

ALEA

Tech Reports

Distribuzioni di probabilità
implicite nei prezzi delle opzioni

Alessandro Beber e Luca Erzegovesi

Tech Report Nr. 8
Dicembre 1999

Alea - Centro di ricerca sui rischi finanziari
Dipartimento di informatica e studi aziendali
Università di Trento - Via Inama 5 - 38100 - Trento
<http://aleasrv.cs.unitn.it>

ALEA, Centro di ricerca sui rischi finanziari è un centro di ricerca indipendente costituito presso il Dipartimento di informatica e studi aziendali dell'Università di Trento. Il centro si propone di elaborare conoscenze innovative in materia di risk management, e di favorirne la diffusione mediante pubblicazioni e programmi di formazione. Il centro è diretto dal prof. Luca Erzegovesi. Nella collana ALEA Tech Reports sono raccolti lavori di compendio e rassegna della letteratura e della prassi operativa su tematiche fondamentali di risk management.

Alessandro Beber (*) e Luca Erzegovesi ()**

Distribuzioni di probabilità implicite nei prezzi delle opzioni

Abstract

Questo lavoro si propone di illustrare i presupposti teorici e le metodologie empiriche per l'estrazione della distribuzione di probabilità dell'attività finanziaria sottostante dai prezzi delle opzioni. In particolare si analizzano le anomalie nel pricing delle opzioni da parte del mercato rispetto ai modelli teorici, si descrivono le tecniche di estrazione della funzione di densità neutrale al rischio proposte dalla letteratura e si presentano alcune evidenze empiriche sui mercati azionario, dei cambi, dei tassi d'interesse, ottenute applicando alcune delle metodologie illustrate.

(*) Dottorando presso la Scuola Superiore S. Anna, Pisa, e collaboratore di ALEA - Centro di ricerca sui rischi finanziari.

(**) Professore ordinario di Gestione finanziaria e valutaria, Università di Trento, Direttore di ALEA - Centro di ricerca sui rischi finanziari.

La sezione 2 è da attribuire a Luca Erzegovesi, le sezioni 3 e 4 ad Alessandro Beber, le parti rimanenti sono state curate congiuntamente dagli autori.

Indice

1. Introduzione.....	1
2. Modelli teorici e anomalie di mercato	3
2.1 Distribuzione di probabilità <i>risk neutral</i> e "vera"	3
2.1.1 Scommesse e contratti forward	3
2.1.2 Il pricing delle opzioni	4
2.1.3 Dal prezzo delle opzioni alle probabilità <i>risk neutral</i>	7
2.2 Distribuzione implicita e prezzi Arrow-Debreu	13
2.3 Distribuzioni di probabilità in Black e Scholes	18
2.4 Volatilità storica e volatilità implicita	20
2.5 Deviazioni rispetto a Black e Scholes	24
2.5.1 L'effetto volatility smile e skew	24
2.5.2 La term structure della volatilità implicita.....	28
2.5.3 Evoluzione dell'asimmetria della distribuzione	32
2.6 Il valore previsionale della volatilità implicita	39
3. Tecniche di estrazione della distribuzione <i>risk neutral</i>/implicita..	45
3.1 Modelli con volatilità deterministica.....	46
3.1.1 Probabilità <i>risk neutral</i> come prezzi di AD securities.....	47
3.1.2 Interpolazione della funzione della volatilità implicita.....	53
3.1.3 Alberi binomiali impliciti.....	58
3.1.4 Misture di lognormali.....	66
3.1.5 Metodi non parametrici avanzati.....	69
3.1.6 Modelli a confronto.....	72
3.2 Modelli basati su processi stocastici con più fattori casuali.....	75
3.2.1 Modelli con volatilità stocastica	75
3.2.2 Modelli con processo diffusivo a salti	77
3.2.3 Coerenza dei modelli con la term/strike structure della volatilità	78
3.3 Un confronto tra distribuzioni implicite e distribuzioni dei ritorni realizzati	79
3.4 Conclusioni.....	82
4. Evidenze empiriche sui mercati azionario, dei cambi, dei tassi d'interesse	86
4.1 Dati di mercato utilizzati	86
4.1.1 Mercato azionario.....	86
4.1.2 Mercato dei cambi.....	87
4.1.3 Mercato dei tassi d'interesse a lungo termine.....	88
4.1.4 Mercato dei tassi d'interesse a breve	88
4.2 Rilevazioni empiriche della funzione della volatilità.....	89
4.2.1 Mercato azionario.....	89
4.2.2 Mercato dei cambi.....	91
4.2.3 Mercato dei tassi d'interesse a lungo termine.....	95
4.2.4 Mercato dei tassi d'interesse a breve termine.....	97
4.3 Estrazione della distribuzione di probabilità implicita.....	99
4.3.1 Approccio degli istogrammi.....	100
4.3.2 Funzioni deterministiche della volatilità.....	101
5. Conclusioni	109
Bibliografia	111

1. Introduzione

Il modello fondamentale di *pricing* di Black e Scholes (1973) costituisce il punto di riferimento essenziale per ogni studio in materia di opzioni finanziarie. Tra i suoi aspetti più interessanti vi è la possibilità di determinare rapporti di copertura idonei a costruire portafogli di arbitraggio *risk free*, attraverso l'opportuna combinazione di quote di sottostante ed opzioni. Tale proprietà è stata rielaborata successivamente in Cox e Ross (1976) e in Cox, Ross e Rubinstein (1979), consentendo di ottenere dai rapporti di copertura valori probabilistici espressione di una completa neutralità rispetto al rischio.

Secondo le assunzioni del modello classico, il prezzo dell'attività finanziaria sottostante è distribuito in base ad una funzione di densità di forma lognormale, con proprietà *risk neutral*, che può essere costruita prescindendo da ogni ipotesi sulle "vere" aspettative e funzioni di utilità di chi opera nel mercato finanziario di riferimento. Più specificamente, quotazioni di mercato delle opzioni coerenti con il modello ipotizzato implicano caratteristiche del processo di prezzo del sottostante congruenti con la suddetta distribuzione di probabilità, ovvero valore atteso pari al prezzo *forward*, forma simmetrica (e precisamente normale) della distribuzione del logaritmo dei prezzi e ridotte possibilità di eventi estremi positivi o negativi, oltre alla costanza e alla perfetta prevedibilità della volatilità dei ritorni.

In realtà si manifestano sostanziali anomalie che contraddicono il modello classico di *pricing* nei valori espressi dalle opzioni nel mercato, soprattutto in riferimento all'ipotesi di costanza e perfetta previsione della volatilità; la distribuzione di probabilità lognormale non costituisce un'approssimazione precisa non soltanto della "vera" distribuzione osservata *ex-post*, ma anche della distribuzione implicita nei prezzi delle opzioni, che può essere estratta assumendo un mondo neutrale al rischio. Una distribuzione neutrale al rischio coerente con le evidenze empiriche dovrebbe isolare aree di prezzo alle quali è assegnata una maggiore probabilità rispetto al caso lognormale; in questo modo sarebbe possibile estrapolare utili elementi di valutazione relativi alle aspettative di mercato. A questo scopo la problematica più rilevante da affrontare è quella di riuscire a determinare analiticamente una funzione di densità, diversa dalla lognormale, coerente con le evidenze empiriche ed in un contesto diverso da Black e Scholes (1973).

Il presente studio affronta questa problematica, passando in rassegna la letteratura in materia di probabilità implicite nei prezzi delle opzioni e proponendo alcune applicazioni empiriche a scopo esemplificativo. Il *paper* presenta una struttura divisa in tre sezioni principali.

Nella prima sezione si definiscono in termini teorici i concetti di distribuzione neutrale al rischio e di prezzi Arrow Debreu e si illustra, con l'aiuto di esempi elementari, la logica del procedimento di stima di questi ultimi dai prezzi delle opzioni, secondo il contributo fondamentale di Breeden e Litzenberger (1978); si chiariscono i vantaggi dell'approccio neutrale al rischio e si introducono le principali evidenze empiriche che hanno dimostrato, nei diversi mercati, le divergenze di comportamento rispetto alle ipotesi del modello di Black e Scholes. Si affronta inoltre la problematica del valore previsionale della volatilità implicita.

Nella seconda sezione si prendono in esame le metodologie proposte da autori di provenienza eterogenea (ambito accademico, banche centrali, primarie *investment banks*), per l'estrazione

della distribuzione di probabilità *risk neutral* del sottostante dai prezzi delle opzioni, per il mercato azionario, dei cambi e dei tassi d'interesse. Nell'ambito di questi contributi, che rispondono necessariamente ad interessi conoscitivi diversi, si distingue il filone "empirico", nel quale si interpolano distribuzioni neutrali al rischio di tipo non parametrico a partire dai prezzi registrati sul mercato, rispetto agli approcci che implicano specifiche assunzioni sul processo stocastico seguito dal sottostante o dalla sua volatilità.

La terza sezione presenta le evidenze di alcuni test empirici che intendono in primo luogo rilevare le anomalie di mercato rispetto al modello di Black e Scholes (1973) ed in secondo luogo esemplificare i procedimenti di estrazione delle distribuzioni di probabilità implicite nei prezzi di mercato delle opzioni, utilizzando alcune delle metodologie operative "empiriche" presentate nella seconda sezione.

2. Modelli teorici e anomalie di mercato

In questa prima sezione del *paper* si affrontano i fondamenti teorici che sottostanno alle metodologie operative utilizzate per estrarre, dai prezzi delle opzioni, la distribuzione di probabilità *risk neutral* dell'attività finanziaria sottostante. Questa tematica viene affrontata dapprima in termini generali e poi riferita in modo più specifico alla formulazione di Black e Scholes (1973). Nell'ultima parte si passano in rassegna le anomalie riscontrate nei prezzi di mercato delle opzioni rispetto al modello di *pricing* teorico; questo costituisce lo spunto per analizzare, nelle successive sezioni del *paper*, l'impiego delle metodologie teoriche in un contesto valutativo diverso dal modello classico.

2.1 Distribuzione di probabilità *risk neutral* e "vera"

2.1.1 *Scommesse e contratti forward*

Il punto di partenza del percorso che ci porterà a definire le probabilità neutrali al rischio è relativo al *pricing* degli strumenti derivati, dal momento che gli *input* per il procedimento di estrazione della funzione di densità probabilistica sono proprio i prezzi delle opzioni. Secondo i modelli "di arbitraggio", in equilibrio un'opzione ha un valore che, pur legato ai possibili scenari futuri di mercato, non dipende dalle attese soggettive di chi valuta; dal momento che questa affermazione all'inizio può apparire contro intuitiva è bene procedere gradualmente con semplici esempi.

Esempio 1. Immaginiamo che i *bookmakers* *A* e *B* debbano fissare le quote delle scommesse sull'esito della finale dei campionati del mondo di calcio tra Italia e Brasile. Ipotizziamo che i due *bookmakers* siano in grado di conoscere in anticipo le somme che i loro clienti sono disposti a puntare sulla vittoria di una e dell'altra squadra: in entrambi i casi 2 miliardi sull'Italia e 1 miliardo sul Brasile. Il *bookmaker A* decide di quotare l'Italia vincente 3 a 2 ed il Brasile vincente 3 a 1. In questo modo, comunque vada la partita, le puntate complessive pari a 3 miliardi coprono il pagamento delle vincite ($3/2 \times 2$ miliardi se vince l'Italia, $3/1 \times 1$ miliardo se vince il Brasile). Il *bookmaker B* ritiene personalmente che il Brasile abbia una probabilità su cinque di vincere; per questo motivo quota, a prescindere dalla distribuzione delle puntate, l'Italia 5 a 4 ed il Brasile 5 a 1. Se vince l'Italia, paga $5/4 \times 2$ miliardi = 2,5 miliardi, realizzando un utile di 500 milioni. Se vince il Brasile però si espone ad una perdita di 2 miliardi, in quanto paga $5/1 \times 1$ miliardo = 5 miliardi.

Il valore atteso delle vincite pagate agli scommettitori è uguale per entrambi i *bookmakers* a 3 miliardi (per *A* risulta $2/3 \times 3$ miliardi + $1/3 \times 3$ miliardi, mentre per *B* è pari a $4/5 \times 2,5$ miliardi + $1/5 \times 5$ miliardi) e corrisponde alle puntate; ma per il *bookmaker A* il *payoff* è certo ed è pari ad un risultato, al netto di un equo margine di guadagno, nullo. Al contrario il *payoff* atteso della scommessa per *B* è aleatorio e soggetto, nell'evento meno probabile, ad una forte perdita.

E' evidente che la strategia preferibile è quella del *bookmaker A*, in quanto è caratterizzata da un *payoff* atteso identico alla strategia del *bookmaker B*, ma con un rischio decisamente inferiore.

Le probabilità esplicitamente formulate da *B* ($4/5$, $1/5$) sono probabilità soggettive. Le probabilità implicitamente applicate da *A* ($2/3$, $1/3$), che spiegano il suo pagamento atteso, sono probabilità *risk neutral* e, come sarà confermato in seguito, dipendono dalle puntate su ogni evento, cioè dalla domanda di *payoff* futuri condizionati al verificarsi di quell'evento.

Si è evidenziato nell'esempio che le quote di una scommessa non vengono stabilite in base alle attese soggettive del *bookmaker*, ma semplicemente osservando la distribuzione delle puntate e dunque identificando in termini oggettivi quelle quote che sono in grado di bilanciare esattamente le vincite con i premi incassati in ogni evento possibile; la fissazione delle quote, ovvero il procedimento di valutazione, dipende solamente quindi dalla distribuzione delle puntate e non dalle probabilità che soggettivamente possono essere assegnate al verificarsi degli eventi.

A questo punto estendiamo parallelamente il percorso logico sin qui delineato per il *bookmaker* al procedimento di *pricing* del contratto *forward*, che costituisce un esempio relativamente semplice di strumento derivato: è caratterizzato infatti da un *payoff* che dipende linearmente dal prezzo che l'attività sottostante assumerà alla scadenza.

Esempio 2. Immaginiamo che i *market makers* *A* e *B* debbano determinare il prezzo da quotare per la vendita di un contratto *forward* su di un titolo azionario che non paga dividendi. Il *market maker* *A* decide di coprirsi comprando l'azione oggi, indebitandosi per l'importo del prezzo a pronti S_0 al tasso continuo r con scadenza corrispondente al *forward*; per non incorrere in una perdita certa, *A* decide di fissare il prezzo di vendita del *forward* ad un livello pari all'importo del prestito da rimborsare a scadenza, pari a $S_0 \exp(rt)$. Il *market maker* *B* ritiene, sulla base della sua esperienza, che il prezzo dell'azione sia destinato a scendere, e dunque si accontenta di vendere il contratto *forward* ad un prezzo pari al valore di oggi dell'azione, ovvero S_0 . In questo modo *B* incorrerà in primo luogo in una perdita, potenzialmente illimitata, se non riuscirà a ricomprare prima della scadenza il titolo azionario ad un prezzo inferiore a S_0 di un ammontare almeno pari ai costi dell'indebitamento dal momento dell'acquisto sino alla scadenza del contratto *forward*. Inoltre offrirà ad altri operatori opportunità di profitto illimitate a rischio nullo; infatti chi acquista il contratto *forward* da *B* potrà coprirsi vendendo il titolo azionario oggi allo scoperto, investire l'importo S_0 così ottenuto e chiudere la posizione alla scadenza, lucrando in questo modo gli interessi al tasso r sino alla scadenza del contratto.

Il *payoff* dell'operazione per il *market maker* *A* è certo ed è pari ad un risultato, al netto di un equo margine di guadagno, nullo. Al contrario il *payoff* per il *market maker* *B* è aleatorio, può dare origine a perdite illimitate e mette a disposizione del mercato una "macchina da soldi". L'unico prezzo vincolante sul mercato per il contratto *forward* è dunque quello quotato dal *market maker* *A*, in quanto si tratta di un prezzo che non offre opportunità di arbitraggio attraverso indebitamento/investimento e acquisto/vendita dell'attività finanziaria sottostante a pronti. Se il *market maker* *B* è davvero convinto del futuro ribasso del prezzo del titolo azionario, dovrà comunque quotare un prezzo di vendita di non arbitraggio ed evitare di coprire la posizione, ovvero evitare di indebitarsi per acquistare il titolo azionario a pronti; in questo modo però la sua attività assume caratteristiche speculative.

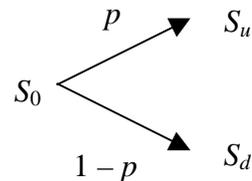
Il *pricing* di uno strumento derivato è neutrale rispetto alle preferenze dell'investitore; questo avviene per via dell'attività di arbitraggio, volta a sfruttare le opportunità di ottenere profitti pressoché certi, senza investimenti netti, in presenza di *mispricing* tra attività finanziarie equivalenti. Nel caso di un contratto *forward* il *pricing* avviene sulla base di un valore a scadenza dell'attività finanziaria sottostante riproducibile sinteticamente e pari a $S_T = S_0 \exp(rt)$. Tale valore prescinde dal prezzo futuro atteso dall'investitore. Al contrario si tratta di un prezzo di arbitraggio, che risulta vincolante per via dalla possibilità di replicare il contratto *forward* tramite l'acquisto dell'attività finanziaria sottostante a pronti finanziata da debiti a breve.

2.1.2 Il pricing delle opzioni

Dimostrare che il *pricing* del contratto *forward* è indipendente dalle preferenze degli investitori può non essere sufficiente per generalizzare il concetto all'intera categoria dei derivati, considerando che per altri strumenti più complessi, come le opzioni, il *payoff* non è lineare rispetto al prezzo futuro del sottostante e quindi la strategia di arbitraggio proposta per il *forward* non può considerarsi valida. L'opzione *call* ad esempio viene esercitata dall'*holder* solo quando il prezzo del sottostante a scadenza è superiore allo *strike price*; se il *writer* detiene il

sottostante per consegnarlo a scadenza, può incorrere in perdite in caso di non esercizio. Queste considerazioni potrebbero indurre a credere che per il *pricing* delle opzioni siano dunque rilevanti le attese soggettive di chi valuta.

In realtà, dopo lo sviluppo del modello di Black e Scholes (1973), si è dimostrato che, soddisfatte determinate ipotesi, anche le opzioni sono attività finanziarie ridondanti e dunque replicabili; anche in questo caso è dunque applicabile la logica del prezzo di arbitraggio. Per verificare questa ipotesi ci riferiamo ai modelli in tempo discreto che, dopo Cox e Ross (1976), hanno reso intuitivo questo concetto. Trattiamo il caso più semplice possibile, ovvero il modello binomiale ad un periodo. Si considera un mercato in cui è presente un titolo azionario che non paga dividendi e di cui si definisce il processo di prezzo¹ in termini discreti, ipotizzando che le quotazioni dell'azione dopo un periodo possano assumere due soli valori possibili, ovvero S_u in caso di rialzo e S_d in caso di ribasso. Si accosta al processo di prezzo una misura di probabilità che definisce appunto le probabilità di accadimento dei due eventi; tralasciamo per ora di approfondire come si stima tale misura. Introduciamo altresì la possibilità di prendere e dare a prestito allo stesso tasso privo di rischio r . Il modello può essere rappresentato in termini grafici:



A questo punto immaginiamo che esista un'opzione *call* sul titolo azionario che scade al tempo T con prezzo d'esercizio K pari a S_0 ; per applicare la logica dell'arbitraggio nel modello di *pricing* abbiamo bisogno di costruire un portafoglio V che replichi in ogni situazione il *payoff* C dell'opzione. Immaginiamo di costruire un portafoglio composto da una determinata quota di titolo azionario, che indichiamo con *Delta*, e da un determinato importo preso o dato a prestito, che individuiamo in B , con il vincolo che, come si è detto, tale portafoglio dovrà essere caratterizzato da un *payoff* che replica quello dello strumento derivato, C_u in caso di rialzo e C_d in caso di ribasso; in termini formali:

$$\begin{aligned} \text{tempo } 0 & \quad V_0 = \text{Delta}S_0 + B_0 \\ \text{caso di rialzo} & \quad V_T = \text{Delta}S_u + B_0 \exp(rt) = C_u \\ \text{caso di ribasso} & \quad V_T = \text{Delta}S_d + B_0 \exp(rt) = C_d \end{aligned}$$

Le soluzioni delle due incognite del sistema corrispondono a:

$$\begin{aligned} \text{Delta} &= \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} \\ B_0 &= \exp(-rt) \left(C_u - \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} S_u \right) \end{aligned}$$

Un portafoglio costruito combinando il titolo azionario sottostante ed indebitamento al tasso r secondo le proporzioni *Delta* e B è in grado dunque di replicare l'opzione; quest'ultima può

¹ Definire un processo di prezzo significa in termini generali impostare un modello per i prezzi (o per i rendimenti) dell'attività finanziaria che descriva come gli stessi evolvono nel tempo.

essere considerata perciò un'attività finanziaria ridondante che, per la logica dell'arbitraggio, deve avere un prezzo pari al portafoglio di replica:

$$C_0 = \Delta S_0 + B_0 = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} S_0 + \exp(-rt) \left(C_u - \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} S_u \right)$$

La formula di *pricing* è costruita su parametri osservabili e indipendenti dalle attese soggettive di chi valuta; in effetti nel modello non appare la misura di probabilità p e dunque è possibile affermare che nonostante i partecipanti al mercato possano avere opinioni diverse sulle probabilità degli eventi futuri, sono in ogni caso d'accordo circa il valore di mercato dell'opzione. In aggiunta, nella formula di *pricing* non è presente nessun parametro che identifica la propensione al rischio degli investitori e dunque il prezzo di mercato è compatibile con diverse posizioni soggettive rispetto al rischio.

Il modello di *pricing* formula ipotesi specifiche esclusivamente sulle caratteristiche del processo di prezzo², ovvero solo sulla determinazione di S_u e S_d . Volendo, possiamo peraltro determinare una misura di probabilità che, innestata sul processo, porti a determinare un valore atteso scontato pari al prezzo di equilibrio. Tale misura è indifferente rispetto alle attese soggettive dei singoli. Approfondiamo questa affermazione cercando di inserire nel modello di *pricing* una misura di probabilità; questo si può attuare agevolmente determinando il valore atteso della distribuzione binomiale, che risulta pari alla media dei possibili valori di prezzo ponderata per le rispettive probabilità di accadimento, ovvero $E(S_T) = pS_u + (1-p)S_d$. Se noi assumiamo un valore atteso pari al prezzo a termine di non arbitraggio, ovvero a $F = S_0 \exp(rt)$; possiamo a questo punto spiegare F come valore atteso sostituendo le probabilità p e $(1-p)$ con delle *pseudoprobabilità* q e $(1-q)$, indipendenti dalle attese soggettive di chi valuta, e tali che:

$$qS_u + (1-q)S_d = F = S_0 \exp(rt)$$

Dati F , S_u e S_d , le *pseudoprobabilità* q e $(1-q)$ si determinano in termini del tutto oggettivi, vincolando il valore atteso del prezzo dell'azione al *fair price* del contratto *forward*, infatti:

$$q = \frac{F - S_d}{S_u - S_d}$$

Generalizzando, arriviamo ad affermare³ che il valore di uno strumento derivato può essere espresso non solo come prezzo di non arbitraggio, ma anche come valore atteso, sotto una particolare misura di probabilità neutrale al rischio q , dei *payoff* a scadenza. Nel caso del *call* a un periodo avremo:

$$C_0 = \exp(-rt) [qC_u + (1-q)C_d]$$

La formula di *pricing* che si ottiene in forma probabilistica è equivalente alla formulazione ottenuta come prezzo di non arbitraggio; infatti si può dimostrare⁴ che:

² Per un'analisi approfondita della calibratura dei parametri del modello binomiale in base alle caratteristiche del processo di prezzo dell'attività finanziaria sottostante si veda Erzegovesi (1999a:5-12).

³ La dimostrazione di quanto enunciato sul piano formale va oltre gli scopi di questo lavoro. Per una trattazione rigorosa ed accessibile si veda Baxter e Rennie (1996:28-41).

