ugyanakkor fellépnek különbségek is. Pl. gráfokra érvényét veszti Kun és Szabó [KSz] összefüggő véges részbenrendezett halmazokra vonatkozó eredménye, mely szerint az idempotens részalgebrák lebonthatósága ekvivalens egy kompatibilis többségi függvény létezésével.

2. A klónháló szerkezete véges, illetve végtelen alaphalmazon

Post [Po] nyomán ismert az összes klón kételemű alaphalmazon, nagyobb (véges vagy végtelen) A alaphalmazon azonban a teljes leírás reménytelen feladat, mivel már véges A-ra is a klónok száma kontinuum. Ezért a klónháló valamilyen szempontból kitüntetett szerepet játszó részeit érdemes vizsgálni.

Több, mint húsz éves előzményekre tekint vissza a nagy szimmetriával rendelkező klónok vizsgálata (ld. pl. [CsG], [Ma1]), illetve azon klónok vizsgálata, amelyek unér része tartalmaz nagy permutációcsoportot (pl. [HR]). Mindezek a klónok teljesítik azt a feltételt, hogy valamely G (A-n ható) \`nagy' permutációcsoport esetén zártak a G-beli permutációkkal való konjugálásra; ezeket a klónokat röviden G-zárt klónoknak nevezzük. A [7] könyvfejezet a G-zárt klónokról addig ismert eredményekről ad áttekintést; ezen kívül egyszerű bizonyítást vázol Hoa [Hoa1-3] és Marchenkov [Ma2] S_A-zárt klónokat leíró eredményeire, és bejelenti [23] fő eredményét, amely a következő: véges A ($|A|>2$) alaphalmazon a G-zárt klónok közül az összes konstanst tartalmazó klónok száma akkor és csak akkor véges, ha G a szimmetrikus vagy az alternáló csoport A-n, vagy pedig G az AGL(1,5) ($|A|=5$), PSL(2,5) ($|A|=6$), PGL(2,5) ($|A|=6$), PGL(2,7) ($|A|=8$), PGL(2,8) ($|A|=9$), PGammaL(2,8) ($|A|=9$) csoportok valamelyike. Ezzel elérhető közelségbe került mindazon G csoportok meghatározása, amelyekre a G-zárt klónok száma véges: Marchenkov [Ma3-4], illetve Szabó [Sza] korábbról ismert eredményei szerint ugyanis elegendő megvizsgálni, hogy a fent felsorolt hat kivételes csoport közül melyekre véges az idempotens G-zárt klónok száma. Három csoportra sikerült már megmutatni, hogy a szóban forgó klónok száma véges, s biztató részeredmények vannak a maradék három csoport esetén is.

Adott A alaphalmazon a klónháló szerkezetének megismerésében az egyik gyümölcsözőnek bizonyult megközelítés a klónok osztályozása az unér részük alapján. A klónok unér részei pontosan a transzformációmonoidok A-n, s bármely M transzformációmonoidra azon klónok, amelyeknek az unér része M, egy $I(M)$ intervallumot alkotnak a klónhálóban. A továbbiakban fölesszük, hogy A véges és $|A|>2$. Ekkor A-n csak véges sok különböző M transzformációmonoid van, de kontinuum sok klón. Ezért természetes probléma az $I(M)$ intervallumok számosság szerinti osztályozása. Az első ilyen eredmények egyike Pálfy [P] nevezetes tétele, amely szerint ha M tartalmazza az összes konstanst, de azokon kívül csak permutációkból áll, akkor az $I(M)$ intervallum egy- vagy kételemű; kételemű pontosan akkor, ha M egy véges vektortér unér polinomfüggvényeinek monoidja.

