

Témavezető neve: Frank András	Pályázat azonosítója: T037547
-------------------------------	-------------------------------

## SZAKMAI BESZÁMOLÓ (ZÁRÓJELENTÉS)

### Bevezetés

Mint azt az OTKA-pályázat munkaterve tartalmazza, a pályázatban résztvevő kutatók alkotják a témavezető irányításával működő Egerváry Jenő Kombinatorikus Optimalizálási Kutatócsoportot (Egerváry Research Group, a továbbiakban EGRES). A kutatási eredmények részletes bemutatása előtt röviden összefoglaljuk az EGRES csoport tevékenységét.

Az EGRES a kiemelkedő nemzetközi tekintélyű magyar kombinatorikus iskola optimalizálási irányzatát képviseli, amelynek alapjait König Dénes és Egerváry Jenő rakták le (Magyar Módszer), és amelyet olyan neves kutatók fejlesztettek tovább, mint Gallai Tibor, Lovász László vagy Tardos Éva. A kutatócsoport célja e hagyományok folytatása és további erősítése, valamint új kutatási területek meghonosítása. A kutatás főként a kombinatorikus optimalizálás belső fejlődéséből adódó olyan területekre irányul, amik közel állnak a Magyar Módszer szellemiségéhez. Ez abban foglalható össze, hogy olyan feladatokra koncentrálunk, ahol a strukturális vizsgálat vezethet el hatékony, polinomiális futásidejű algoritmus létrehozásához. Kiemelten foglalkozunk gráfok és hálózatok optimalizálási problémáinak algoritmikus elemzésével, különös tekintettel a polinomiálisan kezelhető illetve az NP-teljes problémák határvidékének vizsgálatára.

### Hazai és nemzetközi kapcsolatok

A csoport tagja a 10 ország kutatóhelyeit tömörítő ADONET Marie Curie Research Training Network-nek, melynek célja fiatal kutatók mobilitásának az elősegítése, és magas színvonalú nemzetközi kurzusok szervezése. Ennek keretében az Egerváry Kutatócsoport munkájában több külföldi fiatal kutató vett részt, és a csoport több doktori hallgatója dolgozhatott hosszabb ideig külföldi kutatóhelyeken. A csoport részt vállalt a kurzusok rendezéséből is.

Az Egerváry Kutatócsoport az ADONET projekten kívül is aktívan részt vesz nemzetközi konferenciák szervezésében. Ezek közül kiemelendő a 2005-ben a Magyar Módszer 50. évfordulójára rendezett ünnepnap megszervezése a Magyar Tudományos Akadémián. 2003-ban a Harmadik Magyar-Japán Diszkrét Matematikai Konferenciának, valamint 2005-ben a Negyedik Magyar-Japán Diszkrét Matematikai Konferenciának a témavezető volt az egyik társszervezője

A csoport kutatási tevékenységében is rendkívül fontos szerepet játszik a nemzetközi együttműködés. A kutatócsoport tagjaival közös kutatásokban vett részt Joseph Cheriyan (Kanada), Pavol Hell (Simon Fraser University), Satoru Iwata (Tokió), Bill Jackson (London), Matthias Kriesell (Hannover), Martin Loeb (Prága), David Manlove (Glasgow), Sebő András (Grenoble), Szigeti Zoltán (Párizs), valamint fiatal kutatók közül Alex Berg (Aarhus), Katarína Cechlárová (Kassa), Marek Janata (Prága), Lap Chi Lau (Toronto), Bianca Spille (Magdeburg), és Britta Wienand (Köln).

A csoport minden évben szervez egy egyhetes kurzust vagy kutatóműhelyt, amin más kutatóhelyek fiatal kutatói és doktoranduszai is részt vehetnek. 2003-ban Nagykovácsiban

Lovász László akadémikus tartott nyári iskoláját, az ELTE, a BME és az SZTE doktoranduszai és kutatói részvételével. 2004-ben Sebő András, a Grenoble-i Laboratoire Leibniz tudományos tanácsadója tartott egyhetes előadássorozatot. 2005-ben egy egyhetes kutatóműhelyt rendezett a csoport Nagykövácsiban.

## Kutatási eredmények

Az alábbiakban beszámolunk az elmúlt években a résztvevők által a pályázat kutatási témáiban elért eredményekről. Az elmúlt 5 éves tevékenységről szóló több mint 70 oldalas részletes beszámoló elérhető a <http://www.cs.elte.hu/egres/beszamolo.pdf> webhelyen.

