Egyes kutatási eredmények rövid ismertetése

A Rényi Intézet maradványképzési kötelezettsége miatt az OTKA-kifizetéseket is vissza kellett fognunk. Ezért kértük a program meghosszabbítását 2006-ra. De az első félév munkájával befejezettnek tekintettük az ezen számú OTKA terhére folytatott kutatást.

A felsorolt publikációk csak egy részének tartalmát ismertetjük az alábbiakban. Azokét, amelyeket könnyebben le lehet írni röviden. A publikációkon kívül meg kell említeni, hogy kutatóink mintegy 170 előadást tartottak nemzetközi konferenciákon ill. külföldi egyetemeken. Az előadások harmadában meghívott előadóként.

Bárány Imre meghívott előadó volt a 2002-ben Pekingben rendezett Nemzetközi Matematikus Kongresszuson. Füredi Zoltánt az MTA levelező tagjai sorába választotta.
Adam Marcus és Tardos Gábor cikkét egy honlapon igen nagyra értékelik: http://www.math.rutgers.edu/ {\~{}}zeilberg/OPINIONS.html. Hamburger és Sali cikkeiről a SIAM News (volume 37(2004), number 1) ír a Venn-diagramok történetét ismertető cikkében. Tardos Gábor benyújtotta, majd megvédte akadémiai doktori értekezését.

Gráfelmélet

A teljes gráf éleinek olyan színezéseit vizsgáltuk, melyekben nem jelenik meg háromszínű háromszög. Egyebek között igazoljuk Bialostocki és Voxman alábbi sejtését, ami Burr egy korábbi eredményét általánosítja: a fenti módon színezett teljes gráfban mindig van olyan egyszínű feszítőfa, mely söprű, azaz előáll egy út végpontjának egy csillag egyik pontjával való azonosításával.

A $h(G)$ Hall-hányados egy G gráf csúcsai számának és legnagyobb független halmaza méretének hányadosa az összes részgráfra maximalizálva. (Korábban például Cropper, Gyárfás és Lehel vizsgálták.) A cikk a Hall-hányados aszimptotikus viselkedését vizsgálja különféle gráfhatványozások esetén. Az ún. konormális hatvány esetében megmutatjuk, hogy a megfelelő határérték a frakcionális kromatikus számmal egyenlő. Két másik hatványozásnál szintén korábban vizsgált mennyiségekkel való egyenlőséget bizonyítunk. További két hatványozás esetén sejtésként mondjuk ki, hogy a vizsgált határérték itt is a frakcionális kromatikus szám lehet.

A mohó algoritmussal kapható szinezési számot is vizsgáljuk (grundy chromatic number) különböző gráfosztályokban. A konstrukciókat véges projektív síkokból ill. differenciahalmazokból kapjuk. Másrészt megmutattuk, hogy az Erdős-Füredi-Hajnal-Komjáth-Rödl-Seress által bevezetett lokális kromatikus szám mindig nagyobb vagy egyenlő, mint a frakcionális kromatikus szám. Bevezetünk egy irányított gráfokra definiált analóg paramétert, és megmutatjuk, hogy az így kapott szám felső korlát a tekintett irányított gráf Sperner kapacitására. Ez utóbbi Noga Alon egy korábbi eredményét általánosítja. Az új korlát segítségével meghatároztuk a páratlan körök egy híján összes irányításának Sperner kapacitását. Az új korlátot frakcionalizálással tovább erősítjük.

A Hadwiger-sejtés egy speciális esetének Ramsey-szerű átfogalmazásával kapcsolatban adunk az eredeti átfogalmazásnál erősebb sejtést, amit kis csúcsszám esetén igazolunk. A probléma egy természetes variánsára bebizonyítunk egy általános érvényű korlátot. Olyan gráfok lokális kromatikus számának értékét vizsgáltuk, amiknél a kromatikus szám és a frakcionális kromatikus szám (a lokális kromatikus szám triviális felső és az előző cikkben bizonyított alsó korlátja) távol esik egymástól. Alapvető példák ilyen gráfokra a Kneser gráfok, Schrijver gráfok, (általánosított) Mycielski gráfok, Borsuk gráfok. A felsorolt gráfcsaládok másik közös jellemzője, hogy kromatikus számuk a Lovász által bevezetett topologikus módszerrel pontosan becsülhető alulról. Megmutattuk, hogy ugyanezen gráfok lokális kromatikus száma szintén becsülhető alulról topologikus módszerrel, s az így adódó becslés (mely a kromatikus szám fele körüli érték) számos esetben pontos. Megfelelő (ennek jelentése többnyire: elegendően nagy) paraméterű Schrijver gráfok, általánosított Mycielski gráfok és Borsuk gráfok lokális kromatikus számát határoztuk meg ilyen módon. A szükséges felső korlát igazolása kombinatorikus érvelést igényelt, melynek bizonyos topológiai következményei is vannak.