A [17] cikk tárgya tetszőleges véges hálókból konstruált M (maximális) inverz monoidok esetén az $I(M)$ intervallum vizsgálata. A vizsgált osztályba tartozó M monoidok esetén szükséges és elegendő feltételt adunk arra, hogy az $I(M)$ intervallum egyelemű legyen, illetve megadunk egy olyan részosztályt, amelybe tartozó M-ekre az $I(M)$ intervallum kontinuum sok klónt tartalmaz. A kapott eredmények már háromelemű alaphalmaz esetén is szolgáltatnak új ismereteket.
[26]-ban – Pálfy tételét kiterjesztve – megadjuk az összes olyan M monoidot, amelyre M csak konstansokból és permutációkból áll, tartalmaz legalább egy konstanst, és $I(M)$ egyelemű.

Az algebrák egyik fontos kísérő struktúrája a klónjuk centralizátora, azaz a műveleteikkel felcserélhető műveletek halmaza. Véges halmazon a klónok centralizátorai éppen a primitív pozitív klónok, azaz azok a klónok, melyek tartalmazzák a primitív pozitív formulákkal definiálható műveleteket is.

[29]-ben meghatározzuk a véges, egyszerű, idempotens algebrák klónjának és a kongruenciadisztributív varietást generáló véges algebrák polinomfüggvényei klónjának a centralizátorát. Az utóbbiak éppen a diagonális algebrák klónjai, az előbbiek pedig olyan klónok, melyek egyrészt a vektorterek polinomfüggvényei halmazaként adódnak, másrészt amelyeket permutációk és konstans műveletek

generálnak. Ezen kívül leírjuk azon véges, egyszerű, nem erősen Abel-féle algebrákat is, melyek polinomfüggvényeinek klónja primitív pozitív. Ha egy ilyen algebra nem affin, akkor vagy függvényteljes, vagy pontosan azok a műveletek a polinomfüggvényei, amelyek egy adott félháló művelettel felcserélhetők. Az erősen Abel-féle algebrákra vonatkozóan csak részeredményeket sikerült elérni.

A [9] áttekintő cikk, amely a szerző által tartott előadássorozat alapján, s az Algebra Universalis c. folyóirat főszerkesztőjének felkérésére készült, teljességre törekedve vázolja a minimális klónokra vonatkozó vizsgálatok 60 évében történteket, különös tekintettel az utóbbi 30 évre.

3. Varietásokra vonatkozó problémák

A véges algebrák struktúraelmélete hatékonyan alkalmazható a lokálisan véges varietások és kvázivarietások tanulmányozásában. Ugyancsak rendkívül fontos eszköztárat kínál a kommutátorelmélet, amely nem korlátozódik lokálisan véges varietásokra, illetve kvázivarietásokra. Az elmúlt 15 évben mindezek alapvető szerepet játszottak fontos strukturális eredmények és új végesbázis-tételek bizonyításában.

A [6] cikk végesen generált kvázivarietások véges kváziazonosság-bázisának létezésével foglalkozik. A szerzők bebizonyítják, hogy minden végesen generált, kongruencia-metszet-féligdisztributív kvázivarietás beágyazható egy végesen generált, véges kváziazonosság-bázissal rendelkező kvázivarietásba, amely a [12] cikk egyik eredményének általánosítása. A [6] cikk eredményei ennél sokkal mélyebbek, amelyeket úgy lehet legegyszerűbben megfogalmazni, ha még nem publikált eredményeket is felhasználunk. Ezek szerint minden végesen generált, relatív kongruencia-metszet-féligdisztributív kvázivarietásnak van véges kváziazonosság-bázisa. Ez mind Pigozzi [Pi], mind Willard [Wi] nevezetes véges bázis tételének általánosítása. Nyitott még az a kérdés, hogy a végesen generált, relatív kongruenciamoduláris kvázivarietások rendelkeznek-e véges kváziazonosság-bázissal, amely McKenzie [Mc1] véges azonosságbázis tételének lenne általánosítása.

Az [5] cikkben megmutatjuk, hogy ha egy lokálisan véges varietás eleget tesz egy nemtriviális idempotens Malcev feltételnek, akkor a varietásban szereplő minden véges algebrán a kompatibilis részbenrendezett halmazok (topológiák) homotópia csoportjai triviálisak. Továbbá Hobby–McKenzie [HMc] jellegű típuskizárási tételeket bizonyítunk lokálisan véges varietásokra. Belátjuk, hogy a varietásban szereplő véges algebrák kompatibilis részbenrendezett halmazaira (topológiáira) kirótt különböző feltételek ekvivalensek azzal, hogy a varietás típushalmazában az öt Hobby–McKenzie-féle típus közül bizonyosak nem szerepelnek.