Az elért eredményekről a pályázat résztvevőinek az elmúlt négy évben több mint 50 folyóiratcikke jelent meg. Az eredmények gyors publikálására a csoport létrehozta a papíron és interneten is publikált ISSN 1577-4451 számú EGRES Technical Report sorozatot ([http://www.cs.elte.hu/egres/www/mf\\_techrep.html](http://www.cs.elte.hu/egres/www/mf_techrep.html)). Az e sorozatban megjelent publikációk száma: 2001: 17, 2002: 12, 2003: 12, 2004: 19, 2005: 17. A Discrete Applied Mathematics szerkesztőbizottsága a pályázat résztvevőinek három dolgozatát is beválasztotta az „Editors’ Choice 2003” válogatásba, ami a lapnál 2003-ban megjelent 250 cikk közül a legjobb 18-at tartalmazta.

A konferencia-előadások közül kiemelendő, hogy a szakterület egyik legtekintélyesebb konferencia-sorozatának számító Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO) konferencián 2001-ben Utrecht-ben a 34 kiválasztott előadás közül ötöt, míg 2004-ben New York-ban 32 kiválasztott előadás közül 3-at a pályázat résztvevői tartottak.

A pályázatban résztvevő kutatók 2003-ban a Tokióban megrendezett Harmadik Magyar-Japán Diszkrét Matematikai Konferencián tíz előadást tartottak, a prágai EUROCOMB’03 konferencián pedig ötöt. Ezenkívül előadásokkal szerepeltek az isztambuli EURO/INFORMS Nemzetközi Találkozón, a Budapesten megrendezett ESA 2003 konferencián, a dániai Nyborg-ban tartott Danish Graph Theory Conference-en, az Oberwolfach Graf Theory Workshop-on, és a Magdeburgi Kombinatorikai Kollokviumon. A csoportvezető a Berlini Műszaki Egyetem és a Bonni Egyetem felkérésére is tartott előadásokat.

2004-ben az EGRES kutatói a Párizsban megrendezett Gráfelmélet 2004 Konferencián hat előadást tartottak (köztük egy meghívott előadást), a New York-i IPCO konferencián hármat, ezenkívül előadtak az ESA 2004 Konferencián, a Bertinoro Kombinatorikus Optimalizálási Workshopon, a Bordeaux-i COMBSTRU Workshopon, és a hirosimiai Gráf-összefüggőségi Szemináriumon, ahol két egyetemi előadást is tartottak.

2005-ben a Budapesten megrendezett Negyedik Magyar-Japán Diszkrét Matematikai Konferencián a csoport kutatói 11 előadást tartottak, a berlini Eurocomb 2005 Konferencián kettőt, és emellett még összesen 10 előadást tartottak különböző nemzetközi konferenciákon (köztük egy meghívott előadást).

Az alábbiakban összefoglaljuk a kombinatorikus optimalizálás különböző területein elért kutatási eredményeket.

- Gráfok párosításai, faktorai és pakolásai

Páros gráfokban maximális párosítást kereső algoritmust, valamint minimax formulát König Dénes adott az 1910-es években. A probléma élsúlyozott változatát Egerváry Jenő, kutatócsoportunk névadója oldotta meg algoritmikusan 1931-ben, a dualitás tétel első megfogalmazásaként. Kikristályosított módszerük Kuhn tollából jelent meg 1955-ben „magyar módszer” néven, König és Egerváry úttörő munkásságának elismeréseképpen. Ma is

így ismert világszerte.

Nempáros gráfban a párosítások kérdése egy fokkal bonyolultabb. Az elmélet fő eredményei többek között a maximális párosításokra vonatkozó struktúrát leíró Gallai-Edmonds tétel, Edmonds alternáló erdős maximális párosítást kereső algoritmus, és a teljes párosítást tartalmazó gráfokat karakterizáló Tutte-tétel. Ezen eredményeket kutatócsoportunk tagjai különböző területeken messzemenően általánosították.

Mivel maximális  $b$ -párosítás keresése visszavezethető párosításokra, a  $b$ -párosítások a kombinatorikus optimalizálás könnyebb területei közé tartoznak, és a probléma számos változatának létezik poliéderes leírása. Nemtriviális kérdést kapunk azonban, ha bizonyos részgráfokat nem tartalmazó, úgynevezett tiltott  $b$ -párosítást keresünk. Páros gráfban maximális  $K_{t,t}$ -tiltott egyszerű  $t$ -párosítás keresésével foglalkozik Frank [11], és ugyanezre a feladatra ad elegáns algoritmust Pap [31]. Tetszőleges, páratlan kör részgráfokból álló  $H$  halmazra a csak  $H$ -beli köröket tartalmazó 2-faktorok poliéderének egy TDI-leírását adja Pap [32]. Kapcsolódó terület az előírt fokú részgráf probléma, erről [41] tartalmaz néhány eredményt.

További általánosítási lehetőség a gráfpakolási probléma, amikor olyan maximálisan sok csúcsot fedő részgráfot keresünk, amelynek minden komponense egy előre megadott  $F$  gráfalmazból való. Az ilyen részgráfot  $F$ -pakolásnak hívjuk. A gráfpakolási probléma fő kérdése az, hogy mely  $F$  gráfalmazokra általánosíthatóak a párosításokra ismert klasszikus eredmények. Számos különböző  $F$ -pakolási probléma lett megoldva, részben csoportunk által [23, 42, 17, 18]. A probléma irányított változatát vizsgálja [33].