Bebizonyítottuk, hogy egy kétrészes gráf élhalmaza polilog számú részre particionálható úgy, hogy az egyes részek egy oldalon lévő maximális és minimális fokszámai csak egy kettes faktorban különböznek egymástól.

A fent használt topologikus alsó becslés módszeréről észrevettük, hogy a fenti gráfok egy másik színezési paraméterének, a cirkuláris kromatikus számnak nemtriviális becslésére is alkalmas abban az esetben, ha a gráf kromatikus száma páros. Ennek révén páros kromatikus számú Kneser gráfokra igazoltuk Johnson, Holroyd és Stahl egy Lovász tételét általánosító sejtését, miszerint a Kneser gráfok cirkuláris kromatikus száma megegyezik a kromatikus számukkal. (Ezt az eredményt tőlünk függetlenül Frédéric Meunier is igazolta.)
Ugyanezzel a módszerrel Chang, Huang és Zhu egy Mycielski gráfokra vonatkozó hasonló sejtését is igazoltuk a páros kromatikus esetben. Egyben megválaszoltuk ugyanezen szerzők egy másik kérdését is, mely azon gráf cirkuláris kromatikus számának értékét kérdezte, amit a Mycielski konstrukció n-szeres alkalmazásával az n csúcsú teljes gráfból kapunk. A páratlan kromatikus esetre beláttuk, hogy Borsuk gráfok és Schrijver gráfok cirkuláris kromatikus száma ilyenkor tetszőlegesen közel lehet a kromatikus számnál eggyel kisebb értékhez, ami a cirkuláris kromatikus szám természetes alsó korlátja.

Több Turán-tipusú gráftételt bizonyí tottunk be, ahol a kizárt gráfok osztályai valamilyen egyszerű tulajdonsággal adottak, mint pédául a szereplő élek száma, vagy valamilyen súlyfüggvény.

Erdős és Simonovits az 1960-as évekből származó sejtését cáfolva belátjuk, hogy van olyan 6-szögmentes n-pontu gráf, amelynek $0.533n^{4/3}$ ele van. Ugyanakkor sikerül egy meglehetősen közeli felső korlátot adni ($0.628n^{4/3}, n> n_0$).

Élesítve Ando es Egawa (1997) illetve Huang es Yeo (1998) eredményeit belátjuk, hogy egy pontelhagyásra kritikus 2-átmérőjű gráf minimális élszáma $(5n-17)/2$, ha n páratlan, és $(5n-14)/2$, ha n páros ($n> 22$).

Fák játék-kromatikus indexéről kaptunk új eredményeket. A probléma a következő: két játékos, Alice és Bob, felváltva színezi egy gráf éleit egy megadott halmazból, és a szokott módon, az érintkező éleknek eltérő színűeknek kell lenniük. Alice szeretné szabályosan kiszínezni a gráfot, míg Bob ellenérdekelt fél. A kérdés persze szoros kapcsolatban van a ma már sokat vizsgált játék kromatikus számmal, de még nagyon kevés ismert róla. Az világos, hogy a GKI a maximális fokszám és annak kétszerese közé esik. Azt is könnyű látni, hogy fák esetén a max fokszám + 2 érvényes felső becslés. Ennél több azonban lényegében nem volt ismert. Eddig két cikk jelent meg fák esetéről, mindkettőben a maximális fokszám = 3. Mindkét cikk a max. fokszám + 1 felső becslést kivánja belátni, de mindkét bizonyí tás hiányos. Cikkünkben a max fokszám ≥ 6 esetet intézzük el teljesen, meg mutatva, hogy a pontos eredmény max fokszám + 1.

Több új témát is vizsgáltunk evoluciós fákkal kapcsolatban. Adott egy fa, egy X halmaz elemeivel egyértelműen címkézett levelekkel. Minden belső élen adott továbbá egy pozitív súly. Bámely levélnégyesre megadható az általuk feszitett részfa "középső útján" számitott súlyfüggvény összeg, a $W(ab|cd).$ Az a kérdés, hogy csupán ezen W függvény ismeretéből mikor rekonstruálható az eredeti fa topológiája, továbbá a bevezetett súlyfüggvény. Megfelelő rekonstrukciós eljárásnak a biomatematikában lehetnek alkalmazásai.