⁴ Vogliamo dimostrare che il prezzo di non arbitraggio equivale al valore atteso dei *payoff* determinati con una misura di probabilità che prescinde dalle aspettative degli investitori, ovvero che $C_0 = \Delta S_0 + B_0 = \exp(-rt) [qC_u + (1-q)C_d]$:

$$\frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} S_0 + \exp(-rt) \left(C_u - \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} S_u \right) = \exp(-rt) \left[\frac{S_0 \exp(rt) - S_d}{S_u - S_d} C_u + C_d - \frac{S_0 \exp(rt) - S_d}{S_u - S_d} C_d \right]$$

$$C_0 = \text{Delta}S_0 + B_0 = \exp(-rt) [qC_u + (1-q)C_d]$$

Esempio 3. Ipotizziamo che il prezzo di un titolo azionario S_0 sia pari a 10, e che tra un periodo ($t=1$) possa assumere un valore S_u pari a 14 oppure un valore S_d pari a 6; il tasso r è pari al 10%. Supponiamo di voler scrivere un'opzione *call* con *strike price* pari a 10 e scadenza tra un periodo; il prezzo di non arbitraggio del derivato si determina in questo modo:

$$C_u = \max(0, S_u - K) = \max(0, 14 - 10) = 4$$

$$C_d = \max(0, S_d - K) = \max(0, 6 - 10) = 0$$

$$\text{Delta} = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} = \frac{4 - 0}{14 - 6} = 0,50$$

$$B_0 = \exp(-rt) \left(C_u - \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} S_u \right) = \exp(-0,10) \times (4 - 0,50 \times 14) = -2,71$$

$$C_0 = \text{Delta}S_0 + B_0 = 0,50 \times 10 - 2,71 = 2,29$$

Dopo un periodo in caso di rialzo il portafoglio avrà un valore di $4 = 0,50 \times 14 - 3$, mentre in caso di ribasso avrà un valore nullo ($0,50 \times 6 - 3$), esattamente come l'opzione *call*.

Verifichiamo ora che il valore dell'opzione pari a 2,29 determinato come prezzo di non arbitraggio corrisponda al valore atteso dei *payoff* sotto una misura di probabilità q :

$$q = \frac{S_0 \exp(rt) - S_d}{S_u - S_d} = \frac{10 \times \exp(0,10) - 6}{14 - 6} = 0,63$$

$$C_0 = \exp(-rt) [qC_u + (1-q)C_d] = \exp(-0,10) (0,63 \times 4 + 0,37 \times 0) = 2,29$$

Si tratta di utilizzare la cosiddetta misura martingala equivalente, così come viene definita in Harrison e Kreps (1979), che trasformando p in q redistribuisce la massa di probabilità facendo in modo che il valore atteso del prezzo di un titolo azionario sia pari al prezzo *forward*, senza peraltro modificare l'insieme di eventi possibili.

Qualsiasi strumento derivato, a cui sia associata una strategia di replica praticabile, può essere valutato in termini neutrali al rischio, ovvero come valore atteso secondo una misura di probabilità che rende il processo di prezzo una martingala. Le conclusioni raggiunte sono valide anche nell'ambito di modelli di *pricing* più complessi ed aderenti alla realtà rispetto al modello semplificato proposto, come in Cox, Ross e Rubinstein (1979) o in Black e Scholes (1973).

2.1.3 Dal prezzo delle opzioni alle probabilità *risk neutral*

L'ipotesi *risk neutral* è dunque implicita nel *pricing* mediante replica, o di arbitraggio; l'estrazione delle probabilità neutrali al rischio, che dà origine ad una funzione di densità rappresentata sull'asse dei prezzi possibili, non è che un mero procedimento matematico che a partire dai premi delle opzioni, dato il modello di *pricing* ed una struttura del processo di prezzo, determina la distribuzione di probabilità. Dimostriamo questa affermazione nell'esempio che segue, dove il procedimento impiegato stabilisce a priori una struttura del processo di prezzo a tempo discreto ad uno *step*, che a sua volta vincola la forma della distribuzione (binomiale); le ipotesi introdotte sono propedeutiche allo sviluppo di modelli più completi, che vengono approfonditi nel paragrafo 3.1.3 relativo al filone degli alberi binomiali impliciti.

$$\frac{C_u S_0 - C_d S_0 + \exp(-rt) [C_u S_u - C_u S_d - C_u S_u + C_d S_u]}{S_u - S_d} = \frac{S_0 C_u - S_0 C_d + \exp(-rt) [-S_d C_u + C_d S_u - C_d S_d + S_d C_d]}{S_u - S_d}$$

$$C_u S_0 - C_d S_0 + \exp(-rt) [-C_u S_d + C_d S_u] = C_u S_0 - C_d S_0 + \exp(-rt) [-C_u S_d + C_d S_u].$$

Esempio 4. In questo esempio utilizziamo una versione un po' più articolata del modello binomiale ad un periodo degli esempi precedenti per dimostrare come sia possibile costruire, a partire dai prezzi di mercato delle opzioni, la distribuzione di probabilità *risk neutral* del sottostante.

Prevediamo innanzitutto l'esistenza di un'opzione *call* e di un'opzione *put*, entrambe con prezzo d'esercizio pari al *forward*; tali opzioni, per la relazione di parità *put-call*, avranno lo stesso premio. E' possibile dimostrare⁵ che, per non ottenere valori degeneri (maggiore di 1 o minore di zero) per le probabilità *risk neutral* q e $(1-q)$, è necessario imporre la condizione che il prezzo *forward* sia compreso tra il prezzo in caso di ribasso ed il prezzo in caso di rialzo. Questa condizione permette tra l'altro di omettere l'operatore di massimizzazione nella formula del *payoff* delle opzioni, in quanto nello scenario di rialzo (ribasso) l'opzione *put* (*call*) avrà sicuramente valore nullo. Tutto questo si può esprimere in termini formali come segue:

$$K = F, S_u > F > S_d \Rightarrow 0 < q < 1, C_u = S_u - K, C_d = 0, P_u = 0, P_d = K - S_d$$

Applicando la formula probabilistica:

$$C = e^{-rt} [(S_u - K)q + 0 \times (1 - q)]$$

$$P = e^{-rt} [0 \times q + (K - S_d) \times (1 - q)]$$

Ricordando che $K=F$ e $C=P$, sostituiamo l'espressione precedentemente determinata per le *pseudoprobabilità* q e $(1-q)$:

$$C e^{rt} = (S_u - F) \frac{F - S_d}{S_u - S_d}$$

$$C e^{rt} = (F - S_d) \frac{S_u - F}{S_u - S_d}$$

Una delle due equazioni è ridondante, proprio per via delle ipotesi sul prezzo d'esercizio fissate all'inizio dell'esempio e per la parità *put-call*. Per ottenere delle soluzioni determinate per S_u, S_d e q è necessario imporre un'ulteriore condizione di simmetria dell'albero binomiale, individuabile in una regola di centratura sul prezzo *forward*; in altre parole si decide che il ribasso (rialzo) del prezzo che segue ad un rialzo (ribasso) riporta le quotazioni al livello di partenza, portato avanti nel tempo per due periodi. In questo modo è possibile scrivere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} C e^{rt} = (S_u - F) \frac{F - S_d}{S_u - S_d} \\ F^2 = S_u S_d \end{cases}$$

Il sistema ammette le seguenti soluzioni:

$$S_u = \frac{F + C e^{rt}}{1 - \frac{C e^{rt}}{F}}$$

$$S_d = \frac{F - C e^{rt}}{1 + \frac{C e^{rt}}{F}}$$

Sostituendo queste soluzioni nella formula della probabilità *risk neutral* q , dopo alcuni passaggi, si ottiene:

$$q = \frac{F - S_d}{S_u - S_d} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{C e^{rt}}{F} \right)$$

Rendiamo il procedimento sin qui elaborato più chiaro introducendo delle ipotetiche rilevazioni di mercato, ovvero il premio dell'opzione *call* osservato, che si suppone pari a 2,29 ed il prezzo

⁵ Per la dimostrazione si rinvia ad Erzegevesi (1999a:13).

del sottostante al tempo iniziale, che si ipotizza corrispondente a 10. Il tasso r non cambia ed è pari al 10%.

Per la logica dell'esempio impostato lo *strike price* dell'opzione è pari al prezzo *forward*:

$$K = F = S_0 e^{rt} = 10 \times e^{0,10} = 11,05$$

Utilizziamo i dati di mercato nelle soluzioni determinate in precedenza:

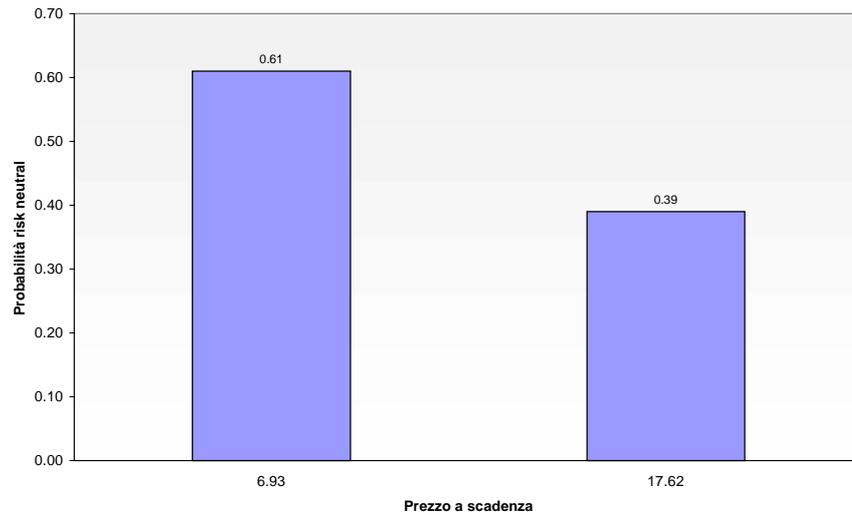
$$S_u = \frac{F + C e^{rt}}{1 - \frac{C e^{rt}}{F}} = \frac{11,05 + 2,29 \times e^{0,10}}{1 - \frac{2,29 \times e^{0,10}}{11,05}} = 17,62$$

$$S_d = \frac{F - C e^{rt}}{1 + \frac{C e^{rt}}{F}} = \frac{11,05 - 2,29 \times e^{0,10}}{1 + \frac{2,29 \times e^{0,10}}{11,05}} = 6,93$$

Le soluzioni ottenute per S_u e S_d rispettano per definizione le condizioni di regolarità rispetto al prezzo *forward* e dunque consentiranno di determinare una probabilità *risk neutral* q con valori non degeneri:

$$q = \frac{F - S_d}{S_u - S_d} = \frac{11,05 - 6,93}{17,62 - 6,93} = 0,39 \text{ che corrisponde a: } \frac{1}{2} \left(1 - \frac{C e^{rt}}{F} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2,29 \times e^{0,10}}{11,05} \right) = 0,39$$

Il prezzo di mercato dell'opzione, che in questo esempio è pari a 2,29, influenza direttamente la distanza della probabilità *risk neutral* dal valore centrale di 0,50.



La distribuzione estratta dai prezzi delle opzioni, pur nel contesto semplificato del modello binomiale ad un periodo, è dunque neutrale rispetto alle previsioni dei prezzi futuri e quindi non coincide necessariamente con la distribuzione soggettiva di ogni operatore. Può spiegare ad esempio la situazione di equilibrio di operatori *coperti*, come ad esempio gli arbitraggisti, che sono indifferenti rispetto al rischio, in quanto non lo assumono, poiché detengono posizioni di segno opposto. Può altresì giustificare i prezzi accettabili da operatori finanziari particolari, gli speculatori neutrali rispetto al rischio, che non richiedono un rendimento atteso più elevato per accettare un investimento più rischioso; possono operare dunque anche sulla base di scostamenti tra prezzo corrente e valore futuro atteso di piccola entità, poiché giudicano certo l'utile atteso e di conseguenza non necessitano di margini più rilevanti.

A questo punto è importante chiarire le relazioni e le differenze tra la distribuzione *risk neutral* che verrà stimata a partire dai prezzi delle opzioni e la distribuzione "vera" dei prezzi dell'attività finanziaria sottostante; ammettendo che quest'ultima esista e sia stazionaria, è

possibile specificarla solo ipotizzando una conoscenza perfetta dei fondamentali di mercato. Nella letteratura la distribuzione di probabilità "vera" del sottostante è stata approssimata tradizionalmente attraverso l'analisi della serie storica dei ritorni⁶; questo approccio potrebbe non essere preciso per via del cosiddetto *peso problem*⁷, ovvero per via della possibilità che il campione di ritorni utilizzato si riferisca solo alla parte centrale della distribuzione "vera", mentre la parte relativa alle code, soprattutto la coda di sinistra, non sia rappresentata nei dati. Un'altra alternativa può essere quella di stimare la densità "vera" attraverso un'aggregazione delle previsioni soggettive dei partecipanti al mercato, ottenuta ad esempio attraverso un'indagine tra gli operatori circa i possibili valori dell'attività finanziaria sottostante alla scadenza dell'opzione. In tutti i casi è comunque necessario specificare le preferenze aggregate degli agenti per desumere, dati i prezzi di equilibrio, le probabilità "vere" e le differenze tra queste e le probabilità *risk neutral*.

Esempio 5. Riprendiamo il modello binomiale ad un periodo degli esempi precedenti ed introduciamo in termini specifici il comportamento dell'agente rappresentativo, che massimizza l'utilità della sua ricchezza finale $U(S)$ al tempo T ; si ipotizza, come avviene usualmente, che l'utilità sia una funzione concava. La ricchezza viene misurata in funzione dell'andamento di S , che consideriamo un ampio indice di mercato azionario e che costituisce dunque una buona *proxy* della ricchezza. Immaginando che il mercato sia in equilibrio, possiamo ricavare il valore delle "vere" probabilità, che dovranno essere tali da massimizzare l'utilità attesa. Possiamo scrivere in termini formali:

$$\max p U(S_u) + (1 - p) U(S_d)$$

Introduciamo altresì come vincolo la relazione di identità che lega il valore della ricchezza alla data iniziale ai prezzi futuri e alle probabilità *risk neutral*, che può essere espresso, ricordando le restrizioni poste dall'attività di arbitraggio, come segue:

$$e^{-rt} (qS_u + (1 - q)S_d) = S_0$$

Risolviamo il problema di massimizzazione vincolata, impostando la funzione *lagrangiana* e risolvendo le condizioni di prim'ordine⁸, come segue:

$$L = p U(S_u) + (1 - p) U(S_d) - \lambda (e^{-rt} (qS_u + (1 - q)S_d) - S_0)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial S_u} = \frac{p \partial U(S_u)}{\partial S_u} - \lambda q e^{-rt} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial S_d} = \frac{(1 - p) \partial U(S_d)}{\partial S_d} - \lambda (1 - q) e^{-rt} = 0 \end{cases}$$

Dopo alcuni passaggi si ottiene:

⁶ Hanno seguito questo approccio ai fini del confronto tra distribuzioni "vere" e implicite, tra gli altri, Jackwerth (1997), Ait-Sahalia, Wang e Yared (1998), Rosenberg e Engle (1999).

⁷ In termini più specifici si riscontra un *peso problem* (termine che deriva dai ripetuti episodi di svalutazione del *peso* messicano) quando la distribuzione del processo di generazione dei prezzi include un evento estremo con una probabilità molto ridotta che, qualora si verifici, genera elevata disutilità per gli agenti economici. Dal momento che questo evento ha una bassa probabilità di verificarsi, esso non è generalmente osservabile in un campione di dati che non sia sufficientemente esteso; allo stesso tempo però la natura frequentemente catastrofica dell'evento influenza in modo rilevante le decisioni degli agenti. Per una rassegna dell'evoluzione della letteratura sul *peso problem* si rinvia ad Evans (1996).

⁸ Per ottenere un punto di massimo è sufficiente in questo caso risolvere le condizioni di prim'ordine, dal momento che si vuole massimizzare una somma di funzioni d'utilità concave che, per definizione, è anch'essa una funzione concava. L'estremante così determinato sarà dunque certamente un punto di massimo.

$$p = \frac{\frac{\partial U(S_d)}{\partial S_d}}{\frac{\partial U(S_u)}{\partial S_u} \left(\frac{1}{q} - 1 \right) + \frac{\partial U(S_d)}{\partial S_d}}$$

Si nota che per spiegare la differenza tra probabilità "vere" che indichiamo con p e probabilità *risk neutral* che indichiamo con q è necessario specificare una funzione di utilità che interpreti le preferenze.

E' possibile dimostrare che, utilizzando una funzione d'utilità neutrale al rischio, come potrebbe essere una funzione lineare, probabilità "vere" e "*risk neutral*" coincidono. Ad esempio:

$$U(S) = \alpha(S_u + S_d)$$

$$p = \frac{\alpha}{\alpha/q - \alpha + \alpha} = q$$

E' possibile altresì dimostrare, sempre nella cornice dell'esempio semplificato proposto, che funzioni d'utilità che implicano avversione al rischio, come potrebbe essere una funzione logaritmica, determinano probabilità "vere" diverse dalle probabilità *risk neutral*. Infatti:

$$U(S) = \ln S_u + \ln S_d$$

$$p = \frac{S_u}{\frac{S_d}{q} - S_d + S_u}$$

Se poniamo $S_u/S_d = w$, possiamo scrivere:

$$p = \frac{w}{\frac{1}{q} - 1 + w} = q \frac{w}{1 - q + wq}$$

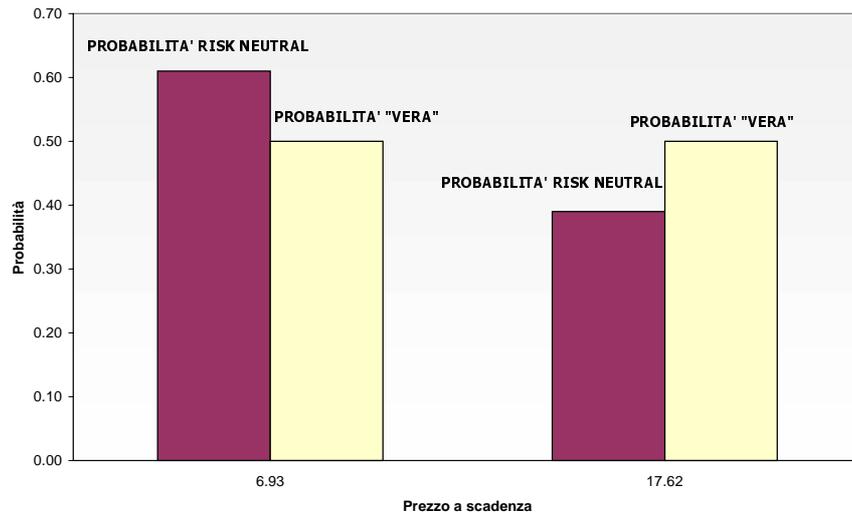
Questa espressione per p determina valori tendenzialmente nulli per $q=0$, valori pari a uno per $q=1$, e valori di p sempre superiori ai valori di q per $0 < q < 1$. Ipotizzando di riprendere i dati dell'esempio 4, ovvero $q=0,39$, $S_u=17,62$ e $S_d=6,93$, si ottiene una probabilità "vera" p pari a 0,62. Questa risultanza è coerente con l'avversione al rischio dell'agente sintetizzata nella funzione d'utilità di tipo logaritmico.

Definire correttamente le preferenze aggregate degli investitori è notoriamente difficoltoso e anche nell'ambito delle funzioni d'utilità isoelastiche è presente un ampio disaccordo riguardo a cosa costituisca un ragionevole valore per l'avversione al rischio; nel paragrafo 3.3, dopo che saranno stati introdotti alcuni strumenti d'analisi essenziali, sarà presentato un approfondimento delle relazioni tra distribuzione "vera" e "*risk neutral*" che elude il problema della specificazione delle preferenze.

Per chiarire la natura delle due distribuzioni di probabilità, *risk neutral* e "vera", si propone un semplice confronto nell'esempio che segue.

Esempio 6. Rappresentiamo in termini discreti la distribuzione di probabilità *risk neutral* del prezzo di un titolo azionario alla scadenza dell'opzione, riferendoci alle elaborazioni del precedente esempio 4. Rappresentiamo altresì la distribuzione di probabilità "vera" dello stesso titolo azionario che, per ipotesi, viene stimata attraverso un'indagine tra i partecipanti al mercato circa i possibili valori assumibili dal prezzo dell'azione alla scadenza dell'opzione; per analogia con il modello binomiale ad un periodo sin qui descritto, ipotizziamo che gli operatori esprimano le proprie aspettative relativamente agli stessi due prezzi possibili⁹.

⁹ La distribuzione di probabilità "vera" poteva altresì essere stimata specificando un'opportuna funzione d'utilità per gli agenti, come è stato fatto nell'esempio 5 ipotizzando in termini semplicistici una funzione di tipo logaritmico.



Ci possiamo interrogare sulle motivazioni che determinano le differenze tra le due distribuzioni, soprattutto in riferimento alla maggior massa di probabilità che, come si nota nel grafico, viene assegnata all'evento ribassista nella funzione di densità neutrale al rischio.

L'estrema semplificazione dell'esempio non ci permette ancora di fornire motivazioni circostanziate, ma è possibile comunque intuire che il mercato assegna ai contratti che generano *payoff* positivi per un ribasso di prezzo un valore superiore a quello che gli dovrebbe competere sulla base della semplice probabilità "vera" di accadimento. Dall'esempio 4 è emerso che S_d e le probabilità di ribasso si riflettono nel prezzo dell'opzione *put*; una probabilità di ribasso *risk neutral* maggiore rispetto alla probabilità "vera" può riflettere un eccesso di domanda di copertura da ribassi di prezzo, che si traduce in acquisti di *put* facendone lievitare il premio.

L'esempio appena proposto suggerisce un'interpretazione delle probabilità *risk neutral*; gli operatori di mercato sono in grado di gestire il rischio attraverso acquisti e vendite di strumenti finanziari ai rispettivi prezzi di mercato e perciò le probabilità neutrali al rischio si riferiscono al valore che il mercato assegna attualmente a *payoff* condizionati a specifici eventi. L'evidenza che titoli con *payoff* positivi in caso di ribasso sono più costosi rispetto ai titoli con stessi *payoff* in caso di rialzo può essere determinata da una maggiore probabilità di deprezzamento rispetto all'apprezzamento, da rilevanti perdite affrontate dai partecipanti al mercato con ribassi delle quotazioni al di sotto di una determinata soglia, oppure da un atteggiamento di particolare ansia associato a prezzi decrescenti o ancora da difficoltà e rischi nel replicare e coprire i *put* richiesti in eccesso da parte dei *market maker* in opzioni. Non è facile dire quale sia la causa specifica o l'importanza relativa di ognuna di esse, ma tutte le motivazioni, ed eventualmente altre non menzionate, sono sintetizzate in termini quantitativi nella distribuzione di probabilità *risk neutral*.

Per riassumere e completare l'analisi delle relazioni e delle differenze tra le distribuzioni di probabilità "vera" e *risk neutral*, proponiamo uno schema concettuale che ne sintetizza i punti essenziali. Possiamo rappresentare il fenomeno secondo tre dimensioni interagenti, ovvero processo stocastico del sottostante, forma funzionale delle distribuzioni di probabilità e preferenze dell'agente rappresentativo; relazioni logiche e matematiche consentono di affermare che di questi tre elementi, la scelta di due di essi implica il terzo¹⁰.

Ipotizziamo ad esempio di imporre innanzitutto delle restrizioni al processo stocastico seguito dal sottostante, ad esempio moto geometrico *browniano*; in altri termini questo significa vincolare il processo di prezzo "vero". Dato il processo, vincoliamo la forma della "vera"

¹⁰ Le relazioni tra preferenze dell'agente, processo del sottostante e distribuzioni *risk neutral* sono schematizzate in Ait-Sahalia e Lo (1998:502).

distribuzione del prezzo, che sarà lognormale; sulla base della serie dei prezzi stimiamo i momenti della stessa distribuzione. In secondo luogo otteniamo dai prezzi dei *forward* e delle opzioni uno stimatore del valore atteso e della varianza della distribuzione di probabilità implicita *risk neutral* la quale, coerentemente con il processo assunto, dovrà essere anch'essa lognormale¹¹. A questo punto è possibile analizzare le differenze tra le due distribuzioni, stimate ponendo assunti i primi due elementi (processo quindi forma delle distribuzioni), per determinare il terzo, ovvero i parametri della funzione d'utilità dell'agente rappresentativo in un modello d'equilibrio di mercato¹².