- Útpárosítások, útpakolások

Az útpárosítás feladat a pontdiszjunkt utak és a párosítás feladatainak közös általánosítása, melyet Cunningham és Geelen kezdett el vizsgálni. Azóta további poliéderes leírások, matroidos eredmények, algoritmikus megközelítések, illetve további általánosítások születtek - részben az EGRES csoport tagjai által.

Érdekes kapcsolatokat fedezhetünk fel útpárosítások, és más kombinatorikus optimalizálási problémák között. Speciális esetként tartalmazza a párosítás feladatot. Egy egyszerű konstrukcióval Menger pontdiszjunkt utakról szóló tétele is visszavezethető rá. Az útpárosítás feladat visszavezethető egy változós mátrix rangszámítására.

Egy útpárosítás maximális értékére Cunningham és Geelen egy min-max formulát bizonyítottak. Egy ekvivalens, bizonyos szempontból kedvezőbb alakú min-max formulát bizonyított Frank és Szegő [13].

Cunningham és Geelen vezették be a páros faktorok fogalmát is. Maximális súlyú útpárosítás keresésére egy primál-duál algoritmust adtak mely páros faktorokat használ. Az útpárosításokra kidolgozott Tutte-mátrixos technikájuk itt is használható, egy analóg min-max formulát bizonyítottak. Pap és Szegő [34] ennek a formulának egy változatát bizonyították be tisztán kombinatorikus technikával. Azt is észrevették, hogy a min-max formula egy kissé általánosabb esetre is érvényes.

A pont- illetve éldiszjunkt  $T$ -utak pakolására vonatkozóan több különböző probléma megfogalmazható. Ezeket az eredményeket Mader általánosította először az Euler-feltétel nélküli esetre, majd a pontdiszjunkt esetre. A pontdiszjunkt utak pakolására vonatkozó Mader-féle tétel a kombinatorikus optimalizálás egyik csúcsteljesítménye. Sebő és Szegő [40] azzal a kérdéssel foglalkoztak, hogy a Gallai-Edmonds féle struktúrátétel hogyan általánosítható erre a feladatra.

Chudnovsky et al. útpakolási feladatok egy általános keretét adták meg, nevezetesen csoportelemekkel címkézett gráfban a nem-nulla  $T$ -utak pakolását. Pap [35] ennek az eredménynek egy általánosítására - permutációcímkés gráfokra - adott egy egyszerű,

közvetlen bizonyítást.

A párosítások elméletében Edmonds párosítás algoritmusára kiemelt szerepet tölt be, az első polinomiális futásidejű algoritmus maximális párosítás keresésére. Edmonds alternáló erdős technikája természetesen módon alkalmazható többek között a  $b$ -párosításokra/-faktorokra, a hypo-matching feladatra, a matroid metszetre, a matroid partner feladatra. Előfordul azonban, hogy az alternáló erdők technikája nem, vagy csak nagy nehézségek árán ültethető át egy feladatra, pedig az ismert tételek nagyon hasonlítanak a párosításokra ismertekre.

Alternáló utaknak egy új megközelítését adta Pap, melynek segítségével több problémára sikerült egyszerű kombinatorikus algoritmust adni. Ezek közé tartozik a páros faktor feladat [36], a  $K_t$ -mentes  $t$ -párosítás feladat [37], és Mader tétele pontdiszjunkt  $A$ -utakról [38]. Ezzel a technikával sikerült belátni a páros faktorok és a hypo-matching feladat közös általánosítását [39].

- Stabil párosítások

A stabil párosítások kutatása Gale és Shapley 1962-ben megjelent cikke nyomán kezdődött. Az alapproblémában  $n$  fiút kell  $n$  lánnyal úgy összeházasítani, hogy ne legyen egyetlen fiúnak és lánynak sem közös érdeke a házasságtörés. Ez utóbbi kritérium egy, a játékelmélethez jól ismert stabilitási kritérium modellbeli megfelelője.

Fleiner Tamás stabil párosításokkal kapcsolatos kutatási eredményeinek első összefoglalása [9]-ben található. Ebben a munkában számos, eddig ismert, stabil párosításokkal kapcsolatos ismeretet mutatunk be egy egységes modellben, és mutatunk rá a Knaster-Tarski fixponttétel alkalmazhatóságára. A cikkben több tudományterület között sikerül kapcsolatot teremteni.

A stabil párosításokra vonatkozó tétel általánosítható matroidokra, ehhez azok mohó tulajdonságát kell felhasználni a fixpontos megközelítésben. Az általánosított stabil párosítások hálótulajdonságának alkalmazásával (a blokkoló- és hálópoliéderek elméletét is felhasználva) a stabil párosítás poliéder általánosításának egy újfajta leírását kapjuk.