Kidolgoztunk egy nyelvi-történelmi modellt, ami bizonyos tipusú, véletlen gráfokra vonatkozó kérdéshez vezet. A matematikai probléma megoldása még hátra van.

Egyéb kombinatorika

A neves Erdős-Ko-Rado tételre Blokhuis módszerével egy valódi rövid bizonyítást adtunk, amely csupán multilineáris polinomok lineáris függetlenségén alapszik. Hasonló bizonyítások (pl. Frankl és Pach 1983) csak ${n\choose k-1}$-es korlátot adtak.

Bebizonyítottuk, hogy ha egy n-elemű halmazból részhalmazokat választunk ki úgy, hogy nincs közöttük 4 különböző, A,B,C és D, melyekre $A\subset C, A\subset D, B\subset C, B\subset D$ egyaránt teljesülne, akkor a kiválasztott részhalmazok száma legfeljebb $\lfloor {n\over 2}\rfloor + \lceil {n+1\over 2}\rceil$, azaz a két legnagyobb szint a maximális ilyen halmazrendszer. De aszimptotikusan (a főtagot tekintve pontosan, a második tagot egy kettes faktortól erejéig) meghatároztuk azon halmazrendszer maximumális méretét is, amelyben a fenti négy halmaz között már cask valamelyik 3 reláció fennállását tiltjuk. (Pl. $A\subset C, A\subset D, B\subset D$.) Hasonló aszimptotikus eredményt értünk el arra az esetre, ha egy halmaz nem lehet r másik (és egymástól különböző) metszetének része.

Bebizonyítottuk, hogy ha egy n elemű halmaz részhalmazainak rendszere olyan, hogy nincs benne tartalmazás, bármely két tagja metszi egymást és mérete legalább ${n-1 \choose k-1}$, ahol $k< n/2 -c\sqrt{n}$, akkor a halmazok átlagmérete legalább k.

Tekintsünk egy olyan halmazrendszert, amelyben bármely r halmaz metszete legalább s elemű, viszont $l(>r)$ halmaz metszete legfeljebb t. Meghatároztuk a halmazrendszer maximális méretét a paraméterekre vonatkozó bizonyos feltételek mellett.

Aszimptotikusan meghatároztuk az n-elemű halmaz hármasainak maximális számát, ha a következő négy halmaz egyidejű jelenléte nincs megengedve: $\{ abc, ade, bde, cde\}$. Később, egy masik munkában sikerült a pontos maximum meghatározása is.

Korábban sikerült pontosan meghatározni (Sós Vera régi sejtését megoldva) az n-elemű halmaz azon hármasainak maximális számát, amikben a Fano-sík nem szerepel részként. Most egy erre vonatkozó u.n. stabilitási tételt sikerült találnunk: ha a 3-élek száma egy Fano-mentes rendszerben a maximálishoz közeli, akkor a rendszer kevés cserével átvihető az optimálisba.

Sikerült egy 4-uniform Turán-problémát is megoldanunk.

Bebizonyí tottuk, hogy ha egy n-elemű halmaz k illetve $n-k$-elemű részhalmazaiból, mint szögpontokból gráfot alkotunk, ahol az összekötést a tartalmazás definiálja, és $k\leq n/3$, akkor ez a gráf tartalmaz Hamilton-kört.

Korábban felfedezett módszerünket, amely Hamilton-köröket használ különféle kombinatorikus konstrukciók előállítására, továbbfejlesztettük. Legyen adva egy gráf, szögpontjain négyesek egy családja. Keresendő egy Hamilton-kör a gráfban, amelynek semelyik két diszjunkt élének egyesítése e sem egyezik meg az adott négyesek egyikével sem. Fokfeltételeket találtunk, amelyek biztosítják egy ilyen Hamilton-kör létezéset. A tételek alkalmazhatók bizonyos feltételeket kielégítő halmazrendszerek konstrukciójára. Peldaul felállítunk egy Baranyai tétellel analóg sejtést, aminek egy nagyon gyenge változatát be is sikerül bizonyítani.

Meghatároztuk az n-elemű halmaz azon részhalmazainak minimális számát, amelyek uniójaként az összes, legfeljebb 4-elemű halmaz előáll. Ez egy Erdős-sejtésnek egy eddig megoldatlan speciális esete.