Se ipotizziamo al contrario di imporre restrizioni specifiche alle preferenze dell'agente rappresentativo, ad esempio una funzione d'utilità logaritmica, è possibile utilizzare nuovamente la conoscenza della forma funzionale dello stimatore della distribuzione di probabilità implicita *risk neutral* per determinare le caratteristiche del processo generatore dei prezzi del sottostante.

In conclusione si deve notare che il confronto tra distribuzione implicita *risk neutral* e distribuzione "vera" costituisce comunque un *joint hypothesis problem*, ovvero implica testare congiuntamente non solo un'ipotesi sulle preferenze, a meno di avere in questo senso un *prior* certo, ma anche un'ipotesi di efficienza del mercato delle opzioni; infatti l'estrazione della distribuzione neutrale al rischio dipende in modo cruciale da prezzi delle opzioni che siano effettivamente *arbitrage free*. Inoltre non deve essere trascurato il problema della possibile malspecificazione del modello di *option pricing* utilizzato.

2.2 Distribuzione implicita e prezzi Arrow-Debreu

Nel modello binomiale ad un periodo presentato in termini sintetici nel paragrafo precedente si è definito il valore di un'opzione *call* con un generico metodo probabilistico; si tratta di calcolare il valore atteso dei *payoff* moltiplicati per le rispettive probabilità di accadimento *risk neutral*:

$$C_0 = e^{-rt} [qC_u + (1-q)C_d], \quad C_u = \max(S_u - K, 0) \quad C_d = \max(S_d - K, 0)$$

Si ribadisce che seguendo questo approccio è possibile separare in due parti il problema di valutazione; la prima di esse è comune a tutti gli strumenti derivati su una stessa attività finanziaria sottostante e si riferisce alla costruzione del processo di prezzo, che nel modello semplificato presentato corrisponde alla determinazione di S_u e S_d , e alla conseguente definizione delle probabilità *risk neutral*. La seconda parte, specifica per ogni strumento, si riferisce alla struttura dei *payoff* finali e dipende evidentemente dalla formula contrattuale e dal processo di prezzo.

A questo punto, per rendere più evidente il collegamento tra prezzi di mercato di strumenti finanziari con *payoff* non lineare e probabilità neutrali al rischio in essi implicite, approfondiamo il ragionamento inquadrandolo nell'ambito del contesto della teoria delle decisioni finanziarie in condizioni d'incertezza, delineato dal modello di equilibrio generale sviluppato da Arrow e Debreu¹³. Tale impostazione si definisce come un modello di preferenze relative ad un insieme di precisi stati futuri spazio-temporali ed è fondata sull'esistenza di attività finanziarie elementari, denominate *Arrow-Debreu (AD) securities*, che presentano un

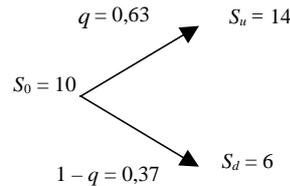
¹¹ Il vincolo della forma lognormale per la distribuzione di probabilità *risk neutral* verrà rimosso nelle tecniche che si presenteranno nei prossimi paragrafi.

¹² Per un'analisi approfondita delle relazioni tra processo dei prezzi d'equilibrio e forma della funzione d'utilità dell'agente rappresentativo si veda He e Leland (1993).

¹³ Si veda Debreu (1959) e Arrow (1964).

payoff pari ad un'unità di numerario in uno specifico stato della natura e zero in tutti gli altri casi. Qualsiasi attività finanziaria per la quale è definibile un insieme di stati futuri possibili ed il processo di prezzo che conduce a tali stati, è facilmente replicabile costruendo un idoneo portafoglio di titoli *AD*; si tratta di aggregare per ogni stato possibile una posizione lunga o corta in titoli elementari per un importo pari al *payoff* in quello specifico stato. Il prezzo a pronti di un titolo *AD* è pari alla probabilità *risk neutral* attribuita all'evento con *payoff* non nullo, moltiplicata per un appropriato fattore di sconto.

Esempio 8. Esemplichiamo il concetto di titolo *AD* nel contesto del modello binomiale ad un periodo sin qui considerato:



Gli stati futuri possibili sono dunque due e corrispondono all'evento di prezzo al rialzo S_u e di prezzo al ribasso S_d . Identifichiamo con AD_u (AD_d) il prezzo di un titolo elementare che paga un'unità nel caso di prezzo a scadenza pari a S_u (S_d) e zero in tutti gli altri casi; il prezzo dei titoli AD_i sarà pari a:

$$AD_u = q \times e^{-rt} \quad AD_d = (1 - q) \times e^{-rt}$$

$$AD_u = 0,63 \times e^{-0,10} = 0,57 \quad AD_d = 0,37 \times e^{-0,10} = 0,33$$

Riprendendo i dati dagli esempi del paragrafo precedente, volendo replicare l'opzione, caratterizzata da *strike* pari a 10 e scadenza tra un periodo, con un opportuno portafoglio di titoli *AD*, dovremmo semplicemente acquistare quattro titoli AD_u , per replicare il *payoff* C_u , e nessun titolo AD_d . Il prezzo dell'opzione è dunque pari a quattro volte il prezzo del titolo elementare AD_u :

$$C_0 = 4 \times AD_u = 4 \times 0,57 = 2,29$$

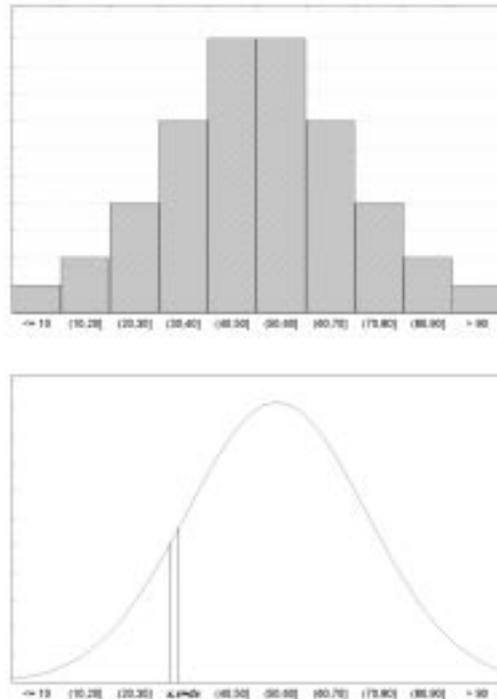
Si è dunque esemplificato il collegamento tra prezzo del titolo *AD* e probabilità neutrale al rischio. Il valore dell'opzione, spiegato dal generico metodo probabilistico del modello binomiale ad un periodo, può essere utilmente riespresso in termini di prezzi *AD*:

$$C_0 = AD_u C_u + AD_d C_d, \quad C_u = \max(S_u - K, 0) \quad C_d = \max(S_d - K, 0)$$

Un portafoglio composto dal titolo elementare AD_u e dal titolo AD_d non potrà che avere un valore pari ad uno, attualizzato a pronti, dal momento che esso produce un *payoff* unitario sull'intero spazio degli eventi possibili.

Il concetto di titolo *AD* può essere esteso altresì dal caso discreto al caso continuo: il titolo elementare pagherà un'unità di numerario se lo stato futuro che si verifica è compreso tra x e $x+dx$ e zero per tutti gli altri eventi possibili. In questo caso il prezzo del titolo *AD* rappresenta direttamente una misura di densità attualizzata; disponendo del valore di titoli elementari sull'intero asse dei prezzi possibili sarebbe possibile costruire la funzione di densità neutrale al rischio dei prezzi dell'attività finanziaria sottostante, denominata *State Price Density (SPD)*.

Esempio 9. Rappresentiamo la SPD ottenuta dai prezzi di titoli AD nel discreto e nel continuo.



Nel primo caso il prezzo del titolo AD rappresenta la probabilità *risk neutral* attualizzata di ottenere un prezzo a scadenza compreso in un intervallo discreto per il quale il titolo elementare ha payoff non nullo; si rappresenta convenzionalmente con un istogramma. L'insieme dei prezzi AD sull'intero asse dei prezzi possibili del sottostante costituisce la distribuzione di probabilità discreta.

Nel secondo caso il prezzo del titolo AD rappresenta direttamente una densità, in quanto l'intervallo $x, x+dx$ nel quale il titolo elementare ha *payoff* non nullo è di ampiezza infinitesima; l'insieme dei prezzi AD con queste caratteristiche dà origine ad una SPD continua.

A questo punto è giunto il momento di riformulare anche il modello di *pricing* probabilistico nel caso a tempo continuo, ricordando che l'approccio di valutazione è separato concettualmente in due parti, ovvero da un lato nella determinazione dei *payoff* finali e dall'altro nella definizione della misura di probabilità *risk neutral*. Il valore di un'opzione *call* potrà dunque essere così espresso in termini formali, assumendo tassi d'interesse costanti:

$$C_t = e^{-r\tau} \mathbb{E}^* \left[\max(S_T - K, 0) \right] \quad \text{con } \tau = T - t$$

$$\begin{aligned} C_t &= e^{-r\tau} \int_0^\infty \max(S_T - K, 0) f_t^*(S_T) dS_T \\ &= e^{-r\tau} \int_K^\infty (S_T - K) f_t^*(S_T | S_t) dS_T = \int_K^\infty (S_T - K) AD(S_T | S_t) dS_T \end{aligned}$$

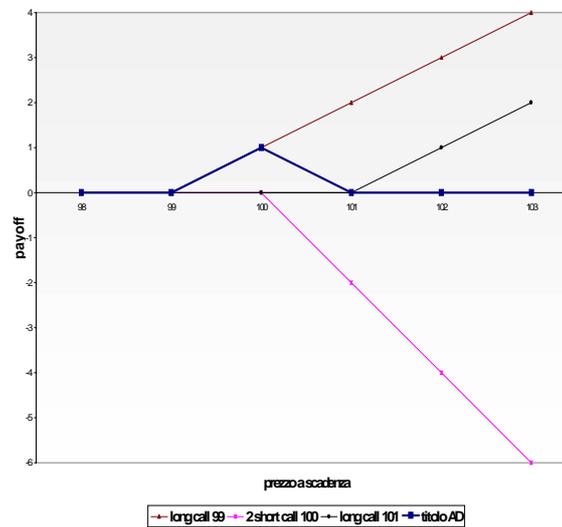
dove l'operatore \mathbb{E}^* e la funzione $f^*(S_T)$ indicano rispettivamente le aspettative connesse alla distribuzione neutrale al rischio e la stessa funzione di densità del prezzo finale S_T ; quest'ultima corrisponde, se attualizzata al tempo iniziale, alla SPD continua definita poco sopra.

- ◆ Nella formula di *pricing* dell'opzione *call* non compare il termine di volatilità $\sigma(S)$, in quanto si assume l'esistenza di una generica funzione di densità $f(S)$, di forma non vincolata. Pertanto l'approccio proposto in questo paragrafo per determinare la funzione di densità *risk neutral* non impone nessuna restrizione parametrica alla SPD.

Il metodo generico di *pricing* probabilistico presentato e dimostrato nel paragrafo precedente è a questo punto generalizzato sia in termini discreti che in termini continui. L'estrazione della

distribuzione di probabilità *risk neutral* implicita nei prezzi delle opzioni non può che avere inizio da questo modello di valutazione; infatti, come più volte rilevato, accanto alla definizione dei *payoff* finali è presente la funzione di densità *risk neutral* che si vuole estrarre, da cui è ricavabile altresì la misura della probabilità di esercizio. La soluzione più semplice e intuitiva in questo senso è quella di ottenere i prezzi di mercato di titoli *AD* per il maggior numero possibile di prezzi del sottostante, in modo da avere direttamente una misura della *SPD*; il problema di questa impostazione è l'inesistenza nella realtà di mercati sui quali siano negoziati titoli *AD*. Questa carenza può essere compensata attraverso la creazione in modo artificiale di titoli elementari per mezzo di particolari combinazioni di opzioni; ne introduciamo un primo esempio semplificato, lasciando alla seconda sezione del *paper* l'approfondimento della metodologia empirica.

Esempio 10. La replica di un titolo che offre un *payoff* positivo solo per uno specifico evento futuro tramite una combinazione di opzioni si ottiene con la strategia denominata *butterfly*. Si tratta di acquistare due opzioni *call* con uguale scadenza e sottostante, ma con prezzi d'esercizio diversi e ravvicinati; quindi si tratta di vendere due opzioni *call* (stessa scadenza e sottostante delle precedenti) con *strike price* intermedio rispetto ai due prezzi d'esercizio precedenti.



Il grafico rappresenta il profilo del *payoff* di una combinazione di opzioni costituita da: *long call* 99, *long call* 101, *short call* 100, *short call* 100. In un mondo in cui i prezzi possono assumere solo valori interi, la strategia produce un *payoff* positivo e unitario solo nel caso di un prezzo a scadenza del sottostante pari a 100; il prezzo di questo titolo *AD*, che costituisce una misura di probabilità *risk neutral* attualizzata, è costituito dalla sommatoria dei premi pagati ed incassati per l'acquisto e la vendita delle opzioni componenti. Restringendo la forbice di prezzo attorno a 100, il valore della strategia tende alla *SPD* nel continuo.

Un approccio per ottenere comunque dai prezzi delle opzioni la densità neutrale al rischio, a prescindere dalla presenza di titoli elementari e rimanendo nell'ambito di processi continui, viene specificato in Breeden e Litzenberger (1978). Si dimostra che, data una formula di *pricing* delle opzioni, la derivata prima del premio rispetto allo *strike price* ovvero il rapporto tra la riduzione di valore di un'opzione *call* per un incremento infinitesimo del suo prezzo d'esercizio e tale incremento, corrisponde alla probabilità *risk neutral* attualizzata di esercizio a scadenza cambiata di segno. La derivata seconda rispetto allo *strike* è invece una misura del prezzo *AD* per un valore di $S_T=K$.

Questi risultati possono essere interpretati in termini molto intuitivi. Per opzioni *call* che scadranno sicuramente *in the money* (*ITM*), un incremento del prezzo d'esercizio di un'unità determina una riduzione del valore corrente dell'opzione *call* pari al valore attuale di un'unità: infatti al tempo T l'*holder* eserciterà certamente e dovrà pagare l'attività finanziaria sottostante proprio un'unità in più. La derivata parziale del valore della *call* rispetto allo *strike price* è pari dunque al valore attuale di un'unità cambiato di segno. Nel caso contrario, ovvero per opzioni che

scadranno certamente *out of the money (OTM)*, un incremento del prezzo di esercizio di un'unità è del tutto irrilevante, perché il detentore non avrebbe comunque esercitato il diritto di acquistare. In questo caso la derivata parziale del valore della *call* rispetto allo *strike price* è pari a zero. Analizzando ora il caso intermedio, ovvero il caso di opzioni per cui non è certo l'esercizio a scadenza, l'incremento dello *strike price* determinerà un decremento del valore dell'opzione *call* per il valore attuale di un ammontare compreso tra zero ed uno. Più è elevata la probabilità neutrale al rischio che l'opzione venga esercitata a scadenza, più incide l'incremento del prezzo d'esercizio sulla riduzione di valore dell'opzione *call*.

Utilizzando la generica formula di *pricing* probabilistico, la derivata parziale del premio rispetto al prezzo d'esercizio K è così ricavata:

$$C_t = e^{-r\tau} \int_K^{\infty} (S_T - K) f_t^*(S_T | S_t) dS_T,$$

$$\frac{\partial C_t}{\partial K} = e^{-r\tau} \left\{ \int_K^{\infty} [-f^*(S_T)] dS_T - (K - K) f^*(S_T) \right\}$$

$$= -e^{-r\tau} \int_K^{\infty} f^*(S_T) dS_T$$

$$= -e^{-r\tau} [1 - F(K)],$$

dove $F(K)$ è la funzione di ripartizione *risk neutral* dell'attività finanziaria sottostante al tempo T . La derivata prima rispetto allo *strike price* corrisponde infatti al valore attuale della probabilità che l'opzione scada *ITM* cambiata di segno: $1-F(K)$ costituisce la probabilità che S_T sia maggiore di K a scadenza.

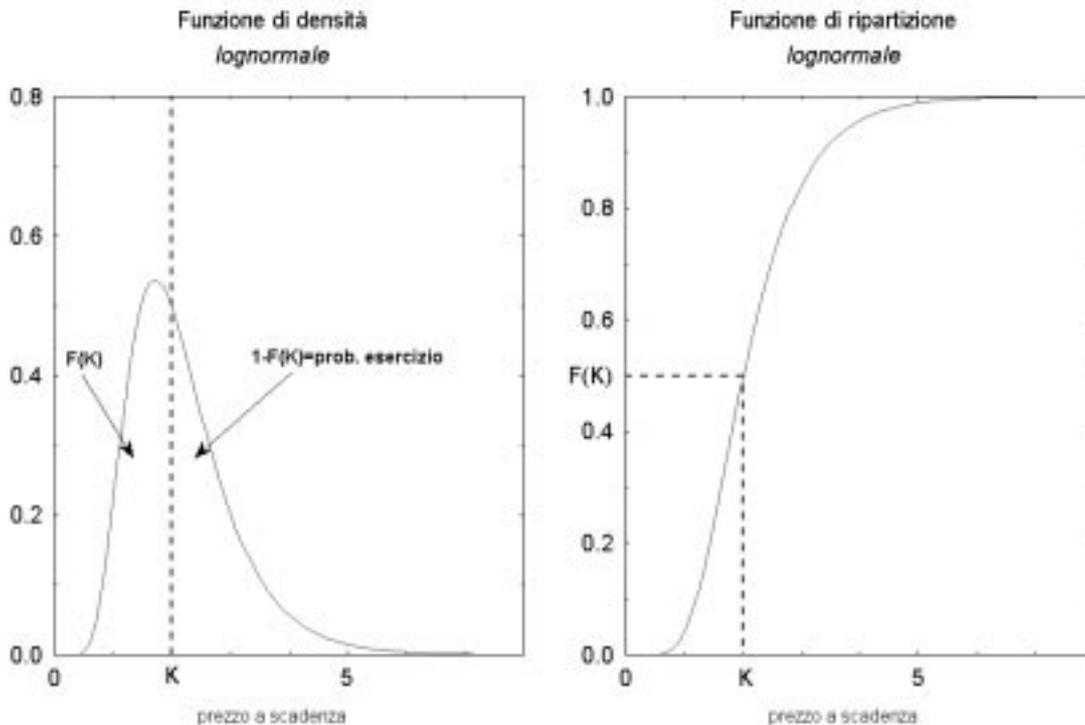


Figura 1: Esempio di funzione di densità e di ripartizione neutrale al rischio del prezzo del sottostante a scadenza.

Per ottenere a questo punto la funzione di densità probabilistica *risk neutral*, che era lo scopo del procedimento impostato, si tratta di misurare il cambiamento indotto nella probabilità di esercizio $1-F(K)$ da una variazione dello *strike price*. Disponendo della funzione di ripartizione

risk neutral, è agevole calcolarne la derivata parziale rispetto allo *strike price* per ottenere la distribuzione neutrale al rischio attualizzata al tasso r . In termini formali:

$$\frac{\partial^2 C_t}{\partial K^2} = e^{-r\tau} f^*(K) = AD(K)$$

In conclusione dunque, come dimostrato in Breeden e Litzenberger (1978), è possibile affermare che la derivata prima della formula di *pricing* di un'opzione *call* rispetto al prezzo d'esercizio è pari alla probabilità neutrale al rischio cambiata di segno che il prezzo del sottostante sia superiore a K al tempo T , attualizzata per il tempo τ intercorrente tra t e T ; la derivata seconda rispetto allo *strike price*¹⁴ è pari alla funzione di densità *risk neutral* del sottostante, moltiplicata per il valore oggi di un'unità di numerario consegnabile al tempo T .

2.3 Distribuzioni di probabilità in Black e Scholes

L'approccio di Breeden e Litzenberger (1978) per l'estrazione della distribuzione di probabilità implicita presentato nel paragrafo precedente si riferiva ad un modello di *pricing* probabilistico generale. L'analisi può essere resa più specifica prendendo in esame il modello classico di Black e Scholes (1973), considerando tra l'altro che le grandezze utilizzate dagli operatori in opzioni vi fanno specifico riferimento. Senza volerne in questa sede esplicitare ipotesi e formulazione, per le quali si rinvia ai numerosi manuali in argomento, si richiameranno solamente gli elementi utili per inserire il modello nell'ambito della struttura concettuale dell'approccio *risk neutral* e per applicare quindi agevolmente il procedimento per ottenere la distribuzione di probabilità implicita neutrale al rischio.

Tra le ipotesi più importanti vi è certamente l'assunzione che il processo dell'attività finanziaria sottostante sia rappresentabile mediante moto geometrico *browniano*:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad \text{con } dz = \varepsilon \sqrt{dt} \quad \text{ed } \varepsilon \sim N(0,1)$$

dove il tasso di rendimento atteso è pari al valore deterministico μ e costituisce la componente di *drift*, disturbata dall'aggiunta di *noise* per un'entità pari a σ (volatilità del titolo) moltiplicata per una variabile costituita dall'incremento di un processo di Wiener; il termine $N(x,y)$ rappresenta una distribuzione normale con valore atteso pari a x e deviazione standard pari a y .

Questa assunzione comporta che i ritorni dell'attività finanziaria sottostante si distribuiscano secondo una normale con queste caratteristiche:

$$\ln \frac{S_T}{S_t} \sim N \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau, \sigma \sqrt{\tau} \right] \quad \text{con } \tau = T - t$$

Tra le ipotesi di Black e Scholes vi è anche l'assenza di costi di transazione e dunque un'opzione *call* europea costituisce un'attività finanziaria ridondante, in quanto può essere replicata, come avveniva nell'ambito del modello binomiale ad un periodo introdotto nel paragrafo 2.1, con una strategia d'investimento nell'attività finanziaria sottostante in quote pari a Δ_t e in titoli privi di rischio in quote pari a B_t , a condizione che siano aggiustate continuamente le proporzioni in base all'andamento del sottostante:

¹⁴ Per l'opzione *put* i calcoli sono ancor più diretti: la derivata prima rispetto allo *strike price* corrisponde infatti alla stessa funzione di ripartizione neutrale al rischio, la derivata seconda è uguale, come nel caso della *call*, alla funzione di densità.

$$C_t = \text{Delta}_t S_t + B_t \quad \text{con } \text{Delta}_t = N(d_1) \quad \text{e } B_t = -Ke^{-r\tau} N(d_2)$$

$$C_t = S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2)$$

$$\text{dove: } d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

Dal momento che l'opzione può essere replicata perfettamente e senza costi, può anche essere valutata in termini *risk neutral*, ovvero tramite un valore atteso dei *payoff* determinato utilizzando la distribuzione neutrale al rischio:

$$\begin{aligned} C_t &= e^{-r\tau} \int_0^{\infty} \max(S_T - K, 0) f_t^*(S_T) dS_T \\ &= e^{-r\tau} \int_K^{\infty} (S_T - K) f_t^*(S_T | S_t) dS_T \\ &= e^{-r\tau} \int_K^{\infty} (S_T - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(S_t/K) - (r_{t,\tau} - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2\right] dS_T \end{aligned}$$

Per una comprensione più intuitiva possiamo scomporre il valore teorico di un'opzione *call* come prodotto tra un *payoff* medio atteso in caso di esercizio e la probabilità che l'opzione venga esercitata. Questa espressione per il valore teorico dell'opzione si rende possibile associando a $N(d_2)$ la probabilità che l'opzione scada *ITM*¹⁵ e trovando un'espressione che identifichi il prezzo medio atteso in caso di esercizio \bar{S}_T^w :

$$C_t e^{r\tau} = (\bar{S}_T^w - K) N(d_2) + 0[1 - N(d_2)]$$

Si può dimostrare¹⁶ che:

$$\bar{S}_T^w = S_t \frac{N(d_1)}{N(d_2)} e^{r\tau}$$

Questo permette di riscrivere la formula classica di Black e Scholes (1973) secondo una logica probabilistica *risk neutral*:

$$C_t = e^{-r\tau} \left(S_t \frac{N(d_1)}{N(d_2)} e^{r\tau} - K \right) N(d_2)$$

¹⁵ E' possibile dimostrare infatti che:

$$N(d_2) = \int_K^{\infty} f_t^*(S_T | S_t) dS_T$$

¹⁶ La dimostrazione è piuttosto semplice se si confronta l'espressione in termini probabilistici della formula di *pricing* con il modello classico di Black e Scholes (1973):

$$\begin{aligned} C &= e^{-r\tau} \left[(\bar{S}_T^w - K) N(d_2) + 0[1 - N(d_2)] \right] = S_t N(d_1) - e^{-r\tau} K N(d_2) \\ e^{-r\tau} \bar{S}_T^w N(d_2) - e^{-r\tau} K N(d_2) &= S_t N(d_1) - e^{-r\tau} K N(d_2) \\ \bar{S}_T^w &= S_t \frac{N(d_1)}{N(d_2)} e^{r\tau} \end{aligned}$$

L'approccio di Breeden e Litzenberger (1978) analizzato nel paragrafo precedente nella determinazione della distribuzione di probabilità è dunque applicabile agevolmente anche nella cornice del modello di Black e Scholes (1973). Attraverso il calcolo della derivata seconda del prezzo dell'opzione *call* rispetto allo *strike price* si perverrà dunque a determinare una funzione di densità probabilistica *risk neutral* del prezzo dell'attività finanziaria sottostante, costituita da un'espressione analitica in forma chiusa.