A Malcev-feltétellel jellemezhető tulajdonságok rendkívül fontos szerepet játszanak a varietások vizsgálatában. A legismertebb Malcev-feltételek a kongruenciák viselkedését leíró feltételek, mint pl. a kongruenciadisztributivitás és a kongruenciamodularitás. A [14] cikkben bebizonyítjuk, hogy több jól ismert ilyen tulajdonság – pl. a kongruenciadisztributivitás, a kongruenciamodularitás és a többségi term létezése – egybeesnek olyan varietásokban, amelyeket véges gráf-primál algebra generál.

A [11] cikk szerzői optimális Malcev-feltételt konstruálnak tetszőleges olyan hálóazonosságra, amely erősebb a modularitásnál. Emellett a tolerancia metszési tulajdonságon alapuló technikával a szerzők új egyszerű bizonyítást adnak Jónsson és Nation egyik eredményére, majd a harmadik szerző korábbi eredményét általánosítva igazolják, hogy kongruenciamoduláris varietás kongruenciáira a hálókifejezések két lépésben értékelhetők ki: az első lépés a kongruenciadisztributivitásnak, a második pedig a kongruencia-felcserélhetőségnek felel meg.

Az [1] cikk olyan kongruenciasémát és abból származó Malcev-feltételt ír le varietás kongruenciadisztributivitásának jellemzésére, amely azonnal implikálja a Day-féle Malcev-feltételt. Fontos rész a cikkben az a tétel is, hogy varietásokban a \`trapéz lemma' vagy más szóval \`trapéz séma' ekvivalens a \`trapéz elvvel', és ily módon ez a cikk Kearnes és Kiss [KK] mélyebb eredményének is előfutára. A [3] cikk a kongruencia-metszet-féligdisztributivitást, továbbá felcserélhetőség esetén annak bizonyos általánosításait jellemzi kongruenciasémákkal.

Egy algebrát uniformnak nevezünk, ha bármely kongruenciája esetén a kongruencia blokkjai azonos elemszámúak. Egy kongruenciát 2-uniformnak mondunk, ha minden blokkja kételemű. Nemrég Kaarli [Kaa], a [GQS] cikkben felvetett problémát megoldva megmutatta, hogy a véges uniform hálók kongruencia-felcserélhetőek. Ehhez kapcsolódóan a [21] cikk megmutatja, hogy többségi kifejezéssel rendelkező varietás véges algebrájának bármely két 2-uniform kongruenciája felcserélhető. 2-uniform helyett 3-uniformra azonban analóg állítás nem igaz.

4. Reguláris félcsoportok

Az inverz félcsoportok struktúraelméletében két fontos, lényegében a 70-es években kialakult olyan megközelítési mód van, amely az inverz félcsoportokat úgy építi föl félhálókból és csoportokból, hogy ezek szemidirekt szorzatát használja. Ez a két megközelítés egymás duálisa abban az értelemben, hogy az egyik úgy kapja meg az összes inverz félcsoportot, hogy veszi a félhálók csoportokkal vett szemidirekt szorzatainak inverz részfélcsoportjait, majd ezek idempotens-szétválasztó homomorf képeit, a másik pedig a félhálók csoportokkal vett szemidirekt szorzatainak idempotens-szétválasztó homomorf képeit, majd ezek inverz részfélcsoportjait. Az első megközeltés McAlister és O'Carroll, a második McAlister és Lawson nevéhez fűződik (ld. [L]).