Legyen $h(n,s)$ az n-elemű halmaz részhalmazainak maximális száma azon feltétel mellett, hogy bármely két halmaz az alaphalmazt négy olyan részre osztja, amelyek mind legalább s méretűek. Frankl korábban nagyságrendileg pontos alsó és felső becsléseit pontosítjuk tovább. Egy önmagában érdekes segédeszköz egy YBLM tipusú egyenlőtlenség olyan halmazrendszerekre, amelyekben minden páronkénti különbség legalább s méretű.

Definiáltuk az order shatter fogalmát, erre egy tételt bizonyí tottunk, ami Sauer, Perles és Shelah, Vapnik és Chervonenkis eredményeit élesíti. Karakterizáljuk az uniform halmazrendszerekkel, illetve antiláncokkal order shatter-elhető halmazrendszereket, és ennek segítségével Frankl és Pach egy tételét élesí tjük. Ugyanakkor algebrai értelmezést is adunk Gröbner bázisok segítségével.

Egy korábbi munka folytatásaként megvizsgáltuk a különböző osztályméretű function lattice maximális, de nem triviálisan t-metsző rendszereit. A kapott dolgozat tartalmazza az általunk ismert első ilyen eredményt. érdekes, hogy a paraméterek választásától függően két eltérő optimum van.

Az extremális halmazrendszerek problémaköre és a computational algebra egy érdekes kapcsolatára sikerült rámutatnunk.

Szimmetrikus 11-Venn diagramokat sikerült konstruálunk. Azaz Hamburger módszerét kiterjesztve megmutatjuk, hogy létezik szimmetrikus 11-Venn-diagram kevés csúccsal, azaz a csúcsszám levihető 231-ig. Mivel a csúcsszám osztható kell legyen 11-el, és legalább 209, ezért a cikkekben leírt diagram majdnem optimális. Mindamellett ez az első nem monoton Venn-diagram. A módszer a hiperkocka csúcsai ekvivalencia osztályainak megfelelő útfelbontásán alapszik. Ezen cikkekre mint jelentős mérföldkőre hivatkozik a SIAM News, volume 37/number 1, January/February 2004-ban megjelent, a Venn-diagramok történetét ismertető cikk. Egy további ide vonatkozó cikkünkben a szimmetrikus 11-Venn diagramok közül a nagy csúcsszámúakat vizsgáljuk, illetve adunk konstrukciót. A konstrukció Griggs, Killian és Savage egy tételének általánosításán alapszik, ahol karakterizáljuk, mikor lehet a hiperkocka csúcsai ekvivalencia osztályainak egy láncfelbontását síkba rajzolni.

Korábbi kutatásainkat folytatjuk egyszerű 0-1 mátrixok maximális oszlopszámának meghatározására, ha bizonyos F mátrix nem fordul elő részkonfigurációként. Ez a modell sok klasszikus problémát foglal magában. Teljesen sikerült karakterizálni a $3\times l$ esetet, kimondtunk egy sejtést a $k\times 1$ esetre, és megfogalmazunk egy Erdős-Stone típusú sejtést az általános esetre. Egy másik cikkben azt vizsgáljuk, hogy a k x l-es tiltott konfigurációk esetén milyen feltételek viszik le a felső korlátot $O(m^k)$-ról $O(m^{k-1})$-re. A korábban kimondott sejtés alapján adódó két feltétel közül az egyiket bebizonyítjuk, lineáris algebrai módszerekkel. A bizonyításokban funkcionális függőségek fogalomkörébe tartozó gondolatokat is használunk.

A tiltott 0,1 mátrixokra vonatkozó, látsz=lag hasonló. de igazában nagyon különböző másik kérdést is vizsgáltunk. A-nak, vagy egy részmátrixából egyesek nullára változtatásával származtatható. A Turán féle extremális gráfelmélet egy lehetséges általánosításának (rendezett csúcshalmazú gráfokra) felel meg annak a vizsgálata, hogy hány egyes lehet egy n-szer n-es A 0-1 mátrixban, ha egy (vagy néhány) fix P mátrixot nem tartalmaz. Ennek vizsgálatát kezdte meg Füredi és Bienstock és Győri 1990-ben megjelent cikkükben, majd Füredi és Hajnal 1992-ben. Ezeket a vizsgálatokat folytattuk most cikkünkben, mely főleg a négy egyest tartalmazó kizárt P részmátrixok esetét vizsgálja. Az extremális függvény nagyságrendjét meghatározza a cikk, ha csak egyetlen ilyen kizárt mátrixot vizsgálunk, a legmeglepőbbek viszont a kizárt mátrixok párjaira vonatkozó eredmények.