La derivata prima della funzione di *pricing* rispetto allo *strike price* K risulta pari al valore attuale cambiato di segno dell'opposto della funzione di ripartizione, ovvero (omettendo alcuni passaggi):

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_t}{\partial K} &= \frac{\partial \left(e^{-r\tau} \left(S_t \frac{N(d_1)}{N(d_2)} e^{r\tau} - K \right) N(d_2) \right)}{\partial K} \\ &= -e^{-r\tau} N(d_2) \\ &= -e^{-r\tau} N \left(\frac{\ln(S_t/K) + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}} \right)\end{aligned}$$

Si tratta in effetti della probabilità, attualizzata e cambiata di segno, che a scadenza l'opzione venga esercitata, ovvero che il prezzo del sottostante sia superiore al prezzo d'esercizio.

Derivando una seconda volta rispetto allo *strike price* K si ottiene la distribuzione di probabilità neutrale al rischio:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C_t}{\partial K^2} &= e^{-r\tau} n(d_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(S_t/K) - (r_{t,\tau} - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

La distribuzione di probabilità *risk neutral* del prezzo dell'attività finanziaria sottostante nel modello di Black e Scholes (1973) è una funzione di densità lognormale "mappata" su una normale con media $(r_{t,\tau} - \sigma^2/2)\tau$ e varianza $\sigma^2\tau$. Questa risultanza è del tutto coerente con le ipotesi del modello richiamate all'inizio del paragrafo e riguardanti la distribuzione normale dei rendimenti espressi come logaritmi dei prezzi.

Il procedimento generale proposto in Breeden e Litzenberger (1978), che in questo caso particolare si riduce ad un'espressione analitica in forma chiusa, si rivelerà prezioso quando, di fronte alle anomalie che si rileveranno nel prossimo paragrafo, sarà necessario allontanarsi dal contesto tipico del modello di Black e Scholes (1973).

2.4 Volatilità storica e volatilità implicita

L'unica variabile della formula di *pricing* di Black e Scholes (1973) che non può essere osservata direttamente è la volatilità del prezzo dell'attività finanziaria sottostante attesa durante la vita dell'opzione. Un approccio possibile per affrontare questa problematica è quello di inserire nel modello di valutazione una misura della volatilità dei ritorni calcolati sulla serie storica dei prezzi del sottostante. Coerentemente con l'ipotesi di processo *browniano*

geometrico per il processo del sottostante introdotta nel paragrafo precedente, ed assumendo indipendenza tra i termini casuali in istanti successivi, è possibile calcolare la varianza della distribuzione dei rendimenti su un periodo discreto τ pari a $T-t$. Essa sarà data dall'integrale delle varianze istantanee $\sigma^2 d\tau$ che, per l'ipotesi di correlazione nulla, è proporzionale al tempo. Per le proprietà dei rendimenti logaritmici, il rendimento del periodo τ è pari alla somma dei rendimenti sui sottoperiodi componenti:

$$\ln \frac{S_T}{S_t} = \ln \frac{S_{t+1}}{S_t} + \ln \frac{S_{t+2}}{S_{t+1}} + \dots + \ln \frac{S_T}{S_{T-1}}$$

La varianza si ricava analogamente alla varianza di una somma di variabili casuali con correlazione nulla, ovvero come somma delle relative varianze. Essendo σ^2 costante nelle ipotesi del modello di Black e Scholes (1973), è possibile raccogliere e sommare le durate dei singoli sottoperiodi:

$$\text{var} \left(\ln \frac{S_T}{S_t} \right) = \sigma^2 [(t+1)-t] + \sigma^2 [(t+2)-(t+1)] + \dots + \sigma^2 [T-(T-1)] = \sigma^2 (T-t)$$

$$\text{dev. standard} \left(\ln \frac{S_T}{S_t} \right) = \sigma \sqrt{T-t}$$

La volatilità è comunemente espressa nella pratica operativa come la deviazione standard dei rendimenti logaritmici su di un orizzonte temporale annuo. Se l'ipotesi di processo geometrico *browniano* per i prezzi è valida, è possibile convertire la volatilità relativa a periodi diversi secondo una regola di proporzionalità rispetto alla radice quadrata del tempo (*t-square rule*).

Esempio 11. Immaginando di disporre della serie storica relativa al periodo τ di prezzi rilevati ogni giorno per l'attività finanziaria sottostante, possiamo calcolare la deviazione standard campionaria s sui rendimenti r_i ¹⁷:

$$r_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}$$

Utilizzando la regola di proporzionalità della radice quadrata del tempo, possiamo ottenere una stima per σ . Se si ipotizza che in un anno ci siano 250 giorni lavorativi ¹⁸ e che il valore di s ottenuto dai ritorni corrisponda a 0,0126, la volatilità stimata da inserire nel modello di *pricing* risulta pari a:

$$\hat{\sigma} = s\sqrt{\tau} = 0,0126\sqrt{250} = 0,20$$

Un approccio diverso rispetto al calcolo di una misura di volatilità storica che successivamente viene inserita nella formula di *pricing*, consiste nel calcolare la volatilità implicita il cui valore si ottiene, applicando a ritroso il modello di valutazione, dai premi quotati sul mercato; tale procedimento è molto comune tra gli operatori al punto che in alcuni mercati, come ad esempio

¹⁷ Per l'errore nella stima della volatilità indotto dall'utilizzo di rendimenti percentuali anziché logaritmici si veda Campbell, Lo e MacKinlay (1997:362).

¹⁸ Sul problema dei giorni di mercato chiuso nella stima della volatilità storica si veda ancora Campbell, Lo e MacKinlay (1997:363-366).

nel mercato delle opzioni su cambi *OTC*, i premi delle opzioni vengono quotati in unità di volatilità implicita.

L'importanza che possiamo attribuire ai nostri fini alla volatilità implicita si riferisce alla sua possibile interpretazione come previsione del mercato relativa alla variabilità media del sottostante durante la vita residua dell'opzione. Nei prossimi paragrafi si farà dunque frequente riferimento a questa misura sia per comprendere prassi operative, sia per rilevare specifiche anomalie che in alcuni casi possono rendere impreciso il processo di valutazione. E' opportuno dunque un approfondimento sulle metodologie di calcolo e sugli accorgimenti necessari nella stima.

Per il calcolo della volatilità implicita si applicano metodi matematici iterativi¹⁹, in quanto detto valore non può essere ricavato in termini analitici invertendo la formula di *pricing*.

Tra i metodi matematici iterativi possono essere citati:

Il metodo di Newton-Raphson.

Questo metodo, che nel calcolo della volatilità implicita risulta molto efficiente, prevede lo svolgimento dei seguenti passaggi:

- Si attribuisce un valore a σ e si calcola il prezzo dell'opzione. Se tale valore differisce dal prezzo di mercato si affina la stima iniziale attraverso la seguente formula:

$$\sigma_2 = \sigma_1 - \frac{C(\sigma_1) - C_{mkt}}{\frac{\partial C}{\partial \sigma}}$$

in cui:

σ_2 = stima rettificata di σ ,

σ_1 = stima iniziale di σ ,

$C(\sigma_1)$ = valore dell'opzione sulla base di σ_1 ;

C_{mkt} = valore di mercato dell'opzione

$\partial C / \partial \sigma$ = derivata parziale del premio rispetto alla volatilità implicita (*vega*).

- Si ripete il procedimento di affinamento finché $C(\sigma_1) = C_{mkt}$ con un margine di errore trascurabile.

◆ Per tutte le rappresentazioni grafiche ed i test empirici presentati nel paper che richiederanno la determinazione della volatilità implicita, sarà utilizzato questo procedimento iterativo.

Il metodo della bisezione

Con questo metodo si determinano due valori di σ , uno basso ed uno alto, in modo tale che la volatilità implicita effettiva sia compresa in tale intervallo. Vengono poi determinati i valori dell'opzione in funzione di questi due valori della volatilità. Successivamente si passa alla determinazione di una stima intermedia di σ nel seguente modo:

$$\sigma_M = \sigma_L + (C_{mkt} - C(\sigma_L)) \frac{\sigma_H - \sigma_L}{C(\sigma_H) - C(\sigma_L)}$$

dove:

σ_L = volatilità bassa;

σ_H = volatilità alta.

Si determina poi il premio dell'opzione in funzione della stima σ_M ottenendo così $C(\sigma_M)$. Si ripete il procedimento con l'avvertenza che se:

¹⁹ In alternativa alle *routine* numeriche è possibile impiegare dei procedimenti di stima che impiegano formulazioni molto articolate dei parametri osservabili; per un contributo recente in questo senso si veda Corrado e Miller (1996).

$C_{mkt} > C(\sigma_M)$ si utilizzano gli estremi σ_H e σ_M ed i corrispondenti valori di C .

$C_{mkt} < C(\sigma_M)$ si utilizzano gli estremi σ_M e σ_L ed i corrispondenti valori di C .

La stima della volatilità implicita può essere alterata e può quindi fornire indicazioni fuorvianti a causa dei tipici problemi di microstruttura dei mercati che vengono sintetizzati nel quadro sinottico della tabella 1²⁰. Il prezzo di mercato da utilizzare nella procedura iterativa di calcolo deve dunque essere tale da eliminare ogni possibile distorsione di questo tipo.

A questo punto, utilizzando un prezzo dell'opzione corretto per eventuali effetti distorsivi con gli accorgimenti suggeriti nel quadro di tabella 1 e grazie alla *routine* numerica precedentemente descritta, è possibile calcolare la volatilità implicita.

Effetto di microstruttura	Causato da	Opportuni accorgimenti
Non sincronismo tra prezzo dell'opzione e prezzo del sottostante.	Orario di chiusura differenziato tra mercato del sottostante e mercato delle opzioni.	Utilizzo dell'ultimo prezzo dell'opzione prima della chiusura del sottostante. Utilizzo della parità <i>put-call</i> nella regressione (vedi Shimko (1993)).
	Contrattazione dell'opzione e del sottostante su mercati differenti.	Utilizzo della parità <i>put-call</i> nella regressione (vedi Shimko (1993)).
Utilizzo di un tasso di dividendo continuo non corretto.	Pagamento periodico anziché continuo dei dividendi.	Utilizzo della parità <i>put-call</i> nella regressione (vedi Shimko (1993)). Utilizzo del prezzo <i>future</i> e del modello di Black (1976a).
Utilizzo di un tasso d'interesse non corretto.	Tassi di rendimento di titoli non privi di rischio o con scadenza diversa rispetto all'opzione.	Utilizzo della parità <i>put-call</i> nella regressione (vedi Shimko (1993)). Utilizzo del prezzo <i>future</i> e del modello di Black (1976a).
<i>Spread</i> denaro lettera.	Margini di profitto dei <i>market maker</i> .	Utilizzo di un prezzo medio per il calcolo della volatilità implicita.
Prezzi dell'opzione (più raramente del sottostante) non rappresentativi.	Transazioni poco frequenti per le caratteristiche dello strumento (es. opzioni <i>call deep OTM</i>).	Utilizzo di un prezzo pari alla media ponderata dei singoli prezzi per i rispettivi volumi contrattati.

Tabella 1: Effetti di microstruttura del mercato sui prezzi delle opzioni.

Se la formula di *pricing* di Black e Scholes (1973) fosse corretta, allora la volatilità implicita ottenuta dal prezzo di mercato di qualsiasi opzione relativa al medesimo sottostante dovrebbe essere allo stesso livello. Naturalmente, come sarà approfondito nei prossimi paragrafi, questo non avviene; alcune delle ipotesi del modello sono evidentemente violate nella realtà. Questa evidenza potrebbe sembrare incoerente con il fatto che alcuni *market maker*, come si diceva in precedenza, quotano i premi delle opzioni in termini di volatilità implicita; in realtà tale prassi operativa è solo indicativa della popolarità del modello nel mercato e non della correttezza delle ipotesi sottostanti. Infatti esiste una corrispondenza biunivoca tra prezzo dell'opzione e volatilità implicita, per cui una quotazione in volatilità non implica che il prezzo a cui corrisponde sia stato fissato utilizzando sì la formula ma non necessariamente le ipotesi di Black e Scholes (1973). Si tratta di esprimere lo stesso concetto con parole diverse: il contenuto informativo della quotazione espressa come premio o come volatilità è uguale nei due casi.

²⁰ Per una rassegna esauriente degli effetti della microstruttura del mercato sulla serie storiche dei prezzi di attività finanziarie si veda Campbell, Lo e MacKinlay (1997:83-144).

2.5 Deviazioni rispetto a Black e Scholes

Il modello di Black e Scholes si basa sull'assunzione che i ritorni dell'attività finanziaria sottostante seguano un processo di tipo *random walk* con volatilità stazionaria e che il mercato sia privo di frizioni; esistono tuttavia numerose evidenze di studi empirici sulle proprietà stocastiche²¹ dei ritorni finanziari e sul comportamento dei prezzi delle opzioni²², che riscontrano come tale ipotesi non si riveli del tutto corretta. Questo implica delle anomalie nel *pricing* delle opzioni da parte del mercato rispetto al modello.

2.5.1 *L'effetto volatility smile e skew*

Nel modello di Black e Scholes si ipotizza un livello di volatilità costante pari a σ . Nella realtà la misura di volatilità implicita, calcolata inserendo nella formula di *pricing* il prezzo dell'opzione registrato sul mercato, evidenzia valori diversi per livelli diversi del prezzo d'esercizio. Questo costituisce certamente l'anomalia più rilevante del modello classico, con il risultato che la funzione di densità *risk neutral* dell'attività sottostante, così come è stata descritta nel paragrafo 2.1, non è più rappresentabile con precisione mediante una distribuzione lognormale.

Le evidenze empiriche dimostrano come la volatilità implicita calcolata sul mercato azionario, sul mercato dei cambi e sul mercato dei tassi d'interesse tramite la formula di Black e Scholes sia di norma più elevata per opzioni *call in the money (ITM)* e *put out of the money (OTM)*, rispetto al valore più basso registrato *at the money (ATM)*; la volatilità implicita per opzioni *call OTM* e *put ITM* è ad un livello più basso, generalmente nel mercato azionario, o più alto, tipicamente nel mercato dei cambi, rispetto al valore ottenuto *ATM*. In un grafico che esponga il grado di *moneyness* in ascissa e la volatilità implicita in ordinata si genera il cosiddetto *volatility smile*.

- ◆ *Il grado di moneyness può essere espresso in diversi modi. La scelta più semplice è quella di considerare semplicemente il livello dello strike price: in questo caso a livelli più elevati (bassi) dello stesso corrisponde una maggiore moneyness delle opzioni put (call). Un metodo più preciso può essere quello di considerare il rapporto tra prezzo d'esercizio e prezzo spot (o forward); in questo caso si mantengono le proporzioni a prescindere dal livello delle quotazioni e dunque sono più agevoli i confronti nel tempo e per attività finanziarie sottostanti diverse. Un terzo metodo più evoluto consiste nel considerare il Delta dell'opzione, che costituisce una funzione del livello di moneyness dell'opzione; al fine di ottenere in ascissa una scala di valori omogenei compresi tra zero e 1, con un valore pari pressoché a 0,50 per opzioni ATM, si può utilizzare un procedimento di normalizzazione simile a quello che viene descritto nell'esempio che segue.*

²¹ Per uno dei primi contributi in questo senso si veda Fama (1965). Per una trattazione completa delle evidenze di non linearità nelle serie dei ritorni finanziari si veda tra gli altri Brock, Hsieh e LeBaron (1991).

²² Mentre gli studi sulle proprietà stocastiche del sottostante sono focalizzati sui ritorni realizzati, gli studi che utilizzano i prezzi delle opzioni si riferiscono alla percezione degli operatori di mercato della distribuzione futura del sottostante.

Esempio 12. Vogliamo confrontare le misure di *moneyness* utilizzabili per un'opzione sull'indice azionario *MIB30* rispetto ad una quotazione del sottostante pari a 34.000 *spot* e 34.300 *forward*. Si tenga presente che le due nozioni di opzione *ATM* ($K=F$ e $\Delta^*=0,50$) non sono tra loro esattamente equivalenti.

Misura di <i>moneyness</i>	Put <i>OTM</i> - Call <i>ITM</i>	<i>ATM</i>	Put <i>ITM</i> - Call <i>OTM</i>
Livello dello <i>strike</i>	$K < 34300$	$K = 34300$	$K > 34300$
<i>Strike price</i> / <i>Forward</i>	$(K/F) < 1$	$(K/F) = 1$	$(K/F) > 1$
<i>Delta</i> opzioni <i>call</i>	$0,50 < \Delta < 1$	$\Delta = 0,50$	$0 < \Delta < 0,50$
<i>Delta</i> opzioni <i>put</i>	$-0,50 < \Delta < 0$	$\Delta = -0,50$	$-1 < \Delta < -0,50$
<i>Delta</i> "normalizzato"*	$0 < \Delta^* < 0,50$	$\Delta^* = 0,50$	$0,50 < \Delta^* < 1$

* Assume valori da 0 a 1. Si ottiene innanzitutto considerando il valore assoluto del *Delta* delle *put OTM* e *ATM* ed in secondo luogo sottraendo da 1 il valore del *Delta* delle opzioni *call OTM*.

L'effetto *smile* non evidenzia soltanto le imperfezioni del modello, ma anche la piena consapevolezza del mercato al riguardo. Spesso il mercato attribuisce ad eventi estremi probabilità superiori rispetto al caso lognormale, continuando ad utilizzare la terminologia del modello di Black e Scholes, ma aumentando o diminuendo i prezzi di opzioni per particolari fasce di prezzo d'esercizio. I partecipanti al mercato impostano dunque delle assunzioni più complesse sul processo seguito dal sottostante, rispetto al moto geometrico *browniano*; assegnano perciò probabilità differenti ai valori finali di prezzo rispetto a quelli coerenti con la distribuzione lognormale.

Le evidenze empiriche su alcuni mercati, tipicamente il mercato azionario, riscontrano la presenza di un effetto *smile* asimmetrico, ovvero di una misura di volatilità implicita che in genere decresce in modo monotono con l'incremento del livello di *strike*; il grado di asimmetria (*skew*), che trasforma lo *smile* in uno *smirk* (ghigno), può fornire importanti indicazioni sulle aspettative o sul premio al rischio richiesto implicitamente dal mercato per il potenziale verificarsi di determinati eventi.

In figura 2 si rappresentano a scopo esemplificativo alcuni casi di rilevazione della volatilità implicita, rispetto ad una misura di *moneyness* dell'opzione e per diverse attività finanziarie sottostanti. In tutti i casi è violata l'ipotesi di volatilità costante prevista dal modello classico; in alcuni mercati si nota la presenza di un effetto *smile* caratterizzato da una sostanziale simmetria, mentre sono evidenti profili con pronunciata asimmetria negativa, in modo particolare per il mercato azionario.

Tali evidenze sono coerenti con le verifiche empiriche proposte nella letteratura, che hanno individuato invariabilmente la presenza di un *volatility smile* più o meno pronunciato e più o meno asimmetrico nella totalità dei mercati presi in considerazione. Nel mercato dei cambi ad esempio sembra essere sempre presente un effetto *smile*, sulla simmetria del quale esistono peraltro evidenze contrastanti²³; in McCauley e Melick (1996a) si costruisce su dati di mercato un *volatility smile* asimmetrico per il cambio dollaro/yen, mentre si rileva una sostanziale simmetria per i *cross* contro dollaro in Backus, Foresi, Li e Wu (1997). In Campa, Chang e Reider (1998) si rappresentano graficamente le funzioni della volatilità implicita per cinque valute²⁴; i profili asimmetrici evidenziati in tutti i casi analizzati pare che riflettano la maggiore

²³ Tali evidenze contrastanti sono determinate in primo luogo dai diversi momenti di osservazione e dunque dal cambiamento nel tempo delle aspettative di mercato (delle relazioni tra volatilità e variabile temporale si darà conto nel paragrafo 1.4.2). In secondo luogo dalle differenti coppie di valute considerate.

²⁴ La sostanziale asimmetria è verificata per la volatilità implicita di opzioni *over the counter*, scadenza tre mesi, osservate in data 11.09.1996, per i *cross rates* *ITL/DEM*, *DEM/USD*, *JPY/USD*, *DEM/GBP*, *USD/GBP*.

probabilità di un apprezzamento/deprezzamento rispetto ad un movimento nella direzione opposta.

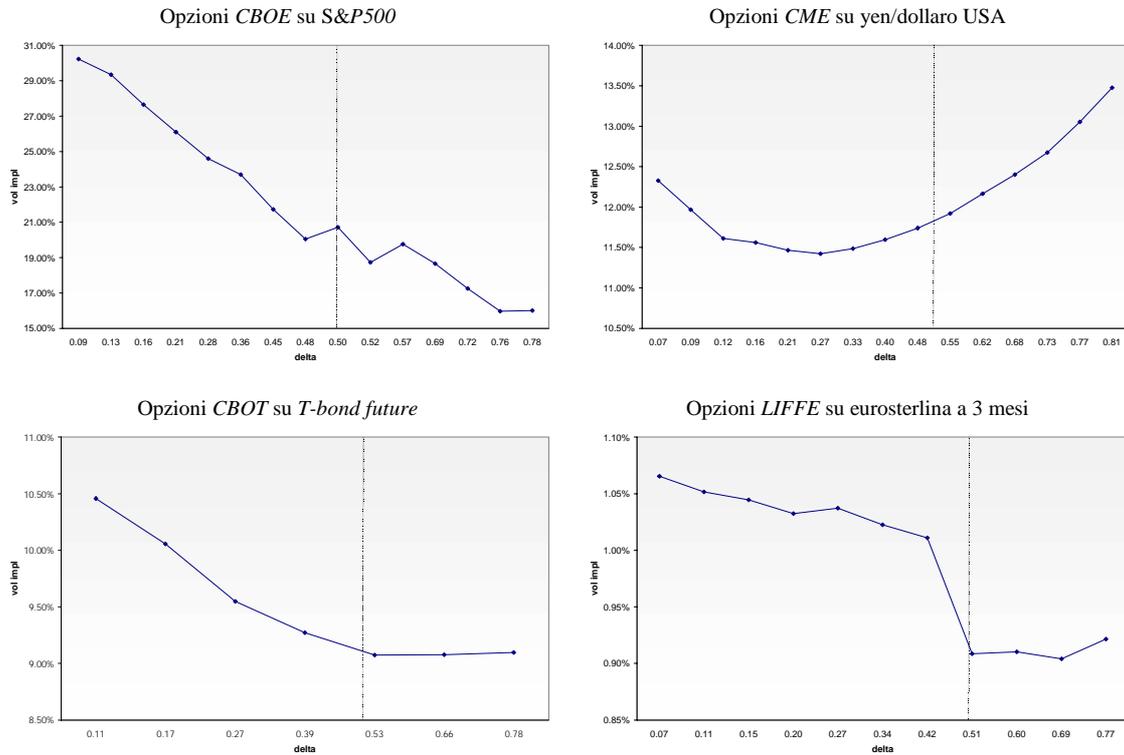


Figura 2: Effetto *smile* sui mercati azionari, dei cambi, dei tassi a lungo, dei tassi a breve

In tutti i casi le volatilità implicite sono state calcolate a partire da prezzi di chiusura, osservati l'11 agosto 1999, di opzioni *put* (*call*) per strike inferiori (superiori) al prezzo *forward*. Questa scelta, volta a garantire l'effettiva liquidità dello strumento utilizzato, è stata associata alla cancellazione delle opzioni che non garantivano volumi minimi di contrattazione. In ascissa si è rappresentata una misura di *moneyness* costituita dal *Delta* dell'opzione, normalizzato per ottenere valori tra zero ed uno: nel caso delle opzioni *put* si è utilizzato il valore assoluto del *Delta*, mentre nel caso delle opzioni *call* si è sottratto da uno il valore di *Delta*. Infine il segmento verticale tratteggiato individua la zona *ATM*, con valori di *Delta* prossimi a 0.50. La funzione della volatilità implicita è stata rappresentata utilizzando: per il mercato azionario opzioni sull'indice *S&P500*, trattate al *CBOE*, con scadenza 17 settembre 1999, per una vita residua di 28 giorni; per il mercato dei cambi opzioni relative al contratto *future JPY*, trattate al *CME*, con scadenza 3 settembre 1999, vita residua di 18 giorni; per il mercato dei tassi a lungo termine opzioni relative al contratto *T-bond future* trattate al *CBOT*, con scadenza dicembre 1999, vita residua di 73 giorni; per il mercato dei tassi a breve termine opzioni relative al contratto *short sterling* trattate al *LIFFE*, con scadenza dicembre 1999, vita residua di 90 giorni.