Az egyetemi felvételihez leíró modellhez tartozó poliédert Baiounak és Balinskinek sikerült jellemeznie, de a karakterizációjuk meglehetősen bonyolult volt. A Fleiner Tamás eredménye Rothblum leírásának egy olyan általánosítása, mely nemcsak az egyetemi felvételihez tartozó stabil párosítás poliédert írja le, de a modell mindkét oldalán kvótát tartalmazó esetet is kezeli.

2004-ben Király Tamás és Pap Júlia bebizonyították, hogy a stabil párosítás poliéder Rothblum-féle leírása rendelkezik a teljesen duálisan egészértékűségi tulajdonsággal [24]. A bizonyítás egyúttal algoritmust is szolgáltat egy stabil párosítás minimális súlyú voltát igazoló bizonyíték megtalálására.

A [10] áttekintő jellegű munkában új eredményként a hálótulajdonságot használó bizonyítást adunk Sethuraman és Teo egy korábban, lineáris programozási eszközökkel igazolt, a stabil párosítások struktúrájával kapcsolatos tételére, és ezt a tételt általánosítjuk stabil  $b$ -párosításokra ill. matroidokra is.

2005-ben Fleiner Tamás Robert Irvinggel és David Manlove-val közösen hatékony algoritmust adott az ún. *SRPF problémára*, azaz a stabil párosítás probléma azon nempáros általánosítására, ahol bizonyos kapcsolatok tiltottak (de a stabilitás szempontjából lehetségesnek tekintettek), és a modellbeli preferenciák részbenrendezések. A vizsgált modell általánosítja az ún. szuperstabil párosítás problémát, aholis a preferenciasorrendek lineárisak, de indifferencia megengedett.

- Matroid partner probléma

A matroid párosítási probléma a matroid metszet és a nempáros gráfok párosítási problémájának közös általánosításaként jött létre. Sok paritást tartalmazó kombinatorikus optimalizálási probléma megfogalmazható matroid párosítási feladatként, olyanok is, ahol a paritás s a matroid jelenléte egyáltalán nem nyilvánvaló.

A matroid párosítás általános elméletének kidolgozása következményeként Lovász László megmutatta, hogy lineáris matroidok esetén hogyan adható jó karakterizáció, és polinomiális algoritmust is mutatott reprezentált matroidokra.

Bár a legtöbb gyakorlatban előforduló matroid lineáris, gyakran előfordul hogy a matroidról nem tudjuk hogy hogyan kell determinisztikusan reprezentálni, vagy az, hogy a bár Lovász elmélete jó karakterizációt ad, nem sokat árul el a feladat kombinatorikus struktúrájáról. [30]-ban megadunk egy matroidosztályt ami tartalmaz néhány olyan matroidot, melyek párosítási problémája korábban is megoldott volt, és sok olyat is, melyekre a probléma ezzel vált jól karakterizálhatóvá. A legegyszerűbb eset ahol ez a tétel új eredményt ad, a hipergrafikus matroid, és a kétdimenziós merevségi matroid.

- Merevség

Már a XX. század elejétől ismert, hogy rúdszerkezetek statikai tulajdonságai vizsgálhatók gráfelméleti módszerekkel. A gráfelméleti megközelítésben a rúdszerkezet modellje egy gráf, valamint annak beágyazása a térbe, előírt élhosszakkal. A *merevség* alapkérdése az, hogy egy adott síkbeli vagy térbeli rúdszerkezetnek létezik-e folytonos deformációja, illetve, ami statikai szempontból szintén fontos, van-e infinitezimális deformációja. Kapcsolódó fogalom a *globális merevség*: egybevágó-e a rúdszerkezet minden beágyazása?

Egy gráfot *generikusan merevnek* nevezünk, ha van infinitezimálisan merev beágyazása. Ez tisztán gráfelméleti tulajdonság, és rendkívül hasznos, mert generikusan merev gráfoknak valójában majdnem minden beágyazása merev. Ezért alkalmazásoknál sokszor a generikus merevség vizsgálata a legcélravezetőbb.

A statikai alkalmazásokon túlmenően a gráfelméleti merevség elmélete az utóbbi időben számos, a jövőre nézve meghatározó kutatási területen is hasznosnak bizonyult. Ilyenek a jármű formációk elosztott irányítása, a protein molekulák strukturális flexibilitásának vizsgálata, az üvegszerű anyagok mechanikus stabilitási tulajdonságainak vizsgálata, lokalizáció szenzor hálózatokban, csukló-és-rúd szerkezetek mozgatója.