1992-ből származik Füredi Zoltán és Hajnal Péter alábbi sejtése: Egy adott P permutációmátrixot nem tartalmazó n-szer n-es 0-1 mátrixban $O(n)$ darab 1-es van. Ricahard Stanley és Herbert Wilf (ugyanebből az időből származó) sejtése szerint egy adott π permutációt nem tartalmazó n-permutációk száma $2^{O(n)}$. Martin Klazar egy eredménye szerint a Füredi-Hajnal sejtésből következik a Stanley-Wilf sejtés. Most sikerült mindkét sejtést igazolnunk, amikor egyszerű bizonyítást adtunk a Füredi-Hajnal sejtésre. Korábban a Stanley-Wilf sejtést számos speciális permutációra belátta Bóna Miklós. Noga Alon és Ehud Friedgut ugyancsak belátta a sejtést néhány speciális permutációra, de általánosságban az exponenciálisnál csak hajszálnyival nagyobb felső becslést tudtak adni.

Egy régi, Witsenhausentól származó, gráfelméleti kérdésre vezető forráskódolási probléma egy természetes általánosítását dolgoztuk ki. Azt mutatjuk meg, hogy több forrás egyidejű un. zéro-hibájú kódolásakor a legjobb kódnak nem kell rosszabbnak lennie, mint amit a szóbanforgó források közül a számunkra legkedvezőtlenebb egymaga is előír. A bizonyítás Gargano, Körner es Vaccaro egy mély tételén alapul.

A síkból n háromszöget kivágva n-ben négyzetesen sok összefüggő részre eshet szét, de korábban ismert volt, hogy ha a háromszögek legkisebb szöge egy konstans $\epsilon>0$ korlát fölött marad, akkor a részek száma már $O(n)$. Az átalunk elért új korlát ϵ-tól való függését javítja majdnem optimálisan.

A következő problémára adtunk erős alsó becslést: Ha egy $n\times k$ valós mátrix minden eleme különböző, akkor legalább hány különböző páronkénti összeg képezhető a matrix egy sorának két elemét összeadva. J. Solymosi és Cs. Tóth egy ereményét felhasználva a fenti becslés javítja a következő geometriai Erdős problémára ismert legjobb alsó becslést: n különböző pont a síkban legalább hány különböző távolságot határoz meg. Az itt kifejlesztett módszereket használjuk rokon problémák vizsgálatára is, például hány egyenlőszárú háromszöget határozhat meg a síkon n pont, vagy hányszor fordulhat elő n pont között a k leggyakoribb távolság.

Újabb kutatásba kezdtünk a paraméteres, de nem feltétlenül tökéletes pattern matching problémakörében, aminek a genetikus kódok felépítésében lehet szerepe. Adott két véges ábécé Σ_1 és $\Sigma_2.$ Adott egy (általában hosszú) szöveg az első fölött, továbbá egy (általában rövid) minta. Egy paraméteres, nem tökéletes minimális pattern matching a szöveg egy kezdőpozíciójából, továbbá egy $\pi: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$ egy-egy értelmű leképezésből áll (ha a két ábécé eltérő méretű, akkor lehetnek páratlan betűk), amely csökkenti a minta képe és a szöveg megfelelő szakasza közötti nem-megegyezések számát. A cél az, hogy gyors algoritmust találjunk a feladat összes pozícióra való megoldására. Egy triviális megközelítés a következő: minden kezdőpozicióra felépítünk egy páros gráfot, amely a σ_1, σ_2 típusú találkozó párok számával van élsúlyozva, majd maximális súlyú párosítást keresünk. A kettő elemű mintaábécére találtunk ennél nagyságrendben gyorsabb megoldást. Egy további, előkészítés alatt álló cikkben az általános mintaábécére találtunk gyors eljárást.

Folytattuk diszkrét geometriai kutatásainkat is. Kiemelendő a Helly tétel egy rácspontos változata, és egy ham-sandwhich-szerű topológiai-geometriai eredmény. Az ICM 2002 kötetbe írt egy összefoglaló cikket rácspontokról és konvex halmazokról Bárány Imre, aki ott meghívott előadó volt.