(Elaborazioni su dati fonte Datastream, CBOE, CME, CBOT, LIFFE).

Passando agli studi sui tassi a breve, in Abken (1995) si nota la presenza di un *volatility smile* sostanzialmente simmetrico per i tassi a breve su eurodollaro²⁵; lo stesso effetto si rileva graficamente in Bahra (1997) per i tassi a breve sulla sterlina²⁶.

Nell'ambito degli studi sul mercato azionario sembra essere sempre presente uno *smile*, la cui asimmetria è variabile nel tempo, ma che comunque non risulta essere in nessun caso crescente

²⁵ L'effetto *smile* rilevato da Abken (1995) si riferisce alle opzioni su *Eurodollar future* (*CME*) osservate il 17.05.1994, ma è tipico nel campione analizzato che va dal 1988 al 1994.

²⁶ La rilevazione si riferisce ad opzioni sul contratto *future short sterling* trattate al *LIFFE*, osservate il 16.04.1996, scadenza 18.12.1996.

rispetto allo *strike*. In Shimko (1993), Rubinstein (1994), Derman e Kani (1994), Barle e Cakici (1995), Dumas, Fleming e Whaley (1998)²⁷, si rileva graficamente un *volatility smile* decrescente monotonicamente con l'incremento dello *strike price* su opzioni sull'indice *S&P500*. In Rubinstein (1994) si mette in evidenza, attraverso una semplice statistica sintetica di rilevazione della difformità tra prezzo di mercato e valore teorico Black e Scholes, il progressivo degrado dell'efficacia del modello durante il 1987, caratterizzato da errori percentuali pressoché raddoppiati rispetto all'anno precedente, ed un continuo deterioramento sino al 1992. In Barle e Cakici (1995) si evidenziano le considerevoli discrepanze tra prezzo di mercato di opzioni sull'indice *S&P500* e valore teorico, quando quest'ultimo viene determinato utilizzando un'unica misura di volatilità implicita *ATM* nel modello di Black e Scholes; nei casi *deep OTM* i risultati sono catastrofici, al punto che alcune opzioni sono valutate da un diciottesimo ad un sesto del loro valore di mercato. Tutte queste evidenze sono confermate dall'elaborazione di uno stimatore non parametrico²⁸ della volatilità implicita in Ait-Sahalia e Lo (1998).

L'importanza di questi comportamenti della volatilità si riferisce in modo particolare agli effetti che questo determina sulla distribuzione del sottostante; un *volatility smile* simmetrico determina infatti una distribuzione del sottostante caratterizzata da leptocurtosi, ovvero da maggiori probabilità di rilevanti cambiamenti positivi o negativi rispetto alla distribuzione lognormale; il grado di convessità dello *smile* determina l'entità dell'area sottesa alle code della distribuzione. La presenza di *skewness* nello *smile*, ovvero lo *smirk*, implica asimmetria nelle aspettative di un forte apprezzamento del sottostante rispetto ad un suo deprezzamento; è evidente dunque che la distribuzione risultante è asimmetrica nelle code.

In realtà è necessario considerare che nel tracciare il profilo dello *smile* si possono verificare delle irregolarità più frequenti in alcune zone specifiche dello stesso. Potrebbe essere promettente in questo senso misurare la deviazione standard delle volatilità implicite per ogni livello di *moneyness*, al fine di determinare dove esiste una maggiore variabilità, ed impostare uno schema di ponderazione che assegni più importanza alle rilevazioni più stabili; in questo modo si otterrebbe un *volatility smile* più significativo. In effetti in Jackwerth e Rubinstein (1996) si evidenzia che la deviazione standard della volatilità implicita, calcolata ogni giorno rispetto al livello di *moneyness*, è più elevata per opzioni con *strike price* lontano dal prezzo del sottostante, che sono dunque caratterizzate da una maggiore variabilità della volatilità.

In conclusione si può affermare che le risultanze emergenti dalle verifiche empiriche della letteratura sono particolarmente convergenti, persistenti e significative per il mercato azionario; il *crash* del 1987 avrebbe modificato il modo in cui gli operatori di mercato valutano le opzioni sull'indice di borsa. In particolare le opzioni put *OTM* hanno raggiunto prezzi di mercato di gran lunga superiori rispetto al rispettivo valore teorico, riflettendo livelli di volatilità implicita decisamente più elevati rispetto alle opzioni *ATM* ed in generale, dopo il 1990²⁹, rispetto alle opzioni con *strike price* più elevato.

²⁷ In Shimko (1993) si utilizzano opzioni con scadenza dicembre osservate il 21.10.1991; in Rubinstein (1994) opzioni osservate il 02.01.1990; in Derman e Kani (1994) opzioni con vita residua 44 giorni, osservate il 05.05.1993; in Barle e Cakici (1995) opzioni con scadenza maggio, osservate il 23.03.1995; in Dumas, Fleming e Whaley (1998) opzioni con vita residua 17, 45, 80 giorni osservate l'01.04.1992. La volatilità implicita viene calcolata tramite il modello di Black e Scholes utilizzando, nel terzo e quarto caso, prezzi di opzioni *call (put)* per prezzi d'esercizio al di sopra (al di sotto) dello *spot*.

²⁸ Della logica d'impostazione dello stimatore non parametrico della volatilità implicita si darà conto estesamente nel paragrafo 3.1.5.

²⁹ L'anno 1990 è individuato da Rubinstein (1994) come la data a partire dalla quale l'effetto *smile* per il mercato azionario presenta una consistente e persistente asimmetria, ovvero volatilità implicita elevata per livelli di *strike price* ridotti e decrescenti in modo monotono con l'incremento del prezzo d'esercizio.

Questo fenomeno riflette la pratica comune di tutelare i portafogli azionari dal pericolo di *crash* (*portfolio insurance* statica), che si traduce tipicamente in una forte domanda di opzioni *put OTM*. Il *writer* di queste opzioni, nella sua attività di copertura dinamica, si ritroverà a vendere l'indice azionario sottostante in un mercato orientato al ribasso e nell'ambito del quale l'offerta è superiore alla domanda; inoltre in alcuni mercati esistono meccanismi, denominati *trading halts*, che impongono delle limitazioni all'operatività dopo larghi movimenti al ribasso ed impediscono dunque un *hedging* tempestivo. Considerando i rischi di una copertura dinamica in questa situazione e la forte domanda per le opzioni *put OTM*, l'emittente richiederà un premio superiore rispetto al *fair value* dei modelli classici di *pricing*. Questa è certamente la spiegazione più attendibile per il fenomeno riconosciuto del *volatility skew* nell'ambito del mercato azionario; altre motivazioni, benché meno significative, sono comunque coerenti con quanto osservato. Ad esempio la sopravvalutazione delle opzioni call *ITM*, che corrispondono agli *strike prices* delle opzioni *put OTM*, è determinata anche in questo caso da una domanda che supera l'offerta; infatti considerando l'elevata probabilità di esercizio, l'*holder* dispone di uno strumento ad alto *leverage* che segue in modo regolare la dinamica del sottostante, mentre il *writer* è soggetto alle problematiche legate all'esercizio, ovvero la necessità di consegnare il sottostante e dunque di aver effettuato un'adeguata attività di copertura. Un altro esempio è costituito dalla sottovalutazione delle opzioni call *OTM*; questo fenomeno corrisponde a specifiche prassi di mercato: in questo caso l'offerta è superiore alla domanda per la possibilità, generalmente sfruttata in passato prima che si affinasero i criteri contabili, da parte di gestori di portafoglio, di registrare gli utili relativi ai premi incassati a fronte dei quali l'esercizio è poco probabile ed avviene in ogni caso a prezzi giudicati vantaggiosi. Ulteriori approfondimenti sugli effetti delle politiche gestionali degli intermediari nel *pricing* delle opzioni si ritroveranno nella terza sezione del *paper* dedicata ai *test* empirici.

2.5.2 La term structure della volatilità implicita

Il modello di Black e Scholes, per valutare opzioni con scadenza diversa sullo stesso sottostante, richiederebbe una misura di volatilità indifferenziata; in realtà le volatilità implicite nei prezzi di mercato delle opzioni variano sensibilmente tra contratti con scadenze diverse. Le evidenze empiriche di questo fenomeno sono frequenti, pur non essendo generalizzabili.

Sviluppando l'argomento per il quale le quotazioni delle opzioni rivelano le aspettative del mercato in merito ai livelli di volatilità futura, abbiamo motivo di affermare l'esistenza di un legame tra le variazioni previste della volatilità ed il fluire del tempo, espresso da una curva con pendenza positiva o negativa. Perciò ci si può servire dei prezzi delle opzioni per dedurre i diversi livelli di volatilità che il mercato associa a diversi intervalli temporali futuri.

In altre parole la volatilità implicita rappresenta, come si è visto nel paragrafo 2.4, una misura di volatilità *spot*, ovvero esprime la variabilità dei ritorni del sottostante attesa dal mercato tra t e la scadenza dell'opzione. Al tempo t , utilizzando opzioni con scadenze diverse, possiamo costruire una curva di volatilità *spot*, che mette in relazione volatilità implicita ed intervallo temporale allo stesso modo della più nota *yield curve* costruita per i tassi d'interesse. Confrontando opportunamente volatilità implicite riferite ad intervalli temporali con ampiezza diversa, è possibile determinare una misura di volatilità *forward*, ovvero una volatilità associata ad un periodo che decorre da una data futura.

In termini formali si considerino due opzioni *ATM* aventi volatilità σ_1, σ_2 e scadenze T_1, T_2 con $T_2 > T_1$; se si ritiene il mercato coerente nella formazione delle aspettative, la misura della volatilità che si riferisce al sottoperiodo t, T_1 deve essere identicamente riflessa nei due valori ottenuti. Ne consegue che σ_2 contiene la misura di volatilità *spot* per l'arco di tempo t, T_2 e la volatilità *forward* relativa all'intervallo T_1, T_2 ; ammettendo, per l'ipotesi di *random walk*, che

implica correlazione seriale nulla tra i ritorni, questa osservazione si traduce nell'espressione matematica:

$$\sigma_{t,T_2}^2 (T_2 - t) = \sigma_{t,T_1}^2 (T_1 - t) + \sigma_{T_1,T_2}^2 (T_2 - T_1)$$

dalla quale si ricava il valore della volatilità *forward*, date le volatilità *spot*, come:

$$\sigma_{T_1,T_2} = \sqrt{\frac{\sigma_{t,T_2}^2 (T_2 - t) - \sigma_{t,T_1}^2 (T_1 - t)}{T_2 - T_1}}$$

Volatilità *spot*

gg	29	57	148	330
Volatilità OTM	14.56%	14.12%	13.73%	13.90%
Volatilità ATM	14.18%	13.85%	13.60%	13.48%
Volatilità ITM	14.58%	14.24%	13.77%	13.54%

Volatilità *forward*

periodo	0-29	29-57	57-148	148-330
Volatilità OTM	14.56%	13.65%	13.48%	14.03%
Volatilità ATM	14.18%	13.50%	13.44%	13.37%
Volatilità ITM	14.58%	13.87%	13.47%	13.35%

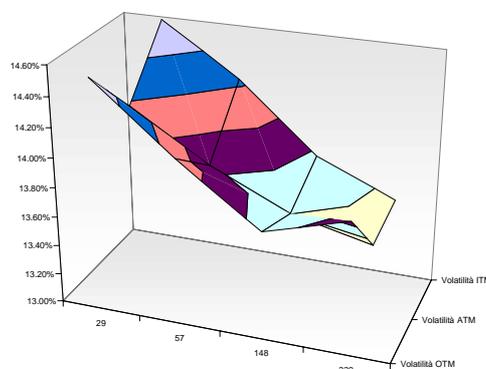
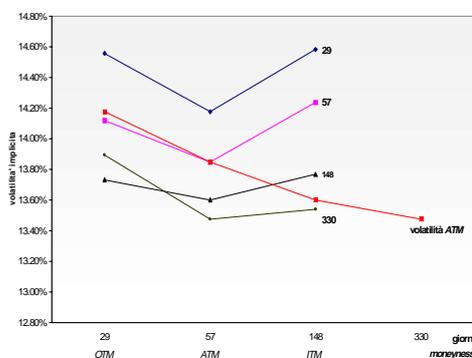


Figura 3: Volatilità implicita per *strike* e per scadenza di opzioni su tassi di cambio

Si rappresenta innanzitutto la matrice delle volatilità implicite *spot* calcolate su opzioni *USD/YEN* (*PHLX*), osservate il 15 gennaio 1998, con scadenze da 29 a 330 giorni e con tre livelli di *moneyness*. In secondo luogo si elabora, date le volatilità *spot*, una matrice di volatilità *forward* applicando la formula introdotta nel paragrafo. In terzo luogo si riportano due rappresentazioni grafiche significative; il grafico di sinistra descrive sia il progressivo appiattimento dello *smile*, con l'incremento della scadenza, che la graduale riduzione della volatilità *ATM*. Il grafico di destra rappresenta lo stesso fenomeno come superficie della volatilità; si nota sia il profilo decrescente, che la riduzione della curvatura della volatilità per scadenze più lontane.

In relazione con il paragrafo precedente può dunque essere costruita una matrice di volatilità implicite divisa per colonne in base al tempo e per righe in base allo *strike price*; l'analisi delle righe fornisce informazioni circa la *term structure* della volatilità futura attesa. In figura 3 si rappresenta un semplice esempio di questa che viene definita comunemente struttura per *strike* e per scadenze della volatilità implicita; si riporta, oltre alla rilevazione di mercato delle

volatilità *spot* per quattro scadenze diverse, anche l'elaborazione delle volatilità *forward* per intervalli temporali futuri.

L'analisi della struttura per scadenze della volatilità si è svolta nella letteratura secondo due filoni principali: il primo si riferisce all'analisi per scadenza della volatilità implicita di opzioni *at the money*, e dunque su una specifica riga della matrice delle volatilità; tale scelta deriva generalmente dalla maggiore liquidità delle opzioni *ATM*, dalla linearità delle variazioni del premio rispetto alla volatilità e da minori *bias* nella formula di *pricing*. Il secondo filone concentra l'attenzione sull'evoluzione del *volatility smile* e della sua asimmetria rispetto alla scadenza delle opzioni.

Degli studi del primo filone fa parte il contributo relativo al mercato azionario di Stein (1989); viene analizzata direttamente la *term structure* della volatilità implicita utilizzando due serie giornaliere di volatilità implicita nelle opzioni sull'indice *S&P100*³⁰. La prima serie si riferisce ad opzioni con scadenza inferiore ad un mese, la seconda ad opzioni con scadenza compresa tra uno e due mesi. A partire dall'assunzione di un processo *mean reverting* per la volatilità, Stein (1989) sostiene che le opzioni con scadenza più lunga tendono a reagire eccessivamente rispetto ai cambiamenti di volatilità delle opzioni con scadenza più ravvicinata. Tali conclusioni dipendono probabilmente dal modello utilizzato per riprodurre i cambiamenti nella volatilità del sottostante.

In Derman e Kani (1994) si mette in luce graficamente come, nell'ambito del mercato azionario, la volatilità, calcolata come media delle volatilità implicite di opzioni *call* e *put ATM*, tende ad aumentare con la scadenza dell'opzione. Tale risultato è coerente con lo studio di Dumas, Fleming e Whaley (1998), nell'ambito del quale la rilevazione dello *smile* per opzioni con scadenza diciassette giorni descrive volatilità implicite inferiori rispetto allo *smile* a quarantacinque giorni, il quale a sua volta si posiziona al di sotto dello *smile* ad ottanta giorni.

Per quanto riguarda il mercato dei cambi in Taylor e Xu (1994) la specificazione della struttura a termine della volatilità implicita si fonda su due fattori, rappresentanti la volatilità attesa di breve e di lungo periodo; il modello è costruito sulla base di un processo *mean reverting* caratterizzato da tre parametri: l'aspettativa di volatilità a breve, $\alpha_t = \sigma_{t,t+1}$, l'aspettativa di volatilità a lungo, $\mu_t = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sigma_{t,t+\tau}$, ed un parametro di controllo ϕ della velocità di ritorno su μ_t , variabile assunta essere costante per ogni t :

$$\sigma_{t,t+\tau}^2 = \mu_t^2 + \phi^{\tau-1} (\alpha_t^2 - \mu_t^2), \tau > 0$$

con $\phi=0$ o $\phi=1$ per il modello di Black e Scholes, e con $0 < \phi < 1$ per aspettative *mean reverting* degli agenti. A questo punto vanno stimati i parametri del modello sulla base dei dati di mercato della volatilità implicita; questo avviene con il metodo della regressione e con il metodo del filtro di *Kalman*. Le conclusioni che si possono trarre dallo studio di Taylor e Xu (1994) si riferiscono certamente alla presenza rilevante di una struttura temporale, dimostrata dalla notevole distanza frequentemente evidenziata tra la rilevazione di breve ed il valore di lungo periodo; in secondo luogo i ripetuti incroci nelle due serie indicano una caratteristica molto importante, ovvero il cambiamento della pendenza della *term structure* ogni due o tre mesi³¹; in terzo luogo la volatilità attesa di lungo periodo varia in modo significativo, sebbene tali variazioni nelle aspettative siano più lente delle corrispondenti aspettative di breve termine o dei cambiamenti della differenza tra valori di breve e di lungo; infine sembra essere presente

³⁰ Il periodo considerato va dal dicembre 1983 al settembre 1987.

³¹ Il cambiamento della pendenza della *term structure* ogni pochi mesi è confermato graficamente in Campa e Chang (1995), dove è evidente un'inclinazione positiva nel giugno 1990 per il cambio dollaro/sterlina ed una pendenza negativa per lo stesso sottostante nel settembre dello stesso anno.

qualche elemento di non stazionarietà nella struttura a termine della volatilità. Nessuna assunzione dunque di volatilità costante da parte del mercato dei cambi.

Nella ricerca di Campa e Chang (1995), sempre riguardante le opzioni valutarie, si parte da un obiettivo diverso rispetto allo studio di Taylor e Xu (1994); lo scopo è quello di osservare la coerenza tra la *term structure* osservata ed il comportamento futuro della volatilità³². In altre parole si vuole verificare l'efficacia dell'ipotesi di aspettative razionali, misurando tramite un'analisi di regressione il cambiamento della volatilità implicita a breve scadenza, spiegato dalla misura data dalla differenza tra la volatilità di lungo periodo e la stessa volatilità di breve³³. La maggior parte delle stime impostate riscontra un valore del coefficiente angolare della retta di regressione di poco inferiore ad uno³⁴, confermando che il tasso di volatilità a breve è in linea con l'ipotesi delle aspettative. La stessa analisi di regressione viene riproposta utilizzando come variabile dipendente la misura di volatilità a lungo termine; anche se i valori ottenuti per β sono inferiori rispetto al caso precedente, esiste ancora un rilevante numero di casi in cui l'ipotesi di β pari ad uno non è rifiutabile. La ricerca di Campa e Chang (1995) si conclude con un'analisi dell'effetto di *overreaction* sulla volatilità a lungo termine; i risultati ottenuti non ravvisano l'esistenza di reazioni eccessive sistematiche, in contrasto con le evidenze empiriche riscontrate da Stein (1989) per il mercato azionario.

Passando ora in rassegna i contributi del secondo filone, ovvero quelli riferiti all'evoluzione nel tempo della curva per *strike*, sembra assodato che lo *smile* nella relazione tra volatilità implicita e *moneyness* sia più pronunciato per brevi scadenze e diventi progressivamente più piatto prolungando la scadenza. Questo effetto si dimostra graficamente in Backus, Foresi, Li e Wu (1997), che riportano *volatility smiles* per opzioni valutarie con scadenza da un giorno ad un anno; è evidente l'effetto di appiattimento, ma altresì l'effetto di incremento del livello medio di volatilità indotto da una struttura a termine crescente della volatilità. E' dunque plausibile³⁵ ipotizzare che il grado di curtosi condizionata della distribuzione, ovvero lo spessore delle code, sia una funzione monotona decrescente del tempo; così si dimostra ancora graficamente in Backus, Foresi, Li e Wu (1997) per dati su opzioni valutarie *over the counter*. Lo stesso effetto di appiattimento dello *smile* viene evidenziato per il mercato azionario in Ait-Sahalia e Lo (1998); in questo caso viene utilizzato uno stimatore non parametrico³⁶.

L'analisi della struttura a termine della volatilità implicita è indicativa del fatto che i più forti scostamenti dalle ipotesi di Black e Scholes dovrebbero verificarsi nel *pricing* di opzioni con scadenza ravvicinata, mentre tenderebbero a ridursi per orizzonti temporali molto lunghi.

³² Questo approccio inizia ad esplorare dall'angolazione della struttura della volatilità a termine i collegamenti tra volatilità implicita e volatilità effettivamente realizzata; l'obiettivo in questo caso è quello di verificare che il prezzo della variabilità evolva razionalmente nel tempo. I contributi della letteratura sul valore previsionale della volatilità implicita nelle opzioni affrontano problematiche diverse, che saranno approfondite nel paragrafo 1.4.4.

³³ Le misure di volatilità implicita vengono individuate nell'ambito della cornice dei modelli a volatilità stocastica ed in modo specifico sulle relazioni sviluppate in Hull e White (1987). Delle caratteristiche di tali modelli si darà conto più diffusamente nel paragrafo 3.2.1.

³⁴ L'ipotesi H_0 di un coefficiente β pari ad uno non viene rifiutata nel 64% dei casi; il coefficiente β non è comunque significativamente maggiore di uno in nessun caso, mentre in tutti i casi è significativamente positivo.

³⁵ In Das e Sundaram (1999) si nota che l'effetto di appiattimento dello *smile* non implica necessariamente che la leptocurtosi del sottostante sia una funzione monotona decrescente del tempo. Se si considera infatti che l'effetto *smile* viene rappresentato rispetto agli stessi *strike prices*, a prescindere dalla scadenza, e la volatilità dei ritorni è superiore su scadenze più lunghe, questo significa che il *range* tra prezzi d'esercizio è inferiore in termini di volatilità su periodi lunghi; sarebbe dunque possibile che l'effetto *smile* divenga più piatto con l'incremento della scadenza nonostante l'aumento della curtosi su scadenze più lunghe. In realtà se l'effetto *smile* si rappresenta rispetto al *Delta* dell'opzione come misura di *moneyness*, la considerazione di Das e Sundaram (1999) non è più valida e dunque è ragionevole assumere un livello di curtosi decrescente rispetto alla scadenza.