A kutatócsoport eredményei a területen:

- Hendrickson szükséges feltételt adott arra, hogy egy generikus rúdszerkezet globálisan merev legyen  $d$  dimenzióban, és azt sejtette, hogy feltétele elégséges is. Ezt Connelly  $d \geq 3$  esetén megcáfolta, de a  $d=2$  eset nyitott maradt. A kutatócsoport tagjainak sikerült ebben az esetben igazolni Hendrickson sejtését. Ennek fontos következménye, hogy a globális merevség 2 dimenzióban generikus tulajdonság, azaz csak a gráftól függ.
- Egy rúdszerkezet két csúcsa globálisan linkelt, ha ekvivalens rúdszerkezet esetén távolságuk azonos. A globális linkeltség nem generikus tulajdonság. Bizonyos gráfosztálynál azonban sikerült jellemezni azokat a pontpárokat, amik minden realizációnál globálisan linkeltek.
- Jelentős lépések történtek a háromdimenziós merevség karakterizációja felé, ami a terület egyik legfontosabb nyitott kérdése.
- Sikerült módszert adni generikusan merev gráfok kis egész koordinátákkal történő beágyazására.
- Síkbeli minimálisan merev gráfoknak sikerült egy egyszerű, csúcshúzóval történő előállítását megtalálni. Ez egyszerűbb bizonyítást ad pszeudoháromszögelés létezésére.
- Egy gráf leszögezési száma az, hogy minimálisan mennyi csúcsot kell rögzítenünk egy generikus rúdszerkezet esetén, hogy merev legyen. Sikerült bebizonyítani, hogy ez 2

dimenzióban polinom időben meghatározható, de 3 dimenzióban NP-teljes. Ezenkívül 2-approximációs algoritmus született a globális merevségre vonatkozó analóg feladatra.

- Összefüggőség növelése és pontszétszedések

A *partíció-korlátos  $k$ -élösszefüggővé növelési feladatban* a cél egy gráfot minimális számú új él hozzáadásával  $k$ -élösszefüggővé tenni úgy, hogy minden új él egy adott partíció különböző osztályait kösse össze. Jordán Tibor más kutatókkal az optimumra pontos jellemzést, és egy optimális megoldás megtalálására hatékony algoritmust adott. A párosság megőrző növelésre egy egyszerűbb alakban megfogalmazható tételt nyerünk, amely egyúttal választ ad arra a kérdésre is, hogyan lehet egy (rudakból és csuklókból álló) síkbeli négyzetrács szerkezetet a lehető legkevesebb átlós rúd hozzávételével úgy megerősíteni, hogy legfeljebb  $k-1$  átlós rúd törése esetén is merev maradjon.

Felvetődhet a kérdés, nem lehet-e az általunk megoldott (pl. párosság- és egyszerűség megőrző), valamint a mások által vizsgált (pl. síkbarajzolhatóságot megőrző) korlátozott leemelési és növelési feladatokban használt módszereket és eredményeket egy közös keretbe foglalni. Jordán Tibornak sikerült korlátozott leemelések kezelésére egy általános módszert kidolgozni. Ezzel a módszerrel egyrészt sikerült lényegesen egyszerűsíteni korábbi bizonyításokat (pl. Nagamochi és Eades leemelési tételét a síkbarajzolhatóságot megőrző leemelésekről), másrészt olyan „szimultán” leemelési tételt igazolni, amelyben egyszerre két gráfban hajtunk végre leemeléseket.

A  *$k$ -pontösszefüggőség növelési feladatban* a cél egy adott  $G=(V,E)$  gráfhoz minimális számú új élt hozzáadni úgy, hogy a megnövelt gráf  $k$ -pontösszefüggő legyen. Ennek a feladatnak a bonyolultsága a terület egyik kiemelkedő, a mai napig eldöntetlen kérdése. Az eggyel növelés esete is nyitott, azaz a megoldás akkor sem ismert, ha a  $G$  gráf  $(k-1)$ -pontösszefüggő. A [19] dolgozat fő eredménye egy olyan algoritmus, melynek futási ideje minden rögzített  $k$ -ra  $O(n^5)$ , és amely optimális megoldást talál. Amennyiben az optimum értéke  $k$ -hoz képest nagy, az algoritmus akkor is polinomiális, ha  $k$  része az inputnak. Ebben az esetben min-max tételt is nyerhetünk az optimum értékére.

A pontszétszedés (detachment) művelet, amely a gráf valamely  $s$  pontját több új ponttal helyettesíti és minden, eddig az  $s$ -re illeszkedő élt valamely új pontra illeszt, tekinthető egyrészt a jól ismert összehúzás művelet inverzének, másrészt a leemelési művelet általánosításának is. Fleiner Balázs [8] megválaszolta azt a kérdést, hogy mikor lehet egy gráf adott pontját adott fokszámú pontokra szétszedni úgy, hogy a gráf globális élösszefüggősége megmaradjon. Jordán Tibor és Szigeti Zoltán ezt általánosította lokális élösszefüggőségre, később Szigeti Zoltán [43] egyszerűbb bizonyítást adott.