Feuerbach klasszikus érintési tételére (1822) ismert legegyszerűbb bizonyítást (M'Clelland 1891, Lachlan 1893) még tovább egyszerűusítjük.

A nevezetes Erdős-Rogers (1962) tételre adtunk egy természetesnek tűnő új bizonyítást, amely a Lovász Local Lemmá-n alapul. Eszerint bármely konvex test eltólt példányaiból készíthető a d-dimenzios térnek olyan fedése, amely minden pontot lefed, de csak legjeljebb $10d \log d$ -szer.

Megjavítjuk Einhorn és Schoenberg egy 1966-os eredményét, miszerint bármely d-dimenziós normált térben egy 2-távolságú halmaz számossága legfeljebb 5^d. Az új korlát 4^d, ami már nincs túl messze a sejtett 3^d-től. Általános korlátot is kapunk k-távolságú halmazokra: 2^{kd}.

Egy meglepő elégséges feltételt találtunk arra, hogy politopok uniója mikor lesz konvex.

Effektíven meghatároztuk bizonyos véletlen játékok Nash-ekvilibrium pontjait.

Fontos újabb eredményeket értünk el a véletlen politopok centrális határeloszlástételei témakörében.

Az algebra és a kombinatorika határán

Definiáltunk egy dimenzió fogalmat amenábilis csoportokon értelmezett véges test értékű függvények eltolás invariáns alterein. Kiderült, hogy ez a dimenzió hasonlóan viselkedik a von Neumann dimenzióhoz. Így kiterjeszthető a klasszikus L2-kohomológia elméleti tételek egy része véges test feletti amenábilis csoport algebrákra, például a Lück tétel, ami a csoportalgebrák Grothendieck csoportjának alakjáról szóló eredmény. Elemi bizonyítást kaptunk a hires Cheeger-Gromov tételre.

Bebizonyítottuk, hogy létezik rangfüggvény $k(G)$ csoportalgebra végesen generált modulusain ahol G egy amenábilis csoport, k pedig egy véges test. A complex számtestre ezt korábban Lück bizonyította be operátorelméleti módszerekkel.

A fent említett Lück tételt kiterjesztettük a complex számokról valamennyi testre, egy átlagolt dimenzió segitségével.

Bebizonyítottuk Linnell sejtését amenábilis csoportokra. Ennek következménye az, hogy a Kaplansky sejtésből következik az Atiyah sejtés is amenábilis csoportokra.

Az affin algebrák elméletében klasszikusan vizsgált objektumok a szubexponenciális növekedésű algebrák. Ebben a cikkben bevezetjük az amenábilis algebrák fogalmát, ami tartalmazza az előzőeket is, de tartalmaz exponenciális növekedésűeket is. Jakateongar és Rowen tételeit kiterjesztettük erre az osztályra. Hasonló karakterizációt adunk az amenabilitásra, a paradoxicitás fogalmával, mint az a csoportok esetében ismert volt. Deuber, Simonovits és Sós tételének analogonjával karakterizáltuk az amenabilitáást nullosztó mentes gyűrűkre.

Bebizonyítottuk, hogy amenabilitási szempontból a ferdetestek hasonlóan viselkednek mint a csoportok. A véges Gelfand Kirillov transzcendencia fokú ferdetestek amenábilisak. Amenábilis ferdetestek résztestjei is amenábilisak, de a Cohen féle szabadtest nem amenábilis. Bebizonyítottuk, hogy egy csoport komplex csoportalgebrája akkor és csak akkor amenábilis algebra, ha a csoport amenábilis.

Az algebra egyik klasszikus kérdése a nullosztó sejtés. Igaz-e, hogy ha G torziómentes, akkor a $C(G)$ csoportalgebra nullosztómentes. Atiyah bebizonyította, hogy az ő integralitási sejtése implikálja a nullosztósejtést. Bebizonyítottuk, hogy amenábilis csoportok esetében a nullosztó sejtés ekvivalens az Atiyah-sejtéssel.

Egy további cikkünkben a p-adikus Hilbert terek és a komplex Hilbert terek invariáns altereinek viselkedését hasonlítottuk össze.

A Mikhael Gromov által bevezetett szofik csoportosztályra vonatkozó eredményeket is elértünk. Ezekre bebizonyítottuk Kaplansky Direkt Végességi sejtését, Connes Beágyazási sejtését, és Lueck Determináns sejtését, ami implikálja ebben a kategoriában a Torzió Homotopia Invariancia Sejtést és az approximációs Sejtést. A determináns sejtés és a beágyazási sejtés esetében eddig csak reziduálisan amenábilis példák voltak, a szofik osztályról pedig beláttuk, hogy a reziduális amenábilis csoportoknál sokkal bővebb osztály.