³⁶ Della logica d'impostazione dello stimatore non parametrico della volatilità implicita si darà conto più estesamente nel paragrafo 3.1.5.

2.5.3 Evoluzione dell'asimmetria della distribuzione

L'analisi dell'evoluzione nel tempo dell'asimmetria della distribuzione implicita ha ricevuto recentemente dalla letteratura attenzione crescente. Sono state indagate in modo particolare le eventuali relazioni intercorrenti tra l'andamento atteso dell'attività finanziaria sottostante, rappresentata da tassi a breve, tassi di cambio o indici azionari, ed una misura di asimmetria.

Sono applicabili diverse metodologie per misurare l'asimmetria nella distribuzione implicita. La prima tecnica è basata sul presupposto che il valore di un'opzione esprime, come prima indicato, una misura della probabilità di esercizio e del prezzo medio atteso in caso di esercizio. Dal momento che *skewness* significa asimmetria nelle code della distribuzione, è possibile confrontare esplicitamente l'area di probabilità della densità sottesa al di sopra e al di sotto di un particolare livello critico; tale livello deve essere simmetrico rispetto al rendimento corrispondente al prezzo *forward*.

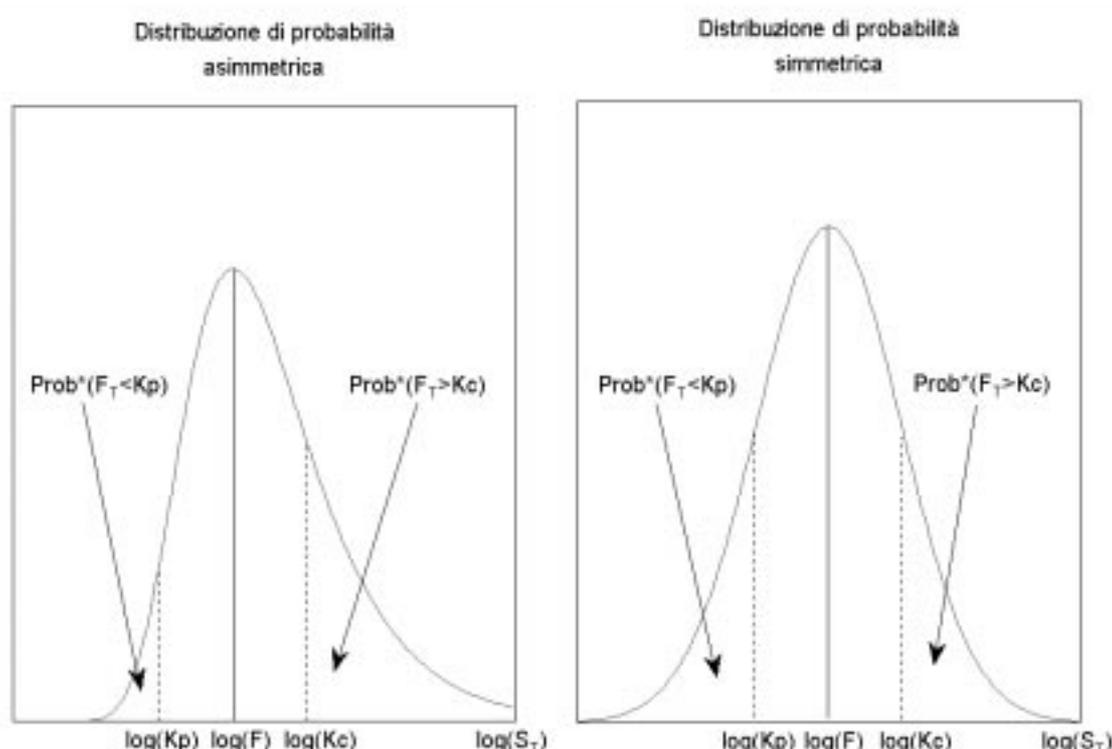


Figura 4: Esempio di distribuzione asimmetrica positiva e di distribuzione simmetrica³⁷.

In termini specifici si procede confrontando il prezzo di un'opzione *call* con il prezzo di un'opzione *put* che siano entrambe *OTM* nella stessa misura. In Bates (1991) si propone ad esempio come indicatore di *skewness* il rapporto tra i prezzi di due opzioni *call* e *put*, a cui si toglie 1 per ottenere valori nulli in caso di simmetria; tali opzioni vengono scelte in modo che siano entrambe *OTM* di una percentuale pari a x rispetto al prezzo *forward* del sottostante.

Ciò equivale a dire, in termini formali:

$$Sk(x\%) = \frac{C(F_t, \tau; K_C)}{P(F_t, \tau; K_P)} - 1 \quad \text{con } x\% > 0 \text{ e con } K_P = \frac{F_t}{1+x} < F_t < F_t(1+x) = K_C$$

³⁷ La distribuzione asimmetrica presa come esempio è una funzione di densità Fischer-Tippet, denominata anche *Extreme Value Distribution* o *Log-Weibull Distribution*; la distribuzione simmetrica è invece una densità normale standardizzata. Si considerano in ascissa logaritmi del prezzo del sottostante.

con $C(F_t, \tau; K_C) =$ premio di un'opzione *call* con *strike* pari a K_C e tempo a scadenza τ

$P(F_t, \tau; K_P) =$ premio di un'opzione *put* con *strike* pari a K_P e tempo a scadenza τ

$F_t =$ prezzo *forward* del sottostante

Esempio 13. Ipotizziamo che l'indice azionario *MIB30* quoti in un certo istante 34.400, con il corrispondente contratto *future* ad un prezzo pari a 34.700 punti. Vogliamo determinare la misura di asimmetria ad una distanza del 5% rispetto al prezzo *forward*; dobbiamo dunque utilizzare il prezzo di mercato di un'opzione *call* con *strike price* pari a 36.500 ($34.700 \times 1,05$) e di un'opzione *put* con prezzo d'esercizio pari a 33.000 ($34.700/1,05$). Il premio per la *call* è pari a 730, mentre il premio per la *put* corrisponde a 1040. Calcoliamo la misura di asimmetria:

$$Sk(5\%) = \frac{C(F = 34700; K_C = 36500)}{P(F = 34700; K_P = 33000)} - 1 = \frac{730}{1040} - 1 = -0,298$$

$$\text{con } K_P = \frac{34700}{(1 + 0,05)} < 34700 < 34700 \times (1 + 0,05) = K_C$$

I prezzi di mercato delle opzioni considerate mettono in evidenza una distribuzione di probabilità *risk neutral* caratterizzata da asimmetria negativa.

Un secondo metodo per la rilevazione dell'asimmetria, applicabile nell'ambito del mercato dei cambi *OTC*, consiste nell'utilizzare la serie di prezzo di uno strumento di mercato attivamente scambiato che fornisce direttamente una misura di asimmetria, ovvero la combinazione *risk reversal*.

- ◆ La combinazione *risk reversal* costituisce la differenza di prezzo, espressa in termini di volatilità implicita, tra due opzioni *call* e *put* egualmente *OTM*, nella maggior parte dei casi con *Delta* pari la prima a 0,25 e la seconda a -0,25, più raramente con *Delta* pari la prima a 0,10 e la seconda a -0,10. In termini formali:

$$RR_t^{0,25\Delta} = \sigma \left(call_t^{0,25\Delta} \right) - \sigma \left(put_t^{-0,25\Delta} \right)$$

Nel mercato delle opzioni su cambi *OTC* questa combinazione viene convenzionalmente quotata in termini di volatilità. Dunque ad esempio una "1.2 yen call bid" significa che l'acquirente dovrà pagare all'intermediario 1,2 punti percentuali di volatilità in più per l'acquisto dell'opzione *call OTM* sullo yen, rispetto a quanto riceverà dall'intermediario per la vendita dell'opzione *put OTM*.

La differenza rispetto al primo approccio consiste nella misura di *moneyness*: le opzioni vengono scelte in questo secondo caso in base al *Delta*, ed in particolare con un *Delta* pari nella maggior parte dei casi a 0.25, e non dunque in base al prezzo d'esercizio³⁸.

Esempio 14. Ipotizziamo che un *broker* sul mercato dei cambi *OTC* quoti opzioni a 3 mesi sul sottostante yen/dollaro USA ad una volatilità implicita *ATM forward* pari al 20% (omettiamo per semplicità le differenze tra prezzi *bid* e *offer*), con un *forward* pari a 110 (yen per un dollaro).

³⁸ Una terza metodologia applicabile consiste nel determinare l'asimmetria utilizzando la misura statistica standard di *skewness*. Considerando X una variabile aleatoria con valore atteso pari a m e deviazione standard pari a σ si può determinare una misura di asimmetria con la seguente:

$$Skewness = \frac{E \left[(X - m)^3 \right]}{\sigma^3}$$

Poiché si eleva ad una potenza dispari la *skewness* sarà prossima a zero se la funzione di densità sarà simmetrica, ovvero se gli eventi sono ben distribuiti a destra e a sinistra della media; si otterranno invece valori negativi (positivi) per distribuzione asimmetriche a sinistra (destra). La misura statistica standard dell'asimmetria è poco utilizzata nella letteratura in materia di opzioni, in quanto per il calcolo è necessaria la conoscenza di una serie di prezzi del sottostante sufficientemente rappresentativa e tale rilevazione si riferisce comunque ad una distribuzione realizzata e non *risk neutral*.

Questo significa che un eventuale acquirente dell'opzione *call* sullo yen dovrà pagare un premio, ottenuto utilizzando la formula di Grabbe (1983), pari a circa 4,39.

Lo stesso intermediario quota la combinazione *risk reversal* sul medesimo sottostante ad un prezzo pari a 1,2 yen *call*; ciò significa che l'eventuale acquirente della combinazione *risk reversal* dovrà pagare 1,2 punti percentuali di volatilità in più nell'acquisto della *call 0,25 Delta OTM* sullo yen, che corrisponde ad uno *strike* pari a 118,25, rispetto alla vendita della *put -0,25 Delta* sullo yen, che corrisponde ad uno *strike* pari a 103,35. Questo determina una differenza da pagare a carico dell'acquirente, calcolata sempre attraverso la formula di Grabbe (1983), pari a circa 0,05. Il prezzo più elevato per l'opzione *call*, a parità di *moneyness*, implica un'asimmetria che si riflette in una maggiore probabilità di apprezzamento dello yen rispetto ad un suo deprezzamento.

Un approccio molto completo, che misura l'asimmetria con strumenti della prima categoria descritta poco sopra, è presente in Abken (1995) per il contratto *future* su eurodollaro. Come misura di *skewness* si utilizza la misura implicita introdotta da Bates (1991) ed esemplificata nell'esempio 13 e non la misura statistica standard basata sul momento terzo centrato del campione dei dati osservati. Questa misura di asimmetria ottenuta dai prezzi di mercato delle opzioni si riferisce alla distribuzione *risk neutral*, mentre una stima determinata dalle serie storiche si sarebbe riferita alla distribuzione "vera" realizzata.

La prima metodologia di analisi è quella di calcolare una serie di rilevazioni della volatilità implicita; utilizzando opzioni su eurodepositi con scadenza compresa tra 90 e 270 giorni, Abken (1995) rileva graficamente, tra il 1988 e il 1994, il comportamento della volatilità di *call* e *put OTM* del 10%, ovvero con prezzo d'esercizio superiore o inferiore rispetto al prezzo *forward* del 10%. Dal momento che non esistono *strike prices* situati esattamente *OTM* per la percentuale prescelta, si utilizza la tecnica d'interpolazione della *cubic spline*³⁹, per ottenere i prezzi di mercato per il livello corretto di *moneyness*; la serie così rappresentata indica una sostanziale uniformità tra opzioni *call* e *put* sino all'inizio del 1993⁴⁰, momento dal quale la volatilità implicita delle opzioni *put* cresce decisamente al di sopra della volatilità delle *call*. Nel periodo 1993-94 la volatilità *OTM put* è risultata in media superiore del 15,1%, indicando forti attese per un deciso movimento al rialzo dei tassi a breve rispetto ad un movimento al ribasso.

A questo punto si utilizza una seconda metodologia per rappresentare l'effettiva serie dell'asimmetria secondo la formula $Sk(x\%)$ precedentemente indicata; il vantaggio di questa rappresentazione, rispetto al calcolo delle volatilità implicite di *call* e *put OTM* del 10%, consiste nella totale indipendenza della misura di asimmetria da qualsiasi modello di *pricing* ipotizzato. In effetti i risultati confermano solo parzialmente le considerazioni espresse con l'analisi precedente; l'asimmetria media 1988-92 è pari al -8,9%, rispetto ad un comportamento praticamente uniforme delle volatilità implicite di *call* e *put OTM*. La divergenza potrebbe originare dall'utilizzo nel primo caso sia del modello di Black e Scholes, che impiega fattori di sconto costanti anche nel valutare opzioni su tassi d'interesse a breve, sia dall'utilizzo delle approssimazioni per l'esercizio anticipato. Dal 1993 al settembre 1994 l'asimmetria cresce decisamente e raggiunge un valore medio di -34,4%, con una deviazione standard pressoché

³⁹ Le *cubic splines*, seguendo l'approccio già sperimentato in precedenza da Bates (1991), vengono elaborate ogni giorno approssimando i prezzi di mercato di *call* e *put*. La scelta della *moneyness* del 10% dipende dalla necessità di avere una sufficiente serie di osservazioni per descrivere un comportamento giornaliero; la scelta di livelli più distanti dal prezzo *forward* avrebbe determinato una crescente indisponibilità di opzioni per eseguire i calcoli, mentre usare opzioni *ITM* può risultare fuorviante a causa di problemi di liquidità di questo segmento di mercato.

⁴⁰ Il cambiamento coincide con il mese di settembre 1992, periodo in cui la sterlina inglese uscì dal Sistema Monetario Europeo e la *Federal Reserve* ridusse il tasso dei *Fed Funds* di 25 *basis points*.

invariata; le risultanze delle due metodologie sono concordi nell'individuare una decisa percezione di esigenza di protezione contro rialzi dei tassi⁴¹.

Le relazioni tra *skewness* e sottostante evidenziano in prima approssimazione un aumento nell'asimmetria per bassi livelli dei tassi a breve; dovrebbe essere intuitivo affermare che le maggiori probabilità di un movimento al rialzo dei tassi dovrebbe coincidere con livelli storicamente bassi, ovvero che il tasso a breve dovrebbe ritornare su un livello medio di lungo termine più elevato (*mean reversion*). In realtà i cambiamenti di regime nella *skewness* non possono essere spiegati da un semplice processo di *mean reversion*, in quanto questo fenomeno innanzitutto può verificarsi anche nell'ambito di una distribuzione stazionaria ed in secondo luogo dovrebbe verificarsi anche per tassi d'interesse elevati; un cambio di asimmetria determina un cambiamento nella distribuzione del sottostante. Sembra non esserci dunque una spiegazione soddisfacente per il comportamento storico della *skewness* implicita.

Nel mercato dei cambi la misura di asimmetria ha evidenziato una ridotta stabilità nel tempo: in Bates (1995) si citano una serie di ricerche empiriche sul mercato dei cambi che hanno riscontrato un'asimmetria positiva superiore rispetto al caso lognormale nel periodo 1983-1987, caratterizzato dall'introduzione delle opzioni valutarie su mercati regolamentati e da un dollaro relativamente forte; l'asimmetria riscontrata è coerente con un processo *mean reverting*, in quanto se viene espresso un livello di equilibrio di medio-lungo periodo per il tasso di cambio, il fatto che si registrino quotazioni elevate suggerisce una maggiore probabilità per un deprezzamento rispetto all'evento opposto. Nel periodo 1987-1992, al contrario, sembra aver predominato una distribuzione leptocurtica, ma sostanzialmente simmetrica; in realtà i *pattern* giornalieri di volatilità implicita indicano frequenti oscillazioni dell'asimmetria, spesso correlati con il livello dell'attività di *trading* in opzioni *call* rispetto ad opzioni *put*, come si riscontra anche in Bates (1996a) per il *cross* dollaro/marco e in McCauley e Melick (1996a) per sterlina/marco e dollaro/yen.

Un'analisi più specifica dell'asimmetria che caratterizza in tempi più recenti il mercato dei cambi è presente appunto in McCauley e Melick (1996a); la misura di *skewness* si ottiene in questo caso utilizzando la seconda delle metodologie descritte all'inizio del paragrafo, ovvero direttamente da un valore estratto dalle quotazioni di mercato, la combinazione *risk reversal*. Se il modello di Black e Scholes fosse valido, tale combinazione dovrebbe avere valore nullo sul mercato; in realtà la strategia *risk reversal* assume valori diversi nel tempo con segni sia positivi che negativi. L'asimmetria è dunque variabile nel tempo e risulta interessante analizzarne le relazioni con l'andamento delle quotazioni del sottostante.

In McCauley e Melick (1996a) l'analisi descrittiva della relazione tra *risk reversal* e *spot USD/YEN* sembra evidenziare la presenza di aspettative di tipo estrapolativo: un movimento di rafforzamento di una valuta rispetto all'altra è seguito da un corrispondente incremento in quella direzione del *risk reversal*, indicando che il mercato percepisce un ulteriore rafforzamento come più probabile rispetto ad un indebolimento. Si ricava tra l'altro una semplice regola empirica derivata dall'analisi di tre anni di quotazioni del dollaro contro marco e contro yen: il valore del *risk reversal* moltiplicato per un coefficiente fisso (in questo caso pari a 1,2) fornisce l'entità della maggior probabilità di un rialzo superiore del 5% al prezzo *forward*, rispetto ad un ribasso della stessa misura.

⁴¹ Il fatto che nella serie dell'asimmetria si rilevi la presenza di *noise* può dipendere sia da imprecisioni nell'interpolazione dei prezzi usati per determinare la misura di asimmetria, sia da imperfezioni di mercato (asincronia nelle rilevazioni, inaccuratezza del *settlement price*, temporanee pressioni della domanda/offerta). Per isolare l'entità degli effetti di questo secondo tipo, si ripete l'analisi utilizzando però prezzi di opzioni *call* e *put ATM*, anziché *10% OTM*; la media giornaliera dei valori ottenuti non è significativamente diversa da zero.

La combinazione *risk reversal* come indicatore di *skewness* nel mercato dei cambi viene utilizzata in modo diverso in Pagès (1996); in questo caso essa costituisce una *proxy* della correlazione tra tassi di cambio a pronti e relativa volatilità. Tale conclusione deriva dall'analisi di un modello nell'ambito del quale la volatilità segue un processo stocastico e l'asimmetria della distribuzione di probabilità del sottostante dipende da una misura di correlazione non costante nel tempo tra il livello dello *spot* e la volatilità dello stesso⁴². In Pagès (1996) si dimostra che un modello di questo tipo riesce ad interpretare in modo piuttosto preciso la presenza di un *volatility smile*; in termini specifici un incremento della correlazione fa incrementare il prezzo delle opzioni *call OTM*, a causa dell'asimmetria positiva della distribuzione che rende più costose le opzioni che beneficiano maggiormente di questa situazione. Al contrario una riduzione della correlazione determina una funzione di densità asimmetrica negativa, che implica un incremento del prezzo delle opzioni *put OTM* utilizzate per assicurare il portafoglio contro ribassi repentini.

Campa, Chang e Reider (1998) documentano in modo più completo rispetto a McCauley e Melick (1996a) e a Pagès (1996) la rilevante correlazione positiva tra l'asimmetria nelle distribuzioni di probabilità implicite nei prezzi delle opzioni ed il livello del tasso di cambio a pronti. Il loro approccio, pur facendo parte della prima fattispecie, si differenzia dalla proposta di Abken (1995) analizzata in precedenza, in quanto la scelta del livello di *moneyness* delle opzioni da considerare si ottiene sommando al prezzo *forward* un incremento commisurato ad una certa percentuale della volatilità; questa decisione è motivata dalla necessità di evitare che la misura di asimmetria sia influenzata da un aumento della curtosi.

I risultati ottenuti da Campa, Chang e Reider (1998) mettono ancora una volta in evidenza come più una valuta si rafforza, più le aspettative si dimostrano asimmetricamente positive, rendendo più probabili rilevanti apprezzamenti rispetto a deprezzamenti; questo conferma la natura "estrapolativa" delle aspettative nel mercato dei cambi in tale periodo. Attraverso un'analisi di regressione nelle differenze prime⁴³ si determina in Campa, Chang e Reider (1998) il modo attraverso il quale l'asimmetria nelle aspettative può essere collegata con il tasso di cambio a pronti. Le evidenze dimostrano in modo netto la presenza di una forte correlazione positiva tra asimmetria e tasso di cambio; più una valuta si dimostra forte, più le aspettative si rivolgono verso ulteriori consistenti apprezzamenti⁴⁴. Tali risultati sono confermati in tutti i casi (per cinque valute e cinque misure di asimmetria) con orizzonte temporale un mese, e nella maggior parte dei casi su di un orizzonte temporale di tre mesi. In termini più specifici le misure di asimmetria costruite sulla base del *risk reversal* evidenziano sempre una correlazione positiva e significativa dal punto di vista statistico; nessuno dei coefficienti determinati è significativamente negativo.

Mentre per il mercato dei cambi l'elevata correlazione positiva tra evoluzione dell'asimmetria e dinamica del sottostante determina una forma della distribuzione tipicamente collegata al periodo di forza relativa di una valuta, nell'ambito del mercato azionario si riscontra un comportamento uniforme solo dopo il crollo del 1987; in Bates (1995) ad esempio si citano una serie di ricerche empiriche sul mercato azionario che in diversi periodi temporali precedenti il

⁴² I modelli con volatilità stocastica saranno affrontati nel paragrafo 3.2.1.

⁴³ I dati utilizzati si riferiscono ad opzioni *OTC* nel periodo aprile 1996 - marzo 1997; la robustezza dei risultati della regressione viene accertata impiegando altri cinque anni di dati giornalieri per la sola misura di *risk reversal* (da aprile 1992 ad aprile 1997).

⁴⁴ Questo fenomeno è coerente con i concetti sviluppati nell'ambito dell'analisi tecnica di livello di *supporto* e livello di *resistenza*; non appena il tasso di cambio supera queste soglie critiche, si rilevano ulteriori movimenti nella stessa direzione, in quanto il mercato, per il cosiddetto principio di intercambiabilità, percepisce un nuovo *trading range* nell'ambito del quale ciò che prima rappresentava la resistenza (il supporto) ora rappresenta il supporto (la resistenza).

crash hanno riscontrato alternativamente distribuzioni caratterizzate da asimmetria positiva o negativa.

In Bates (1991) si utilizzano i prezzi delle opzioni⁴⁵ per capire se il mercato azionario americano poco prima del *crash* del 1987 era ritenuto sopravvalutato e dunque soggetto ad un repentino e considerevole crollo verso livelli compatibili con i fondamentali; i prezzi delle opzioni, per rivelare questa aspettativa, avrebbero dovuto indicare una forte sopravvalutazione delle opzioni *put OTM* rispetto alle opzioni *call OTM*, e dunque considerare un forte movimento negativo, tale da portare *in the money* le opzioni *put*, più probabile del corrispondente movimento positivo. La misura di *skewness* si ottiene dunque, come indicato in Abken (1995), dalla differenza di prezzo tra le opzioni ugualmente *OTM*⁴⁶; rispetto ad una sostanziale uniformità (valori inferiori al 4%) per buona parte del 1986, si osservano valori molto elevati nei periodi ottobre '86-febbraio '87 e soprattutto all'inizio dell'agosto 1987 (valori superiori al 25%). Questa forte percezione del rischio di crollo scompare peraltro con i successivi ribassi di mercato del mese di agosto e non riaffiora più sino al periodo successivo al *crash* del 17 ottobre.