Az első megközelítést számos irányban általánosították, ld. [Pa], [SzM1], [SzM2], [B2], [GG], [BSz], stb. Az utóbbi eredménynek és a [PP]-beli beágyazási tételnek a közös általánosításaként [B3]-ban megjelent azon lokálisan inverz félcsoportok jellemzése, amelyek beágyazhatók általánosított inverz félcsoport feletti Rees-mátrix félcsoportokba. A [8] cikkünkben megmutatjuk, hogy ezek éppen azok a lokálisan inverz félcsoportok, amelyeknek van gyengén E-unitér fedője.

A második megközelítést eddig sokkal kevesebb irányban sikerült általánosítani, és csak az utóbbi években, ld. [DoE], [HaM]. Itt a probléma lényege azon félcsoportok meghatározása, amelyek előállnak bizonyos szemidirekt-szerű szorzatok (idempotens-szétválasztó) homomorf képeként. A [22] cikkben általánosítjuk a gyengén tágas félcsoportok osztályára a megengedő halmaz fogalmát, és bevezetjük a balról majdnem faktorizálható gyengén tágas félcsoportokat. Ezen fogalmak segítségével az inverz félcsoportokra ismert eredmények nagy részét általánosítjuk a gyengén tágas félcsoportok osztályára. A félháló csoporttal vett szemidirekt szorzatának szerepét itt egy $W(T,Y)$ félcsoport veszi át, ahol Y félháló, T olyan unipotens monoid, amely hat Y-on, $W(T,Y)$ pedig a megfelelő szemidirekt szorzat meghatározott részfélcsoportja, ld. [FG]. Jelentősen általánosítva [EF]-et, a [27] cikk fő eredménye szükséges és elegendő feltételt ad arra, hogy egy balról tágas félcsoportok mely fedői kaphatók meg balról majdnem faktorizálható gyengén tágas félcsoportba való beágyazásból. A [20] cikk összefoglalást nyújt a fent vázolt kutatási téma eredményeiről, többek között a [22]-ben és [27]-ben közöltekről is.

Az elmúlt években az ún. F-inverz félcsoportok a matematika több területén, az algebrán kívül is megjelentek. Kb. 30 év óta ismert, hogy minden inverz monoidnak van F-inverz fedője. Az ismert konstrukciók azonban, amelyek tetszőleges inverz monoidhoz F-inverz fedőt készítenek, nem őrzik meg a végességet, és nyitott kérdés, hogy van-e minden véges inverz monoidnak véges F-inverz fedője. Az érdeklődés előterébe kb. 12 éve került ez a probléma, amikor Henckell és Rhodes [HR] megmutatta, hogy az igenlő válaszból következne, hogy az ún. csoportfedő [más néven pontszerű] problémára is igenlő a válasz. Az utóbbi kérdésre valóban igenlő a válasz, ezt Ash [As] bizonyította. [16]-ban megmutatjuk, hogy a véges F-inverz fedők létezésére vonatkozó kérdés ekvivalens a véges relatívan szabad csoportok Cayley-gráfjainak bizonyos – meglehetősen bonyolult – tulajdonságával. Ezt felhasználva bebizonyítjuk, hogy a kérdés megválaszolásához elegendő véges inverz monoidoknak egy viszonylag szűk seregét vizsgálni. Az utóbbi eredmény meglepő következménye, hogy ha pl. az n-dimeziós kockák mint Cayley-gráfok rendelkeznek az említett tulajdonsággal, akkor az összes véges csoport Cayley-gráfja is rendelkezik vele.

Az E-tömör lokálisan inverz félcsoportokat jellemzi az a tulajdonságuk, hogy rajtuk a legkisebb inverz-félcsoport kongruencia idempotens osztályai teljesen egyszerű félcsoportok. A [30] cikk fő eredménye azt igazolja, hogy minden E-tömör lokálisan inverz félcsoport beágyazható teljesen egyszerű félcsoport inverz félcsoporttal vett lambda-szemidirekt szorzatába; általánosítva ezzel a szerzőnek B. Billhardttal közösen nyert korábbi eredményét [BBSzI], mely szerint inverz félcsoportok idempotens-szétválasztó bővítései beágyazhatóak csoportnak inverz félcsoporttal vett lambda-szemidirekt szorzatába.