A pontszétszedési feladat egy másik változatában a gráf összes pontját szétszedjük. A „globális” pontszétszedések vizsgálatát Nash-Williams kezdeményezte a '80-as években. Megfigyelte, hogy Euler tétele megfogalmazható egy olyan fokszám előírásos pontszétszedési tételként, amelyben a szétszedett gráf 2-élösszefüggő és 2-reguláris kell legyen. Ezt az egyszerű esetet több irányban általánosította. A nemszeparálható (azaz 2-pontösszefüggő és hurokmentes) esetet Nash-Williams nyitott problémaként tűzte ki 1985-ben. Új módszerek alkalmazásával sikerült ennek a feladatnak a megoldása, a fokszámelőírásos esetben is [20], valamint irányított gráfokra az élösszefüggőségi probléma megoldása [4].

Az összefüggőséggel kapcsolatos problémákat korábban általában csak gráfokra vizsgálták, pedig sok kérdés hipergráfokra is éppúgy feltehető. Csoportunknak jelentős eredményeket sikerült elérni ezen a téren: több ismert eredményt kiterjesztettünk hipergráfokra, illetve néhány olyan tételt is bizonyítottunk hipergráfokról, amik gráfokra is újdonságot jelentenek.

Frank, Király és Kriesell [12] bebizonyították Tutte diszjunkt feszítőfákról szóló tételének egy általánosítását: Egy legfeljebb  $q$  méretű hiperélekből álló  $(qk)$ -élösszefüggő hipergráf mindig felbontható  $k$  darab összefüggő feszítő részhipergráfra. Ennek segítségével sikerült részeredményt elérni Kriesell sejtésével kapcsolatban, ami szerint ha egy  $G$  gráfban a  $T$  ponthalmaz bármely két pontja közt van  $2k$  élidegen út, akkor  $G$ -ben van  $k$  darab élidegen  $T$ -t tartalmazó fa.

Berg, Jackson és Jordán [3] irányított hipergráfokra bizonyítottak leemelési és élösszefüggőség-növelési tételeket, amik általánosítják Mader és Frank korábbi, irányított gráfokra vonatkozó tételeit. A [3]-ban szereplő leemelési tétel egy absztrakt alakját bizonyította Király és Makai [25]-ben. Ennek segítségével az ott szereplő összefüggőség-növelési tételek kiterjeszthetők irányított hipergráfok  $(k,l)$ -élösszefüggővé növelésére.

A [25]-ben szereplő leemelési tétel egy másik alkalmazása, hogy a [14]-ben szereplő eredmények kiterjeszthetők hipergráfokra. Speciálisan  $k \leq l$  esetén megoldható hipergráfok  $(k,l)$ -paríció-összefüggővé növelése minimális számú uniform hiperél hozzáadásával.

Király [26] olyan uniform hipergráfok keresésére adott módszert, amiknek egy szimmetrikus keresztező szupermoduláris halmazfüggvénnyel adott vágásfeltételeket kell kielégíteniük. Sikerült minimax formulát adni az ilyen  $r$ -uniform hipergráfok minimális élszámára. Speciális esetként adódik formula az élösszefüggőség-növelési problémára minimális számú  $r$ -hiperél hozzáadásával.

Ito, Makino, Arata, Honami, Itatsu, and Fujishige elméleti megoldást adtak a következő forráselhelyezési kérdésre: adott élkapacitásos irányított gráfban mi az olyan  $R$  ponthalmaz minimális mérete, amire  $R$ -ből minden  $(V-R)$ -beli pontba van legalább  $k$  értékű folyam, és minden  $(V-R)$ -beli pontból  $R$ -be van legalább  $l$  értékű folyam. Bárász, Becker és Frank [1] megmutatta, hogyan oldható meg ez a feladat polinomiális időben, az úgynevezett tömör halmazok tulajdonságainak kihasználásával. Bernáth [5] jobb korlátot adott a maximális tömör halmazok számára, és ezzel jobb becslést tudott adni az algoritmus lépésszámára.

Fekete Zsolt [7] a következő irányítatlan forráselhelyezési problémát tekintette: mi az a minimális méretű ponthalmaz, aminek az összehúzásával keletkező gráf tartalmaz két éldiszjunkt feszítő fát (azaz  $(2,0)$ -partíció-összefüggő). Megmutatta, hogy ez a feladat polinomiális időben megoldható.

- Irányítások

A témakör alapvető eredménye Nash-Williams irányítási tétele, ami szerint minden gráfnak van erősen egyensúlyi irányítása. Nash Williams cikkében kimondta (de nem bizonyította) azt a tételt is, hogy egy gráf tetszőleges részgrádjának van olyan erősen egyensúlyi irányítása, ami kiterjeszhető az egész gráf erősen egyensúlyi irányításává. Király és Szigeti [28]-ben ennek többirányú általánosítását bizonyították Több negatív eredmény is született az egyensúlyi irányításokkal kapcsolatos feladatok nehézségéről, ezek egy része [16]-ban szerepel. NP-teljes például annak eldöntése, hogy két, közös éllel rendelkező Euler-gráfnak vannak-e olyan Euler irányításai, amik a közös éleken megegyeznek.