In Jackwerth e Rubinstein (1996) la distribuzione di probabilità riscontrata per l'indice *S&P500* dall'inizio del 1986 al crollo è tendenzialmente platicurtica, con una ridotta asimmetria positiva; nel periodo successivo peraltro si verifica un deciso cambiamento nelle caratteristiche della funzione di densità: si riscontra un'asimmetria negativa pronunciata e persistente ed un eccesso di curtosi, grandezze che si mantengono stabilmente su valori elevati per tutta la durata del periodo oggetto di studio, ovvero sino a fine 1993.

E' proprio nel mercato azionario che ad ogni declino delle quotazioni è associato un sostanziale decremento della ricchezza (la posizione aggregata degli operatori in opzioni è strutturalmente lunga) e dunque è più plausibile una sistematica asimmetria negativa, che riflette uno strutturale eccesso di domanda di assicurazione dal rischio di ribasso e quindi il suo maggior costo; in McCauley e Melick (1996b) ad esempio in data primo luglio 1996 si riscontra dalla densità implicita nei prezzi delle opzioni, che un ribasso dell'indice superiore al 10% è del 4% più probabile rispetto ad un rialzo della stessa entità. Un successivo deciso calo dei prezzi il 15 luglio prima ed il 23 luglio poi ebbe l'effetto di ridurre tale differenziale; questo fenomeno fornisce indicazioni di aspettative non estrapolative degli agenti, al contrario di quanto sembra avvenire sul mercato dei cambi, ovvero di percezione della riduzione del bisogno di assicurazione del portafoglio a seguito di un forte calo delle quotazioni.

Per il mercato azionario la presenza di una misura di asimmetria che caratterizza l'entità della correlazione tra andamento del sottostante e variazioni della volatilità, è perfettamente coerente con quell'effetto che ad oggi è conosciuto come "Fischer Black Effect"; in termini specifici in Black (1976b) si afferma infatti che l'incremento dei corsi azionari sembra determinare una diminuzione della volatilità ed il contrario accade in presenza di una diminuzione delle quotazioni. In Dumas, Fleming e Whaley (1998) si citano una serie di studi empirici che hanno riscontrato questo fenomeno; sebbene la maggior parte di questi contributi utilizzi una misura di volatilità determinata a partire dai prezzi del sottostante, è possibile arrivare alle stesse conclusioni utilizzando le volatilità implicite desunte dai prezzi delle opzioni. Così accade tra gli altri nella ricerca di Aït-Sahalia, Wang e Yared (1998), dove si rileva un effettivo incremento della volatilità quando l'indice *S&P500* diminuisce di valore; gli stessi Dumas,

⁴⁵ Si utilizzano i prezzi delle opzioni sul contratto *future* sull'indice *S&P500* quotato al *CME* dal 1985 al 1987; per ogni giorno vengono considerati contratti per una sola scadenza, con durata minima ventotto giorni e massima centodiciotto giorni. Per garantire una sufficiente ampiezza dell'intervallo di prezzo considerato, si registrano prezzi per quattro classi di *strike price* per opzioni *call* e quattro per opzioni *put*.

⁴⁶ Per determinare in modo preciso una misura di *skewness*, dal momento che per un'opzione *call OTM* di $x\%$ non ci sarà un'opzione *put OTM* esattamente di $x\%$, viene interpolata una *cubic spline* al fine di ottenere il valore dell'opzione appropriata.

Fleming e Whaley (1998) calcolano un coefficiente di correlazione negativo tra indice *S&P500* e volatilità implicita delle opzioni corrispondenti, nel periodo 1988-1993, per un valore pari a -0,570.

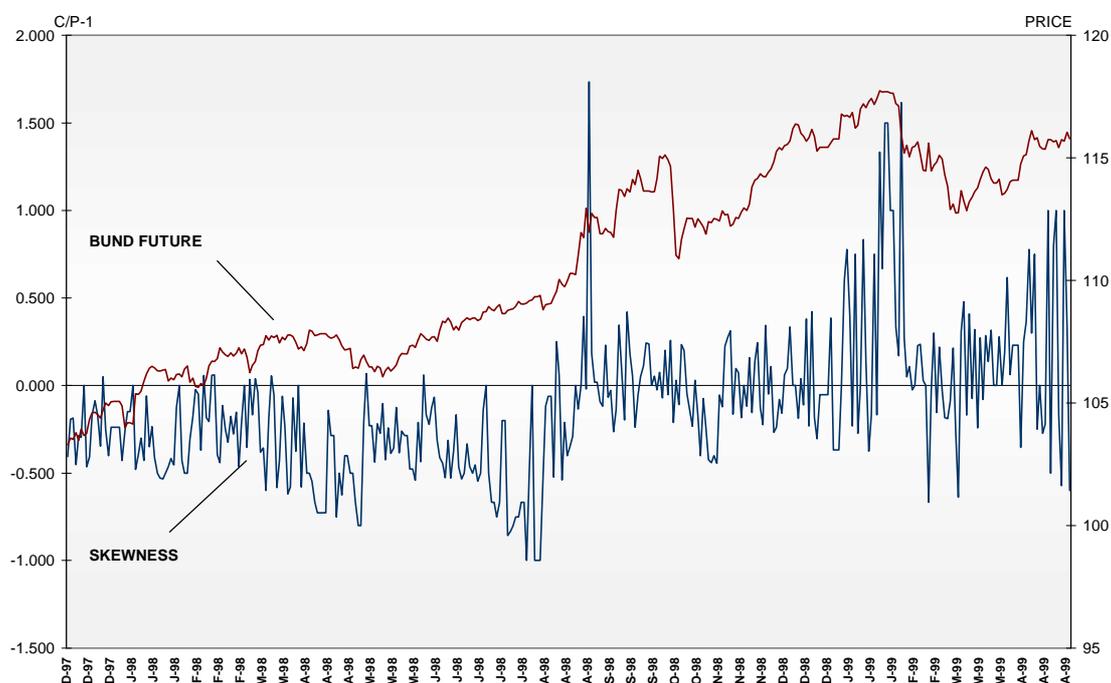


Figura 4: Evoluzione dell'asimmetria e delle quotazioni nel tempo per il contratto *Bund future*.

Nel grafico si rappresentano in primo luogo le quotazioni del contratto *Bund future* trattato al *LIFFE* dall'inizio di dicembre 1997 alla fine di aprile 1999. In secondo luogo si tratteggia una misura di asimmetria elaborata secondo la misura proposta da Abken (1995) su opzioni con un grado di moneyness calcolato come *strike* rispetto a prezzo *future* e pari in media all' 1,80%.

Anche per i tassi d'interesse a lungo termine, come per il mercato azionario, può essere considerato non trascurabile l'impatto della domanda di assicurazione a fronte di portafogli strutturalmente lunghi, per cui la situazione normale dovrebbe evidenziare valori negativi di asimmetria. L'esempio rappresentato in figura 4 conferma per i tassi a lungo tedeschi la sostanziale validità di questa affermazione fino alla metà di agosto 1998; successivamente il comportamento dell'asimmetria manifesta una più marcata irregolarità, con una prevalenza di valori positivi che possono indicare la mancanza, dal settembre 1998, di strategie assicurative contro il rialzo dei tassi.

Riassumendo gli elementi e le regolarità emerse nella rassegna delle evidenze empiriche sui diversi mercati, si può affermare che l'analisi temporale della misura di asimmetria desumibile dai prezzi delle opzioni incorpora un discreto valore informativo. In particolare le relazioni tra asimmetria e quotazioni del sottostante sono in grado di descrivere la tipologia delle aspettative degli attori di mercato. Sul mercato dei cambi, come si è più volte accennato, sembrano prevalenti aspettative di tipo estrapolativo; su di un mercato più strettamente collegato al livello della ricchezza, come può essere il mercato azionario, le aspettative dopo forti *shock* negativi danno invece l'impressione di stabilizzarsi e questo può essere determinato dalla riduzione delle esigenze di assicurazione di portafoglio dopo forti ribassi. Per ulteriori approfondimenti di queste argomentazioni si rinvia alla terza sezione.

2.6 Il valore previsionale della volatilità implicita

La volatilità implicita calcolata dal prezzo di mercato di un'opzione tramite la formula di *pricing* di Black e Scholes (1973), opportunamente scalata per il tempo, costituisce, se le ipotesi del modello sono valide, l'aspettativa *risk neutral* per la deviazione standard futura dei rendimenti dell'attività finanziaria sottostante durante la vita residua dell'opzione. Tale affermazione è valida se il modello di *pricing* è correttamente specificato ed inoltre se il mercato delle opzioni è efficiente.

Il modello classico assume un livello di volatilità noto e costante; l'interesse nel misurare la volatilità attesa attraverso la volatilità implicita suggerisce peraltro, come già appariva evidente nei precedenti paragrafi relativi alla struttura per *strike* e per scadenze, che il livello di volatilità non è determinabile con certezza ed è variabile nel tempo. Per questo può sembrare poco coerente utilizzare come previsione per la volatilità una misura che deriva dal modello di Black e Scholes (1973). Estendendo le ipotesi di Black e Scholes, si può assumere una volatilità che varia secondo una funzione deterministica del prezzo del sottostante e/o del tempo. Si può in tal caso dimostrare, seguendo l'impostazione di Merton (1973), che le ipotesi del modello classico sono rispettate e il valore dell'opzione si determina con la formulazione di Black e Scholes (1973), semplicemente sostituendo al parametro di volatilità costante una misura di volatilità media per la vita residua dell'opzione pari a:

$$\sigma_{t,T} = \sqrt{\frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_x^2 dx}$$

In questo modo si mantiene l'interpretazione che considera la volatilità implicita una previsione non distorta della volatilità futura, senza peraltro vincolarne il livello ad un valore costante. Il problema si ripresenta però se la volatilità non varia in modo deterministico; è necessario stabilire se è ancora possibile considerare la varianza implicita una previsione non distorta della varianza futura. Come si vedrà meglio nel paragrafo 3.2.1, che approfondisce le caratteristiche dei modelli con volatilità stocastica, tale affermazione rimane valida solo se il premio per il rischio di volatilità è nullo, ovvero se gli investitori non vengono compensati per il rischio di volatilità che assumono. Anche nel caso contrario è comunque ragionevole assumere che la volatilità implicita esprima indicazioni utili per la previsione⁴⁷.

Questa premessa ci consente di inquadrare correttamente i contributi più significativi⁴⁸ della letteratura più recente riguardante il valore previsionale della volatilità implicita. Questo tipo di indagini possono essere lette come il primo passo verso l'interpretazione a fini previsionali dell'intera distribuzione di probabilità estraibile dai prezzi delle opzioni.

Introduciamo alcuni principi generali comuni a tutti gli approcci empirici. È importante in primo luogo stabilire quale misura di volatilità implicita delle opzioni utilizzare come *input* della previsione. In Neuhaus (1995), accanto alla volatilità implicita delle opzioni *call ATM*, si

⁴⁷ Potrebbe sembrare conveniente calcolare una misura di volatilità implicita secondo un modello più articolato rispetto a Black e Scholes (1973), che tenga conto del rischio di volatilità. In realtà, come si nota anche in Fleming (1998), questa alternativa pone ulteriori complicazioni: innanzitutto sorgono problemi relativi alla corretta specificazione delle ipotesi relative al processo della volatilità ed in secondo luogo è necessario stimare parametri addizionali.

⁴⁸ L'analisi del potere previsionale della volatilità implicita risale agli anni settanta; si veda a titolo esemplificativo Latané e Rendleman (1976) oppure Chiras e Manaster (1978), nell'ambito dei quali si assume peraltro la validità del modello di Black e Scholes, senza approfondire le cause degli scostamenti tra volatilità implicita e realizzata, interpretata come conseguenza di errori campionari, non stazionarietà della distribuzione o inefficienza informativa del mercato, senza rilievo esplicito per le anomalie che sono al centro della nostra attenzione. Nell'ambito del presente *paper* si prenderanno dunque in considerazione solo contributi relativamente recenti.

utilizza: una serie calcolata su opzioni *put*; una terza serie corrispondente alla media delle due precedenti; una quarta serie costruita utilizzando opzioni *call* con diversi prezzi d'esercizio ma con discreto *turnover*; una quinta serie nell'ambito della quale viene effettuata una media della volatilità delle opzioni della quarta serie ponderata per i rispettivi coefficienti *kappa*⁴⁹; infine una sesta serie calcolata come media mobile ponderata delle rilevazioni di volatilità implicita *ATM* degli ultimi cinque giorni. La scelta dovrebbe rispettare, a prescindere dai risultati ottenuti in Neuhaus (1995), un criterio di liquidità dello strumento, che fornisce un'indicazione di significatività del prezzo registrato sul mercato; si tratta dunque di un criterio di scelta diverso per ogni mercato e che, in linea generale, corrisponde ai prezzi di opzioni *put (call)* per *strike prices* al di sotto (al di sopra) del prezzo *forward*.

In secondo luogo va definito l'orizzonte temporale nell'ambito del quale va misurata la volatilità futura per verificare il valore previsionale della volatilità implicita. In genere si calcola la volatilità realizzata fino alla scadenza dell'opzione; in Neuhaus (1995) si propone peraltro di calcolare la volatilità futura anche nei soli cinque giorni successivi per opzioni che scadono dopo sessanta, quaranta e venti giorni.

In terzo luogo deve essere definito lo strumento adatto per rilevare le potenziali attitudini previsionali della volatilità implicita; si passa in questo caso da strumenti tipicamente poco accurati come le previsioni di tipo qualitativo, a semplici strumenti quantitativi di misurazione dell'errore, all'analisi di regressione, che ha lo scopo di individuare l'entità della variabilità della grandezza obiettivo che è spiegata dalle variabili indipendenti utilizzate. L'equazione tipicamente utilizzata è la seguente:

$$\sigma = \alpha + \beta \cdot F(\Phi_t) + \varepsilon_t ,$$

dove $F(\Phi_t)$ è la previsione della volatilità futura σ sulla base del *set* informativo Φ al tempo t ed ε_t rappresenta i residui. Se la previsione consiste effettivamente nel vero valore atteso di σ sulla base di un'interpretazione razionale di Φ_t , la regressione dei valori di σ effettivamente registrati sul loro valore atteso (la volatilità implicita) dovrebbe produrre stime dell'intercetta α non significativamente diverse da zero, stime del coefficiente angolare β non significativamente diverse da uno ed infine dovrebbe essere riscontrata la mancanza di errori sistematici nei residui, fatto che sarebbe incompatibile con l'ipotesi di aspettative razionali. Inoltre, se la regressione avviene su due variabili previsionali nell'ambito delle quali la seconda si determina sulla base di un sottoinsieme delle informazioni da cui è derivata la prima:

$$\sigma = \alpha + \beta_1 \cdot F_1(\Phi_{1,t}) + \beta_2 \cdot F_2(\Phi_{2,t}) + \varepsilon_t \quad \text{con } (\Phi_{1,t} \supset \Phi_{2,t}) ,$$

il primo coefficiente angolare β_1 dovrebbe essere ancora non significativamente diverso da uno, mentre la previsione meno informativa dovrebbe avere coefficiente β_2 pari a zero. Si deve peraltro considerare che nella letteratura, per entrambe le equazioni di regressione proposte, si è frequentemente deciso di verificare anche l'ipotesi che i coefficienti β_1 e β_2 siano non significativamente diversi da zero; il rifiuto di questa ipotesi implica che la volatilità implicita è in grado di spiegare almeno una parte dell'evoluzione della variabile dipendente.

Iniziamo a questo punto a prendere in rassegna le evidenze empiriche che la letteratura ha proposto per diverse attività finanziarie sottostanti. L'analisi del contenuto informativo della volatilità implicita nel mercato azionario è presente in termini piuttosto approfonditi in uno

⁴⁹ Il coefficiente *kappa* o *vega* di un'opzione è la derivata prima del valore dell'opzione rispetto alla volatilità. Il significato di questo tipo di ponderazione consiste nell'assegnare una maggiore importanza alle opzioni che rispondono in modo più accentuato a cambiamenti nella volatilità, dal momento che gli operatori di mercato dovrebbero valorizzarle in modo più accurato. Una ponderazione di questo genere era già presente ad esempio in Latané e Rendleman (1976).

studio di Canina e Figlewski (1993)⁵⁰. In questa ricerca si utilizzano diverse misure di volatilità implicita, per tener conto delle imperfezioni del modello di Black e Scholes (1973) che impediscono di considerare una singola rilevazione come la "vera" aspettativa di mercato; per evitare le distorsioni indotte da medie di volatilità di diverse opzioni, si distinguono trentadue gruppi (quattro gruppi di scadenze divisi per otto gruppi di *moneyness*), per ciascuno dei quali si effettua l'analisi di regressione. Nella maggior parte dei casi l'ipotesi che il coefficiente angolare β della retta di regressione sia pari a zero non è rifiutata; inoltre in tutti i sottogruppi il coefficiente di determinazione non raggiunge mai valori superiori a 0.07. Conclusioni diametralmente opposte si raggiungono utilizzando come variabile indipendente la volatilità storica calcolata sui sessanta giorni precedenti: in questo caso, per la maggior parte delle serie utilizzate, l'ipotesi di coefficiente angolare pari a zero viene significativamente rifiutata. L'analisi di regressione bivariata, con volatilità implicita e storica come variabili indipendenti, non fa che confermare le precedenti evidenze empiriche, riscontrando dunque il basso contenuto informativo della volatilità implicita nel prevedere la volatilità dell'indice azionario sottostante e l'incapacità di riflettere prontamente le informazioni presenti nella volatilità storica.

In contrasto con le evidenze relative al mercato azionario di Canina e Figlewski (1993) si pongono i risultati di Day e Lewis (1995)⁵¹ e soprattutto di Fleming (1998); in quest'ultimo caso, sulla base di un apparato econometrico molto robusto rispetto ai tipici problemi di dati *overlapping*, si dimostra il valore informativo, benché non efficiente, della volatilità implicita nella previsione della volatilità futura, sia in termini di vita residua dell'opzione, sia su orizzonti temporali successivi settimanali e mensili. La volatilità implicita si dimostra tra l'altro uno strumento previsionale migliore rispetto alla volatilità storica degli ultimi ventotto giorni, nonostante i valori negativi riscontrati per l'intercetta della regressione α evidenzino una sovrastima della volatilità futura.

Conciliare queste evidenze relative al mercato azionario risulta piuttosto difficile, date le differenze nel periodo campione, nella metodologia e nella costruzione dei dati di *input*; la conclusione più appropriata sembra essere l'inefficienza del mercato delle opzioni S&P100 nei primi anni di funzionamento (l'intervallo temporale considerato da Canina e Figlewski (1993) inizia nel marzo 1983, pochi mesi dopo l'apertura ufficiale del mercato).

Le conclusioni sul valore previsionale della volatilità implicita, piuttosto discordanti per il mercato azionario, sono invece univoche quando il sottostante è costituito da tassi d'interesse; in Neuhaus (1995) si applica⁵² nell'ambito del mercato delle opzioni sul *Bund Future* trattate al *LIFFE*, oltre ad un approccio qualitativo e quantitativo semplice, la regressione della volatilità futura sulla volatilità implicita. In questo caso il coefficiente angolare β , che non presenta mai valori superiori a 0.8, si dimostra significativamente diverso da zero, ma non significativamente diverso da uno; in secondo luogo la costante α non differisce in modo significativo da zero; infine la statistica *Durbin-Watson* non evidenzia la presenza di correlazione seriale nei residui per nessuno dei tre orizzonti temporali presi in considerazione.

Lo stesso tipo di analisi, effettuato utilizzando come variabile indipendente la volatilità storica, non è in grado di soddisfare i criteri descritti sopra per la volatilità implicita. I valori di variabilità spiegata nella regressione rappresentati dal coefficiente di determinazione R^2

⁵⁰ Il campione di dati utilizzati nella ricerca si riferisce al prezzo di chiusura di opzioni *call* sull'indice *S&P100* dal 15.03.1983 al 28.03.1987.

⁵¹ Tali autori prendono in considerazione misure di volatilità implicita nel mercato delle opzioni sull'indice *S&P100* dal novembre 1983 a dicembre 1989, inclusi i *crash* del 1987 e 1989. La previsione della volatilità nella settimana successiva tramite la volatilità implicita risulta altamente affidabile.

⁵² Questo studio prende spunto da un'analoga ricerca sul *Japanese Bond Future* presente in Bank of Japan (1995).

confermano i precedenti test di significatività; va peraltro rilevato che l'orizzonte temporale di riferimento ha un effetto determinante sui risultati: passando da sessanta a quaranta giorni vi è un incremento di R^2 da 0.36 a 0.44 circa, mentre per l'orizzonte temporale di venti giorni la volatilità storica diviene la variabile esplicativa migliore.

Queste evidenze empiriche portano ad ipotizzare l'utilità di un'analisi di regressione della volatilità futura spiegata da entrambe le misure, storica ed implicita; le evidenze dimostrano peraltro che il coefficiente di determinazione R^2 risulta inferiore⁵³ rispetto all'equazione che utilizzava la sola volatilità implicita e, nel caso della previsione per i successivi cinque giorni, il coefficiente angolare della variabile storica non è significativamente diverso da zero.

Le conclusioni che si possono trarre dall'approccio di Neuhaus (1995) sono dunque per la superiorità della volatilità implicita rispetto alla volatilità storica nella previsione della volatilità futura, ad esclusione dell'orizzonte temporale molto breve; tra le diverse misure di volatilità implicite utilizzate risulta poi maggiormente affidabile la serie calcolata sulle opzioni *call* e la serie ponderata per il coefficiente κ , mentre non risulta promettente la media ponderata della volatilità implicita degli ultimi cinque giorni.

In Galati e Tsatsaronis (1996) si studia il contenuto informativo della volatilità implicita per le opzioni *over the counter* (OTC)⁵⁴ su tassi di cambio e dunque si utilizza necessariamente la serie delle volatilità implicite *ATM forward* direttamente quotate, in quanto usuale metodo di *pricing* delle opzioni nell'ambito di questo mercato. Anche in questa ricerca, dopo un'accurata analisi descrittiva delle serie utilizzate, si utilizza il metodo della regressione per rilevare le relazioni tra volatilità futura ed implicita. A differenza dello studio riguardante opzioni su *bond future*, nel mercato delle opzioni valutarie l'intercetta α sembra essere significativamente diversa da zero, violando in tal modo le condizioni per l'efficienza della previsione; peraltro, coerentemente con lo studio precedentemente citato, si conferma la superiorità previsionale della volatilità implicita rispetto alla volatilità storica sia in termini di coefficiente di determinazione R^2 , sia in termini di coefficiente angolare nell'analisi di regressione⁵⁵. Inoltre, mentre per la volatilità implicita non è possibile rifiutare l'ipotesi che β sia pari ad uno per tutte le opzioni con scadenza un mese, per la volatilità storica tale ipotesi è sempre rigettata. Le conclusioni raggiunte non cambiano con l'impostazione della regressione bivariata: alla volatilità implicita viene aggiunta, come variabile indipendente, la volatilità storica, con il risultato di lasciare invariato il coefficiente di determinazione ed il coefficiente angolare della volatilità implicita, ma riducendo in modo rilevante il coefficiente angolare della volatilità storica. Queste conclusioni confermano completamente le evidenze di Jorion (1995)⁵⁶ e parzialmente i risultati della ricerca di Scott (1992)⁵⁷; in questo ultimo studio la volatilità implicita spiega buona parte della volatilità futura (escluso il caso dello yen), ma la combinazione con la volatilità storica riesce ad incrementarne le attitudini previsionali.

⁵³ Queste considerazioni non si riferiscono all'orizzonte temporale di venti giorni, per il quale nella maggior parte dei casi la volatilità storica è considerata l'unica variabile esplicativa.

⁵⁴ Lo studio si riferisce alla serie storica (02.01.1992-31.01.1995) dei tassi di cambio yen giapponese, marco tedesco e sterlina inglese contro dollaro; franco francese contro marco tedesco.

⁵⁵ Le conclusioni di superiorità della volatilità implicita nella previsione della volatilità futura del mercato dei cambi e di rifiuto dell'ipotesi di previsione efficiente, sono coerenti con le risultanze di Bank of Japan (1995) nella parte relativa alle opzioni su tassi di cambio.