5. Hálók, mint kísérő struktúrák

A [12] cikk néhány eredménye teljesen hálóelméleti módszerekkel is bizonyítható, amelynek egyik következménye, hogy minden olyan metszet-féligdisztributív algebrai hálóban, amelyben csak megszámlálható sok kompakt elem van, a zéruselem a metszet-prím elemek teljes metszete. Ez a tulajdonság a Jónsson–Kiefer-tulajdonság duálisa, ami több algebrai problémában természetes módon jelenik meg. Például, minden kvázivarietás részkvázivarietásainak hálója rendelkezik a Jónsson–Kiefer-tulajdonsággal. A [15] cikk az előbb említett eredmény mellett negatív választ ad Gorbunov kérdésére, hogy minden metszet-féligdisztributív algebrai hálóban a metszet-prím elemek teljes metszete a zéruselem.

A kongruenciahálók speciális kísérőhálók, melyek vizsgálatának fontos eszközei a kongruenciasémák. Ilyen pl. a klasszikus Gumm-féle „shifting lemma” vagy az [1]-beli trapézséma. A [2] cikkben a szerzők felismerik, hogy a kongruenciasémák alapjául egy tisztán hálóelméleti fogalom, a hálóazonosság „shift”-je szolgál. A cikk példákat hoz olyan azonosságokra, amelyeknek van shiftje, és olyanokra is, amelyeknek nincs.

Czédli, Larose és Pollák [CzLP] eredménye szerint koalícióhálókban, amelyek bizonyos véges részbenrendezett halmazok kísérőhálói, bármely két maximális lánc azonos hosszúságú. Ezt erősíti a [10] cikk eredménye: ha a koalícióhálót – egy rekurziót adó struktúratételnek megfelelően – két részfélháló diszjunkt uniójára bontjuk, akkor nemcsak a maximális lánc hossza invariáns, hanem az is, hogy a láncon felfelé haladva hányszor ugrunk át az egyik félhálóból a másikba, hányszor a másikból az egyikbe, és hány esetben nincs ugrás.

6. Kombinatorikai és egyéb kérdések

A [14] cikknek az 1. és 3. témakörben leírt eredményei jól mutatják, hogy nincs éles választóvonal a véges algebrák struktúrájának vizsgálata és a számítástudományi alkalmazások miatt fontos homomorfizmus probléma által fölvetett bonyolultsági kérdések vizsgálata között. A kialakult algebrai eszközök jól alkalmazhatóak olyan esetekben is, amikor a struktúrákra tett megszorítás nem algebrai, hanem algoritmikus eredetű.

A [19] cikkben tanulmányozzuk a Feder és Vardi által [FV]-ben definiált `bounded width' struktúrákat. Megmutatjuk, hogy egy tetszőleges *A* `bounded width' struktúrához természetes módon hozzárendelt algebra által generált varietás típushalmazában nem jelenik meg a Hobby–McKenzie-féle struktúraelméletben szerepet játszó öt típus közül kettő: az 1-es és az 5-ös típus. A kapott eredményeket alkalmazva különféle *A* struktúrák esetén belátjuk, hogy nem dönthető el lokálisan működő polinom idejű (ún. `bounded width') algoritmussal a Hom(*A*) probléma. Feltéve, hogy P nem egyenlő NP-vel, sikerült konstruálnunk olyan rendezésprimál algebrát, amely által generált varietás típushalmazából hiányzik az 1-es, de benne van a 2-es típus. Ilyen rendezésprimál algebrák létezése eddig nyitott kérdés volt.