Egyik cikkünk a pozitívan végesen generált csoportok egy jól használható karakterizációját adja, aminek következtében Lucchini, Lubotzky, Mann és Segal PFG csoportokra vonatkozó sejtéseit bizonyítjuk. Az PFG csoportokat

karakterizáló bizonyítás technikáinak számos új alkalmazását találtuk A.Jaikin-Zapirainnal:
a) Ha G egy véges n dimenziós lineáris csoport, amelyet d elem general, akkor G-t pozitív valószínűséggel generálja $cd+\log n$ véletlen elem (ez az eredmény segíthet a Product Replacement algoritmus elemzésében).
b) Az n elemű r relációval meghatározott véges csoportok száma $<n^cr$. Ez Mann sejtését igazolja, és P. Neumann, Mann, Lubotzky eredményeit élesíti.

Számos ferdetest osztályról bebizonyí tottuk, hogy elemeik amenábilisek.
Továbbá beláttuk, hogy Cohn szabad testje nem-amenábilis.

Két ismert sejtésről, Alain Connes beágyazási sejtéséről, és a Determináns Sejtésről bebizony`tottuk, hogy teljesül szofik csoportokra. Mindkét sejtésre ez adja az első nemreziduálisan amenábilis példát.

Bebizonyítottuk, hogy egy korlátosan generált csoport részcsoportnövekedése legfeljebb $n^{c\log n}$.

Megmutattuk, hogy $n^{\log n}$ és n^n között minden ,,értelmes'' függvény előáll, mint egy végesen generált csoport részcsoportnövekedési függvénye.
Ez számos, Lubotzkyt=l, Segaltól ill. Shalevtól szarmazó korábban nyitott problémát old meg .Peldául kérdés volt hogy $2^(n^x)$. ahol x irracionális, lehet-e növekedési függvény (Segal-Shalev), hogy lehet-e amenábilis csoportnak exponenciálisnál nagyobb növekedése (Lubotzky), stb. "Melléktermékként" kapunk kontinuum sok páronkent nem izomorf, 4 elem által generált reziduálisan véges csoportot, amiknek pontosan ugyanazok a véges faktorai. A bizonyítás egy véges permutációcsoportokra épülő konstrukcióval történik. A cikkbeli eredmény, mint a témakör alaperedménye bizonyítással együtt szerepel A. Lubotzky és D. Segal Subgroup Growth című, 2003-ban megjelent könyvében. Mi is írtunk egy survey cikket az előző konstrukció különféle alkalmazásai és a kapcsolódó problémakörökről.

Jelölje $f(n)$ a $ PSL(2,Z)$ moduláris csoport n indexű kongruenciarészcsoportjai számát. Lubotzky egy nevezetes cikkében 10 éve belátta, hogy $f(n)$ lényegében $n^clogn/loglogn$ alakú. A cikk egy sejtését igazolva belátjuk, hogy létezik optimális c, továbbá c meghatározható és értéke $(3-2sqrt(2))/4$. Hasonló meglepően éles eredmények sorozata követte ezt --- aritmetikai csoportok nagy osztályaira.

Wall 1961-es sejtése szerint egy n-elemű csoport legfeljebb $n-1$ maximális részcsoportot tartalmazhat. Az első nem-triviális felső becslést sikerült megkapnunk: $cn^{1.5}$.

Elméleti számítástudomány

Rögzítsük az X,Y véges halmazpárt. álljon Y legalább két elemből.
A pár feletti összes automata-leképzés felfogható --- amint Babcsányi István megmutatta --- egy $U_{X,Y}$ végtelen automataként; ennek részautomatái pontosan és ismétlés nélkül kimerítik a pár feletti egyszerű automaták osztályát. $U_{X,Y}$-nek kontinuum, azaz 2^{ω} számosságú az állapothalmaza, tehát legfeljebb $2^{2^{\omega}}$ sok részautomatája lehet. A cikkben kimutattuk, hogy van is ennyi.