Bernáth Attila [6] több kapcsolódó feladatnak a nehézségét bizonyította. Például NP-teljes, hogy adott gráfnak van-e olyan erősen egyensúlyi irányítása, ahol a pontok befokai adott alsó és felső korlátok között vannak.

Már a Nash-Williams tétel bizonyításában is fontos szerepet játszott a gráf fokszámainak paritása. Az irányítási feladatok egy külön osztályát adják azok a problémák, ahol a paritás az irányítási követelményekben jelenik meg explicit módon. Király és Szabó [27] Frank, Jordán, and Szigeti korábbi eredményét általánosítva min-max formulát adtak nemnegatív metsző szupermoduláris halmazfüggvényt fedő irányítás esetén a páratlan befokú csúcsok minimális számára. Ebben az esetben nyitott a megengedett irányítások befok-vektorai poliéderének

jellemzése. Egy másik esetben azonban, amikor a pontok befokaira vannak alsó és felső korlátok, Király és Pap meg tudtak adni egy ilyen jellemzést.

Meghatározott pontösszefüggőségi tulajdonsággal rendelkező irányításokról sokkal kevesebb ismert, mint élösszefüggőségről. Csoportunknak sikerült ezen a területen is előrelépnie. Berg és Jordán [2] megmutatták, hogy egy Euler-gráfnak pontosan akkor van 2-összefüggő Euler irányítása, ha a gráf gyengén 4-összefüggő. A bizonyítás a gyengén 4-összefüggő gráfok önmagában is érdekes konstruktív jellemzésén [21] alapul. Király és Szigeti [29] más, egyszerűbb módszert találtak Berg és Jordán tételének bizonyítására, sőt általánosították is az eredményt.

Jordán Tibor [22] belátta, hogy minden  $6k$ -összefüggő gráfban van  $k$  darab 2-összefüggő éldiszjunkt feszítőrészgráf. Ennek következménye: Minden 12-összefüggő  $G$  gráfnak van egy  $T$  feszítőfája, amire  $G-E(T)$  2-összefüggő. Felhasználva [2] eredményeit azt kapjuk, hogy Minden 18-összefüggő gráfnak van 2-összefüggő irányítása.

Az irányítás fogalma kiterjeszhető hipergráfokra is. Több gráfokra vonatkozó irányítási eredmény általánosítható hipergráfokra, így például a [27]-ben szereplő paritásos eredmények hipergráfokra is igaznak bizonyulnak.

Frank és Király [14] gráfokra, illetve Király és Makai [25] hipergráfokra oldott meg következő típusú feladatokat: adott hipergráfhoz minimum hány adott méretű hiperélt kell hozzávenni, hogy a kapott hipergráfnak legyen kellően élösszefüggő irányítása? Az előbbi típusú feladatnak egyfajta általánosítása az, amikor minimális súlyú részhipergráfot keresünk, aminek létezik adott tulajdonságú irányítása. Az ilyen feladat már sok egyszerű esetben is NP-teljes, de [15]-ben Naor, Khanna és Shepherd eredményeit általánosítva sikerült egy fontos eset megoldhatóságát bizonyítani és jó jellemzéseket adni.

## Hivatkozások

[1] Bárász M; Becker J; Frank A: *An algorithm for source location in directed graphs*, Oper Res Letters 33: 221-230, 2005

[2] Berg AR; Jordán T: *Two-connected orientations of Eulerian graphs*, J. Graph Theory, Vol. 52, Issue 3, 230-242, 2006

[3] Berg A; Jackson B; Jordán T: *Edge splitting and edge-connectivity augmentation in directed hypergraphs*, Discrete Math 273: 71-84, 2003

[4] Berg A; Jackson B; Jordán T: *Highly edge-connected detachments of graphs and digraphs*, J Graph Theory 43: 67-77, 2003

[5] Bernáth A: *A note on the directed source location algorithm*, EGRES Technical Report No. 2004-12, 2004

[6] Bernáth A: *Hardness results for well-balanced orientations*, EGRES Technical Report No. 2006-05, 2006

[7] Fekete Zs: *Source location with rigidity and tree packing requirements*, EGRES Technical Report No. 2005-04, 2005

[8] Fleiner B: *Detachment of Vertices of Graphs Preserving Edge-Connectivity*, SIDMA Volume 18 Issue 3, 581-591

[9] Fleiner T: *A fixed-point approach to stable matchings and some applications*, EGRES Technical Report No. 2001-01, 2001

[10] Fleiner T: *Some results on stable matchings and fixed points*, In: Proc. 3rd Hungarian-Japanese Symposium, pp. 250-261, 2003