A [18] cikkben véges algebrák feletti polinom-egyenletrendszerek megoldhatóságát vizsgáljuk. Korábban Tesson [Te] a monoidok körében, Goldmann és Russel [GR] a csoportok körében jellemezték azon algebrákat, melyek fölött tekintett polinom-egyenletrendszerekről polinom idejű algoritmussal eldönthető, hogy létezik-e megoldásuk. A [18] dolgozat fő eredménye a következő: azon véges *A* algebrák esetén, melyek által generált varietás nem tartalmaz Hobby–Mckenzie-féle 1 és 5 típust, az *A* fölötti polinom-egyenletrendszerek megoldhatósága polinom időben eldönthető, amennyiben *A* polinomiálisan ekvivalens egy modulussal, különben pedig a probléma NP-teljes. Ez messzemenő általánosítása Goldmann és Russel csoportokra vonatkozó eredményének. Következményként pl. kvázicsoportokra, illetve gyűrűkre a csoportokéhoz hasonló eredmények adódnak.

***

A fentieken kívül a pályázat folyamán konzultációt, illetve közös kutatást folytattunk az alábbi kutatókkal, akik számára a pályázatból kifizetés történt:

R. Pöschel (klónok véges alaphalmazon),
J. Jezek (kvázivarietások),
Fried Ervin (egyenletekkel definiálható főkongruenciák),
Stephan Foldes (klónoknál általánosabb művelethalmazok),
I. Chajda (kongruenciákra vonatkozó feltételek),
R. Madarász (hatvány struktúrák),
Ewa Graczynska (speciális azonosságok)

***

Irodalom

[As] Ash CJ
Inevitable graphs: A proof of the Type II conjecture and some related decision procedures
Internat. J. Algebra Comput. 1 (1991), 127-146

[Be] Berman J
Free spectra gaps and tame congruence types
Internat. J. Algebra Comput. 5 (1995), 651-672

[B2] Billhardt B
On embeddability into a semidirect product of a band by a group
J. Algebra 206 (1998), 40-50

[B3] Billhardt B,
Embedding locally inverse semigroups into Rees matrix semigroups
Semigroup Forum 65 (2002), 113-127

[BSz] Billhardt B; Szendrei MB
Weakly E-unitary locally inverse semigroups
J. Algebra 267 (2003), 559-576

[BBSzI] B. Billhardt; I.Szittyai
On embeddability of idempotent separating extensions of inverse semigroups
Semigroup Forum 61 (2000), 26-31

[Bu] Bulatov AA
Three-element Mal'tsev algebras,
Acta Sci. Math. (Szeged), megjelenés alatt.

[CsG] Csákány B; Gavalcová T
Finite homogeneous algebras.I
Acta Sci. Math (Szeged) 42 (1980), 57-65

[CzLP] Czédli G; Larose B; Pollák Gy
Notes on coalition lattices
Order 16 (1999) 19-29

[DHM] Davey B A; Heindorf L; McKenzie R
Near unanimity: an obstacle to general duality theory
Algebra Universalis 33 (1995), 428-439

[DoE] Dombi E
Almost factorisable straight locally inverse semigroups
Acta Sci. Math. 69 (2003), 569-589

[EF] El Qallali A; Fountain J
Proper covers for left ample semigroups
Semigroup Forum, megjelenés alatt.

[FV] Feder T; Vardi MY
The Computational structure of monotone monadic SNP and constraint satisfaction: a study through datalog and group theory
SIAM Journal of Computing 28 (1998), 57-104

[FG] Fountain J; Gomes GMS
Proper left type-A monoids revisited
Glasgow Math. J. 35 (1993), 293-306

[GR] Goldmann M; Russell A
The complexity of solving equations over finite groups
Inform. and Comput. 178 (2002), no. 1, 253-262

[GG] Gomes GMS; Gould V
Proper weakly left ample semigroups
Internat. J. Algebra Comput. 9 (1999), 721-739

[GQS] Grätzer G; Quackenbush RW; Schmidt ET
Congruence-preserving extensions of finite lattices to isoform lattices
Acta. Sci. Math. (Szeged), 70 (2004), 473-494