Az interaktív bizonyí tások egy érdekes tulajdonsága, hogy a bizonyított állításon felül mennyi információt adnak át az ellenőrnek. Ha semennyit, akkor zero-knowledge bizonyításról beszélünk, míg ha csak azt tudjuk, hogy kevés plussz információt kap az ellenőr, akkor a különböző knowledge complexity osztályokról beszélünk. Egy cikkben kiterjesztettük a statisztikus zero-knowledge bizonyítással rendelkező nyelvekre ismert bonyolultsági korlátot a logaritmikus statisztikus knowledge complexity osztályra.

A digitális információ illegitim másolása elleni védelem kérdése érdekes matematikai problémákat vet fel. Boneh és Shaw kidolgozta az úgynevezett ujjlenyomat kódok elméletét. Ezektől elvárjuk, hogy még több résztvevő együttműködése esetén se lehessen a kódot nyomtalanul eltávolítani a dokumentumról. Kifejlesztettünk egy ilyen kódot, mely lényegesen rövidebb az eddig ismert kódoknál. Azonos paraméterek esetén az új kódok hossza a Boneh-Shaw kód hosszának négyzetgyöke. A Rényi-divergencia használatával beláttuk, hogy a talált új ujjlenyomat kódok hossza optimális.

A relációs adatbázisok elágazó függőségei minimális reprezentációja által felvetett új tipusú kódelméleti problémákat vizsgáltunk, gráfelméleti eszközök használatával. Másrészt sikerült olyan n attributumú kulcsrendszert megadni, amiről bizonyítottuk, hogy az eddigieknél csak nagyobb sorszámmal reprezentálható.

Sikerült megadnunk a funkcionális függőségeknek az eddig sejtettnél nagyobb olyan rendszerét, amelyről bizonyítottuk, hogy függetlenek.

Megvizsgáltuk, hogy ha egy adatbázisban soronként legfeljebb d hiba előfordulhat, akkor a maximális kulcsok mérete mennyire nőhet meg. A probléma egy érdekes extremális halmazrendszeri problémára vezet, ami szoros kapcsolatban van az un. árnyékproblémával. A problémát (és a megoldást) általánosítottuk funkcionális függőségek esetére is.

Egy adatbázisban adott n valós szám. Kérdés, legfeljebb hány, legfeljebb k-tagú részösszeg adható ki egy kérdezőnek úgy, hogy semelyik szám se lehessen kiszámítható ezen részösszegekből. Nagyságrendileg azonos alsó és felső becsléseket adtunk ezen részösszegek számáról. (Az összes részösszeg (k-as feltétel nélküli) számára vonatkozó eredmény már korábban ismert volt.)

Foglalkoztunk a relációs adatmodell ááltalánosí tásának kombinatorikai problémáival is. A magasabb rendű adatmodell egyszerű attribútumokból különböző konstruktorokkal hoz létre komplex adatstruktúrákat. Az ilyen struktúrák lehetséges kulcshalmazai egy karakterizációját adjuk meg, valamint a minimális Armstrong példány méretére adunk alsó és felső becsléseket.

A relációs adatmodell egy olyan kiterjesztésével is foglalkozunk, amelyik magában foglalja az XML elméleti alapjait, továbbá az objektum-orientált szemléletmódot. Elemi attribútumokból különböző konstruktorokkal egymásba ágyazott attributumokat képezünk. Ezek Brouwer algebrát alkotnak, ami a Boole algebra egy általános\ítása. Az így kapott adatmodellben értelmezzük a funkcionális függőséget, és a minimális kulcs fogalmát. Belátjuk, hogy a kulcsok az egymásba ágyazott attribútumok Brouwer algebrájának speciális ideáljai. Megmutatjuk, hogy nem minden függés rendszerhez van Armstrong reláció, ellentétben a relációs modellel. Ezenkívül alsó és felső becsléseket adunk a létező Armstrong relációk méretére.

A kereséselmélet egy alapvető kérdése, hogy hány részhalmazt kell megkérdezni ahhoz, hogy az egyetlen ismeretlen elemet megtaláljuk, ha a kérdéshalmazok mérete legfeljebb (pontosan) k. Korábbi eredményeinket általánosítottuk arra az esetre, ha a válaszok közül legfeljebb 1 hazugság lehet.

A hazudós keresés egy --- gyakorlati alkalmazások miatt fontos --- új modelljét vezettük be. A rá vonatkozó legjobb algoritmus megtalálása során bebizonyítottuk, hogy az n-dimenziós kocka élhalmaza felbontható olyan 1-faktorokra, amelyek az egyes irányokban kb. egyforma sok élet tartalmaznak.