- [11] Frank A: *Restricted  $t$ -matchings in bipartite graphs*, Discrete Applied Mathematics 131: 337-346, 2003
- [12] Frank A, Király T, Kriesell M: *On decomposing a hypergraph into  $k$  connected sub-hypergraphs*, Discrete Applied Mathematics 131: 373-383, 2003
- [13] Frank A; Szegő L: *A note on the path-matching formula*, Journal of Graph Theory 41: 110-119, 2002
- [14] Frank A, Király T: *Combined connectivity augmentation and orientation problems*, Discrete Applied Mathematics 131: 401-419, 2003
- [15] Frank A, Király T, Király Z: *On the orientation of graphs and hypergraphs*, Discrete Applied Mathematics 131: 385-400, 2003
- [16] Iwata S; Király T; Király Z; Szigeti Z: *On well-balanced orientations*, Proceedings of 4th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics, 175-182, 2005
- [17] Janata M; Loebel M; Szabó J: *The Gallai-Edmonds Decomposition for the  $k$ -Piece Packing Problem*, Electr. J. Combin. (2005) 12 (1) Research Paper 8, 21, 2005
- [18] Janata M; Szabó J: *Generalized star packing problems*, EGRES Technical Report No. 2004-17, 2004
- [19] Jackson B, Jordán T: *Independence free graphs and vertex-connectivity augmentation*, J. Combinatorial Theory Ser. B., Vol. 94, 31-77, 2005
- [20] Jackson B; Jordán T: *Non-separable detachments of graphs*, J. Comb Theory B 87: 17-37, 2003
- [21] Jordán T: *A characterization of weakly four-connected graphs*, J. Graph Theory, Vol. 52, Issue 3, 217-229, 2006
- [22] Jordán T: *On the existence of  $k$  edge-disjoint 2-connected spanning subgraphs*, J. Combinatorial Theory Ser. B., Vol. 95, 257-262, 2005
- [23] Király Z; Szabó J: *Generalized induced factor problems*, In: Proc. 3rd Hungarian-Japanese Symposium: 2003. pp. 103-112, 2003
- [24] Király T, Pap J: *Rothblum's description of the stable marriage polyhedron is TDI*, 4th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics, 266-272, 2005
- [25] Király T, Márton M: *A note on hypergraph connectivity augmentation*, EGRES Technical Report No. 2002-11, 2002
- [26] Király T: *Covering symmetric supermodular functions by uniform hypergraphs*, J Comb Theory B 91: 185-200, 2004
- [27] Király T; Szabó J: *A note on parity-constrained orientations*, EGRES Technical Report No. 2003-11, 2003
- [28] Király Z, Szigeti Z: *Simultaneous well-balanced orientations of graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, Volume 96, Issue 5, 684-692, 2006
- [29] Király Z, Szigeti Z: *Reliable Orientations of Eulerian Graphs*, EGRES Technical Report No. 2006-01, 2006
- [30] Makai M: *Matroid matching with Dilworth truncation*, EGRES Technical Report No. 2005-11, 2005
- [31] Pap Gy: *Combinatorial algorithms for matchings, even factors, and square-free 2-factors*, Mathematical Programming, elfogadva, 2005
- [32] Pap G: *A TDI description of restricted 2-matching polytopes*, In: Proc. IPCO X: 2004. pp. 139-151, 2004

- [33] Pap G; Szegő L: *On factorizations of directed graphs by cycles*, EGRES Technical Report No. 2004-01, 2004
- [34] Pap G; Szegő L: *On the maximum even factor in weakly symmetric digraphs*, J Comb Theory B 91: 201-213, 2004
- [35] Pap Gy: *Packing non-returning A-paths*, Combinatorica, elfogadva, 2005
- [36] Pap Gy: *A combinatorial algorithm to find a maximum even factor*, Proc. IPCO XI, 2005
- [37] Pap Gy: *Alternating paths revisited II: restricted b-matchings in bipartite graphs*, EGRES Technical Report No. 2005-13, 2005
- [38] Pap Gy: *Alternating paths revisited IV: packings and 2-packings of A-paths*, EGRES Technical Report No. 2005-15, 2005
- [39] Pap Gy: *Hypo-Matchings in Directed Graphs*, Proc. Graph Theory 04, Birkhauser, 2006
- [40] Sebő A; Szegő L: *The Path-packing Structure of Graphs*, In: Proc. IPCO X: 2004. pp. 256-270, 2004
- [41] Szabó J: *A note on the degree prescribed factor problem*, EGRES Technical Report No. 2004-19, 2004
- [42] Szabó J: *The generalized Kaneko theorem*, In: Proc. 3rd Hungarian-Japanese Symposium: 2003. pp. 92-102, 2003
- [43] Szigeti Z: *A short proof on the local detachment theorem*, EGRES Technical Report No. 2004-09, 2004