[HR] Haddad L; Rosenberg IG
Finite clones containing all permutations

Canad. J. Math. 46 (1994), 951- 970
[HaM] Hartmann M
Almost factorizable orthodox semigroups, kézirat.
[HR] Henckell K; Rhodes J
The theorem of Knast, the PG= BG and type II conjectures,
Monoids and Semigroups with Applications (Berkeley, CA, 1989)
World Scientific, River Edge, 1991; pp. 453- 463.
[Ho1] Hoa [Khoa], Nguen Van
On the structure of self- dual closed classes of three- valued logic P_3
Diskretn. Matematika 4 (1992), 82- 95
[Ho2] Hoa [Khoa], Nguen Van
Families of closed classes of k- valued logic that are preserved by all automorphisms
Diskret. Mat. 5 (1993), no. 4, 87- 108
[Ho3] Hoa [Khoa], Nguen Van
Description of closed classes that are preserved by all inner automorphisms
of k- valued logic
Dokl. Akad. Nauk Belarusi 38 (1994), no. 3, 16- 19, 122 (Russian)
[HMc] Hobby D; McKenzie, R
The structure of finite algebras
Contemporary Mathematics 76
American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.
[Je] Jeavons PG
On the algebraic structure of combinatorial problems
Theoretical Computer Science, 200 (1998), 185- 204
[Kaa] Kaarli K
Finite uniform lattices are permutable
Acta Sci. Math. (Szeged), megjelenés alatt.
[KK] Kearnes KA; Kiss EW
The triangular principle is equivalent to the triangular scheme
Algebra Universalis 54 (2005), 373- 383
[KSz] Kun G; Szabó Cs
Order varieties and monotone retractions of finite posets
Order 18 (2001), 79- 88
[LZ] Larose B; Zádori L
Algebraic properties and dismantlability of finite posets
Discrete Math. 163 (1997), 89- 99
[L] Lawson MV
Inverse Semigroups: The Theory of Partial Symmetries
World Scientific, Singapore, 1998
[Ma1] Marchenkov SS
Homogeneous algebras
Problemy Kibernet. 39 (1982), 85- 106 (Russian)
[Ma2] Marchenkov SS
S- classification of functions of many- valued logic
Diskret. Mat. 9 (1997), no. 3, 125- 152 (Russian),
[Ma3] Marchenkov SS
A- closed classes of many- valued logic that contain constants
Diskret. Mat. 10 (1998), no. 3, 10- 26 (Russian)
[Ma4] Marchenkov SS
A- classification of idempotent functions of many- valued logic
Diskretn. Anal. Issled. Oper. Ser. 1, 6 (1999), no. 1, 19- 43, 97 (Russian)
[Mc1] McKenzie R
Finite equational bases for congruence modular varieties
Algebra Universalis 24 (1987), 224- 250
[Mc2]McKenzie R
Is the presence of a nu- term a decidable property of a finite algebra?
kézirat, 1997
[P] Pálfy PP
Unary polynomials in algebras I
Algebra Universalis 18 (1984), 262- 273

[Pa] Pastijn F
Rectangular bands of inverse semigroups
Simon Stevin 56 (1982), 1- 97
[PP] Pastijn F; Petrich M
Straight locally inverse semigroups
Proc. London Math. Soc. (3) 49 (1984), 307- 328
[Pi] Pigozzi D
Finite basis theorems for relatively congruence distributive quasivarieties
Trans. Amer. Math. Soc. 310 (1988), 499- 533
[Po] Post EL
The two- valued iterative systems of mathematical logic
Annals of Math. Studies, No. 5
Princeton Univ. Press, 1941
[Sza] Szabó L
Algebras that are simple with weak automorphisms
Algebra Universalis 42 (1999), 205- 233
[SzM1] Szendrei M
E-unitary regular semigroups
Proc. Roy. Soc. Edinburgh 106A (1987), 89- 102
[SzM2] Szendrei M
On E-unitary covers of orthodox semigroups
Internat. J. Algebra Comput. 3 (1993), 317- 333
[Te] Tesson P
Computational complexity questions related to finite semigroups and monoids
Ph.D. Thesis, School of Computer Science, McGill University, 218 pages
Montreal, 2003.
[Wi] Willard R
A finite basis theorem for residually finite, congruence meetsemidistributive varieties
Journal of Symbolic Logic 65 (2000), 187- 200