⁵⁶ Le volatilità implicite sono calcolate dai prezzi di opzioni su *currency future* contro marco tedesco trattate al *CME* dal gennaio 1985 al febbraio 1992.

⁵⁷ In questo caso ci si riferisce ad opzioni valutarie trattate al Philadelphia Exchange; vengono analizzate le serie storiche di volatilità implicita di opzioni *at the money* sui tassi di cambio contro dollaro di marco, sterlina, yen e franco svizzero nel periodo compreso tra il 1983 e il 1989.

In tutte le ricerche di cui si è dato conto in questo paragrafo, sembra essere evidente che l'ipotesi di una misura di volatilità implicita come previsione efficiente dal punto di vista informativo non è del tutto coerente con le evidenze empiriche, soprattutto relative al mercato azionario; sembra peraltro confermato il fatto che buona parte della variabilità viene comunque spiegata dalla volatilità implicita. La via più promettente per ottenere attendibili previsioni della volatilità futura sembra proprio essere quella di integrare le informazioni provenienti dalla volatilità implicita, con elaborazioni della serie storica dei ritorni del sottostante, sebbene le evidenze non sostengano in modo concorde tale approccio.

La volatilità implicita è dunque generalmente considerata utile, in diverse misure per diversi mercati, nella previsione della volatilità futura. Altrettanto consenso esiste peraltro sul fatto che essa costituisce una previsione sistematicamente troppo elevata rispetto alla volatilità futura che poi effettivamente viene realizzata. Tale evidenza è presente tra gli altri in Jorion (1995) per il mercato dei cambi ed in Jackwerth e Rubinstein (1996) per il mercato azionario. In quest'ultimo caso si rilevano le volatilità storiche ed implicite *ATM* sull'indice *S&P500*⁵⁸; i valori osservati confermano alcuni comportamenti ben noti della volatilità. In primo luogo la volatilità storica misurata varia significativamente a seconda dell'intervallo di tempo; in secondo luogo possiede un basso valore previsionale circa la volatilità futura. Ma l'aspetto più rilevante è che la volatilità implicita è sempre maggiore della realizzazione successiva di volatilità storica precedente, in misura minore quando il periodo campione è esteso. Ciò è confermato dai risultati di un semplice test rappresentati nella figura 5.

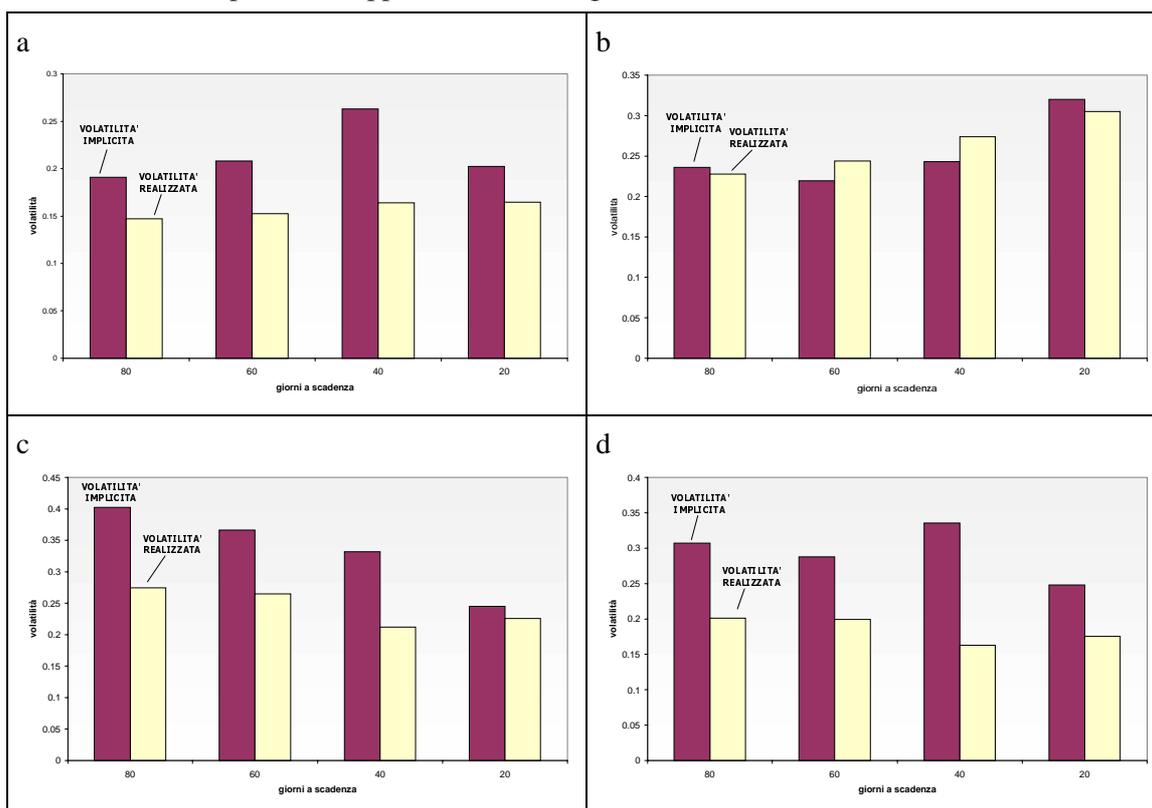


Figura 5: Volatilità implicita e volatilità realizzata per l'indice *FTSE*.

La misura di volatilità implicita utilizzata corrisponde alla media delle volatilità implicite di opzioni *call* e *put ATM* sull'indice azionario *FTSE 100* quotate al *LIFFE*; il calcolo è avvenuto sui

⁵⁸ Le opzioni considerate nell'analisi hanno scadenza compresa tra i 135 e i 225 giorni, nel periodo 02.04.1986-02.04.1993; le elaborazioni considerate sono la volatilità implicita standard, la volatilità storica calcolata nei 28 giorni precedenti, 91 giorni, 364 giorni, 1092 giorni.

prezzi di *settlement* di opzioni per vita residua pari a 80, 60, 40 e 20 giorni per le scadenze trimestrali da giugno 1998 a marzo 1999. La misura di volatilità realizzata rappresenta la deviazione standard annualizzata dei rendimenti dell'indice azionario sottostante calcolata negli 80, 60, 40, 20 giorni intercorrenti dalla data di rilevazione della volatilità implicita, alla scadenza dell'opzione. E' molto evidente, tranne in due casi, il sistematico *bias* della volatilità implicita.

(elaborazioni su dati fonte Datastream)

Probabilmente questo fenomeno deriva dalla combinazione dell'utilizzo di Black e Scholes per stimare la volatilità di opzioni *ATM* unito alla correzione apportata dal mercato per tener conto che eventi estremi rari sono possibili anche se poi non necessariamente presenti nella recente storia delle quotazioni.

Una trattazione più sistematica delle ragioni plausibili del *bias* nella volatilità implicita sono presenti in Fleming (1999); si ravvisa innanzitutto che non si tratta semplicemente del risultato di errori di misurazione o di specificazione, dal momento che sfruttando il *bias* con apposite *trading rules* è possibile ottenere rilevanti e sistematici extraprofiti. Non si tratta peraltro nemmeno di inefficienza del mercato delle opzioni, dal momento che considerando i costi di transazione derivanti dai *bid-ask spread* la totalità dei profitti scompare; è dunque possibile affermare che i prezzi delle opzioni deviano sistematicamente dal loro "vero" valore senza peraltro segnalare, proprio per via dei costi di transazione, effettive opportunità di arbitraggio.

La spiegazione più promettente di questo fenomeno deve essere ricercata nella presenza di un premio al rischio collegato al cosiddetto *volatility risk*; si verifica che i profitti delle *trading rules* aumentano in effetti per le strategie caratterizzate da un'esposizione alla volatilità più rilevante e durante i periodi in cui il livello della volatilità è elevato. Un'interpretazione analitica di questo fenomeno sarà fornita in termini generali nel paragrafo 3.2.1 dedicato ai modelli con volatilità stocastica.

3. Tecniche di estrazione della distribuzione *risk neutral* implicita

Nell'ambito di questa seconda sezione del *paper* si prendono in esame gli approcci di una nuova e crescente letteratura che studia i ritorni attesi sull'attività finanziaria sottostante in base ai prezzi delle opzioni. L'interesse relativo a questa tematica è diventato molto rilevante certamente per la crescita dimensionale del mercato dei derivati, ma soprattutto per la ricchezza del *set* informativo contenuto nei prezzi delle opzioni. Rispetto ad approcci che utilizzano i valori di prezzo *forward* espressi dal mercato per una stima puntuale del livello di prezzo futuro, l'utilizzo delle opzioni, grazie alla non-linearità del *payoff*, consente infatti di descrivere l'intero *range* di realizzazioni che il mercato prefigura e la probabilità associata ad ognuna di esse.

Gli aspetti promettenti dell'estrazione di una distribuzione di probabilità dal prezzo delle opzioni, pur trattandosi di una densità *risk neutral* e non effettiva, si riferiscono alla capacità di incorporare informazioni che possono non apparire, o possono apparire molto più tardi, nella serie dei ritorni realizzati del sottostante. L'analisi di queste informazioni è particolarmente significativa, in quanto avere a disposizione una distribuzione di probabilità consente di ottenere in primo luogo un'unica misura di volatilità, calcolata come momento secondo della densità *risk neutral* ottenuta; in secondo luogo gli altri momenti della distribuzione costituiscono utili misure di asimmetria e curtosi implicite. Infine ulteriori importanti indicazioni si possono ottenere monitorando l'evoluzione temporale dei momenti della densità *risk neutral*, a scopi previsionali o di gestione del rischio.

Come è stato illustrato nel paragrafo 2.2, il metodo che consente di ottenere dai prezzi delle opzioni finanziarie la distribuzione di probabilità del sottostante consiste nel derivare due volte la formula di *pricing* rispetto allo *strike price*. Il modello di valutazione a cui fare riferimento non può peraltro riferirsi in termini precisi a Black e Scholes (1973), per le numerose anomalie espresse nei prezzi di mercato delle opzioni rispetto al modello. E' necessario pertanto determinare una formula di valutazione coerente con le evidenze empiriche; in questo senso l'approccio più promettente dovrebbe essere associato alla rimozione dell'ipotesi di distribuzione lognormale con volatilità costante.

Non si tratta di una variazione facile; il metodo più semplice per introdurre nella formula di *pricing* questi elementi, mantenendo la struttura fondamentale dei modelli di valutazione classici, consiste nel considerare la volatilità una variabile deterministica, che dipende dal prezzo ed eventualmente dal tempo in termini ben definiti. La relazione tra volatilità e variabili esplicative viene specificata sulla base delle quotazioni di mercato; il problema della natura discreta delle rilevazioni empiriche, rispetto alla necessità di disporre di una funzione continua, viene superato con l'utilizzo di diverse tecniche d'interpolazione¹.

¹ L'utilizzo e l'affidabilità dei risultati delle tecniche d'interpolazione dipendono in termini apprezzabili dall'ampiezza delle rilevazioni di mercato disponibili; in questo senso si verificano le maggiori limitazioni sul mercato dei cambi, dove sono disponibili con continuità soltanto tre osservazioni, come in McCauley e Melick (1996a), oppure, nel migliore dei casi, cinque osservazioni, come in Campa, Chang e Reider (1998).

L'alternativa ai modelli che considerano la volatilità come una variabile deterministica sono modelli di *pricing* che aggiungono al processo stocastico del prezzo dell'attività finanziaria sottostante un ulteriore processo casuale, che caratterizza la volatilità oppure descrive dinamiche discontinue dell'evoluzione delle quotazioni. In questo caso la struttura fondamentale dei modelli classici viene abbandonata, in quanto deve essere determinato un prezzo di mercato anche per il nuovo parametro di rischio; le difficoltà nella stima di questo parametro implicano notevole complessità nei modelli che seguono questa logica.

Questa seconda sezione del *paper* rispecchia l'impostazione sin qui delineata; verranno infatti presi in considerazione in primo luogo approcci che, con sfumature diverse, sviluppano funzioni deterministiche della volatilità interpolate sulla base delle rilevazioni empiriche e, a partire da queste, determinano la distribuzione di probabilità *risk neutral*. In secondo luogo saranno accennati gli aspetti rilevanti della seconda categoria di approcci, che si riferisce ai modelli di volatilità stocastica o di processo diffusivo a salti; si tratta in questi casi dei modelli più complessi, che mirano a stabilire un prezzo di mercato per il rischio di volatilità in termini analitici.

Si ribadisce che l'attenzione si concentrerà in modo prevalente sulle diverse tipologie di studio che fanno riferimento a funzioni deterministiche della volatilità; questi approcci hanno il pregio di mantenere uno specifico contatto con i fenomeni empirici osservabili sui mercati e dunque hanno una maggiore valenza interpretativa, oltre che una formulazione analitica più accessibile. Tra l'altro in questi termini sarà possibile proporre, nell'ambito della terza sezione del *paper*, una serie di test empirici su dati di mercato reali.

3.1 Modelli con volatilità deterministica

I diversi approcci per l'estrazione della distribuzione di probabilità implicita che si affrontano nei prossimi paragrafi, pur essendo in tutti i casi caratterizzati da volatilità come variabile deterministica, si distinguono per impostazioni metodologiche distinte.

Innanzitutto la densità probabilistica neutrale al rischio è determinabile in modo molto semplice in forma discreta utilizzando i prezzi di particolari combinazioni di opzioni, che sono assimilabili a titoli Arrow-Debreu; si tratta dunque di applicare fedelmente l'insieme di elementi teorici affrontati nel paragrafo 2.2. Nel paragrafo 3.1.1 si approfondirà questo tipo di approccio che è denominato convenzionalmente approccio degli istogrammi.

In secondo luogo è possibile interpolare in modo parametrico la funzione dei prezzi delle opzioni o, nella maggior parte dei casi, della volatilità implicita; quest'ultima viene di conseguenza considerata una funzione deterministica del prezzo d'esercizio ed eventualmente del tempo ed inserita come tale nel contesto di un modello di *pricing* che generalmente corrisponde alla formulazione di Black e Scholes (1973). Nel paragrafo 3.1.2 si passeranno in rassegna i contributi che la letteratura ha proposto secondo questa impostazione, che è conosciuta sotto la denominazione di interpolazione della funzione della volatilità implicita.

In terzo luogo è ipotizzabile imporre dei vincoli alla tipologia della distribuzione di probabilità implicita finale: in questo caso l'approccio consiste nel determinarne i parametri minimizzando la distanza tra valori di mercato osservati e valori teorici generati dalla forma funzionale ipotizzata. Questo tipo di impostazione è presente negli approcci che verranno approfonditi nel paragrafo 3.1.3, relativamente al filone degli alberi binomiali, e nel paragrafo 3.1.4, in riferimento all'approccio della mistura di lognormali.

Infine la distribuzione di probabilità *risk neutral* può essere stimata in modo non parametrico, ovvero senza restrizioni parametriche né sul processo seguito dal sottostante, né sulla funzione di volatilità, né sulla forma funzionale della distribuzione finale. Questo tipo di approccio viene

affrontato nell'ambito del paragrafo 3.1.5 e corrisponde all'insieme dei metodi non parametrici avanzati.

In quanto segue si presenteranno gli approcci proposti dalla letteratura che hanno rispettato i criteri generali suggeriti nella classificazione secondo questi quattro filoni; si tenga presente peraltro che, come in ogni classificazione, non è possibile stabilire dei confini netti tra i diversi approcci. Di conseguenza si noteranno frequentemente elementi comuni tra studi appartenenti ad impostazioni diverse.

3.1.1 Probabilità risk neutral come prezzi di AD securities

Il metodo più semplice per costruire una distribuzione neutrale al rischio riprende alcune delle argomentazioni teoriche proposte nel paragrafo 2.2 ed in modo particolare il concetto di *AD securities*. A partire dai prezzi di mercato delle opzioni si tenta di costruire artificialmente questi titoli elementari, assumendo un processo discreto per il prezzo del sottostante. Un titolo di questo tipo pagherebbe al detentore un'unità di numerario per S_T pari a K e zero in tutti gli altri casi.

Il prezzo di ciascuno di questi titoli elementari esprime evidentemente la probabilità che il prezzo a scadenza sia pari a K , unico caso in cui il *payoff* sarà positivo; evidentemente un portafoglio costituito da *AD securities* per tutti i prezzi possibili avrebbe un valore certo al tempo T pari ad una unità e costituirebbe dunque una *proxy* ideale della distribuzione di probabilità discreta.

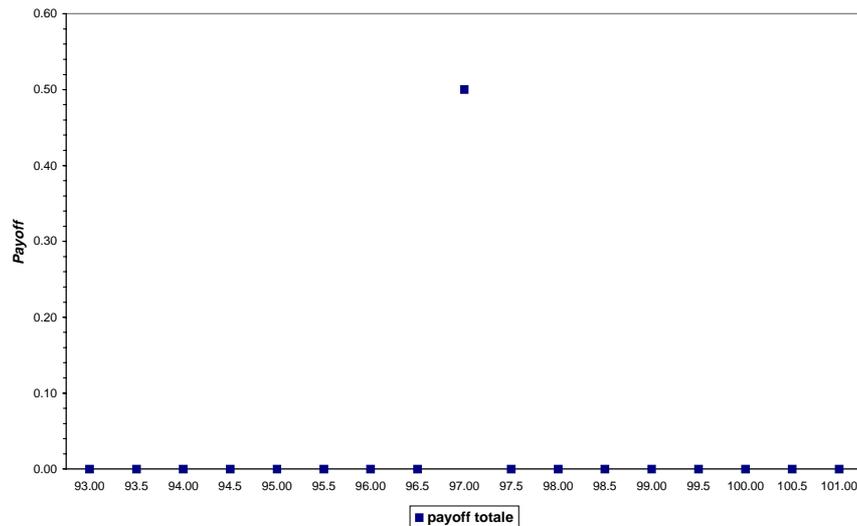
La costruzione del titolo *AD* utilizzando i prezzi di opzioni *call* corrisponde all'impostazione di una combinazione *long butterfly*, costituita dalla somma di un *bull spread* e di un *bear spread*². Il *payoff* di questo titolo elementare è positivo e pari alla differenza tra i prezzi d'esercizio, solo nel caso di un livello di prezzo finale pari allo *strike price* centrale.

Esempio 15. Supponiamo che ad una certa data sul mercato *LIFFE* per il contratto *BTP future* siano quotati i seguenti premi per opzioni *call*, per scadenza trimestrale ($t=0,25$):

Strike price	Premio opzione call
96,00	1,60
96,50	1,28
97,00	1,00
97,50	0,80
98,00	0,65

Ipotizziamo che il *tick* minimo per il prezzo del *BTP future* corrisponda a 0,50 centesimi. Vogliamo ottenere un titolo elementare che paghi 0,50 centesimi nell'eventualità che il prezzo a scadenza sia pari ad esempio a 97 e zero in tutti gli altri casi. E' necessario in primo luogo acquistare un'opzione con prezzo d'esercizio pari a 96,50 e vendere un'opzione con prezzo d'esercizio pari a 97 (*bull spread*); in secondo luogo è necessario vendere un'opzione con *strike* 97 ed acquistare un'opzione con *strike* 97,50 (*bear spread*). Si otterrà il *payoff* desiderato, come si rappresenta nella figura che segue.

² Lo *spread rialzista* (ribassista) si costruisce con l'acquisto di un'opzione *call* con un prezzo d'esercizio più basso (più alto) rispetto alla vendita di un'altra opzione *call* di pari scadenza. La combinazione *butterfly* è costituita di conseguenza dall'acquisto di un'opzione *call* con *strike price* basso, dall'acquisto di un'opzione *call* con *strike price* elevato, e dalla vendita di due opzioni *call* con prezzo d'esercizio intermedio.



Il costo di ogni combinazione *butterfly* è data dal relativo prezzo di mercato, ovvero dalla somma algebrica dei premi delle opzioni componenti. Identificando con Δ la differenza tra lo *strike price* centrale K e gli *strike* inferiore e superiore, possiamo scrivere:

$$\text{costo butterfly} = [C(S_t, t, K - \Delta) - C(S_t, t, K)] - [C(S_t, t, K) - C(S_t, t, K + \Delta)]$$

Esempio 16. Riprendendo i dati dall'esempio precedente, il valore della combinazione *butterfly* centrata su di un prezzo d'esercizio pari a 97 risulta pari alla somma dei premi delle opzioni componenti, ovvero:

$$\text{costo butterfly} = (1,28 - 1) - (1 - 0,80) = 0,08$$

Come è evidente dagli esempi il *payoff* della combinazione *butterfly* è uguale all'intervallo di prezzo Δ tra gli *strike prices*. Dividendo il costo del *butterfly* per Δ si ottiene il costo (fissato oggi) di un *payoff* a scadenza pari ad un'unità di numerario nel caso a scadenza il sottostante quoti un prezzo pari a K . Nel caso di un'opzione su *future* i premi sono liquidati alla scadenza. Per ricavare il prezzo *AD*, ovvero il prezzo liquidato a pronti per un *payoff* unitario futuro, occorre attualizzare il rapporto tra costo *butterfly* e Δ . La probabilità *risk neutral* sarà invece pari allo stesso rapporto non attualizzato. Analiticamente:

$$\text{probabilità risk neutral} = \frac{\text{costo butterfly}}{\Delta}$$

$$\text{prezzo AD} = \frac{\text{costo butterfly}}{\Delta} e^{-rt}$$

Esempio 17. Proseguendo il percorso logico degli esempi precedenti, se consideriamo che la combinazione *butterfly* così strutturata dà diritto ad una remunerazione pari a 0,50 nel caso di un prezzo a scadenza pari a 97 e zero in tutti gli altri casi, per ottenere il prezzo del titolo elementare *AD* è necessario dividere per Δ , ovvero:

$$\text{probabilità risk neutral} = 0,08/0,50 = 0,16$$

$$\text{prezzo AD} = 0,16 \cdot e^{-0,06 \cdot 0,25} = 0,158$$

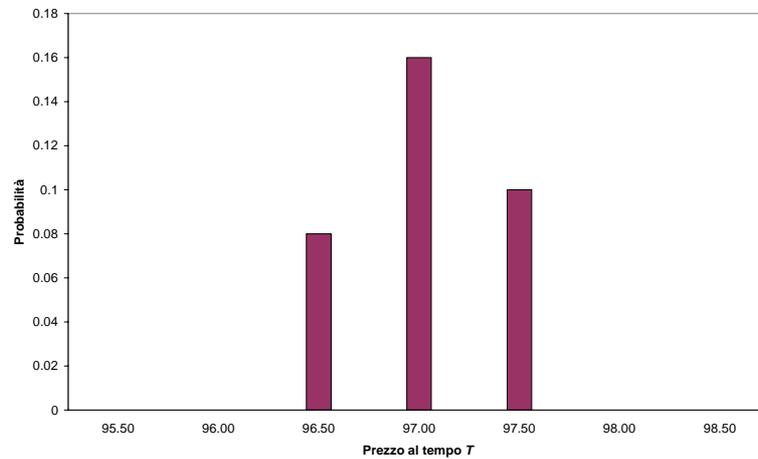
Il prezzo del titolo *AD* incorpora la probabilità che il mercato associa al verificarsi, alla scadenza dell'opzione, di un prezzo pari a K per l'attività finanziaria sottostante. Ripetendo lo stesso procedimento per tutti i valori di K è possibile ottenere un'intera distribuzione di

probabilità discreta implicita nei prezzi delle opzioni; per i calcoli non è sufficiente disporre dunque dei prezzi di mercato di tre opzioni *call*, ma per generare una distribuzione di probabilità più completa possibile sono necessari più prezzi possibili di opzioni con la stessa scadenza e diverso prezzo d'esercizio³. Se la gamma di opzioni non è sufficientemente ampia da coprire tutte le possibili realizzazioni, sarà possibile ottenere solamente la massa di probabilità mancante, senza poter distinguere gli estremi superiori o inferiori.

Esempio 18. A partire dai dati degli esempi precedenti, calcoliamo per ogni prezzo possibile il valore delle rispettive probabilità implicite:

Prezzo centrale	Probabilità implicite (prezzo AD)
96,50	$0,08 = (1,60-1,28-1,28+1,00)/0,50$
97,00	$0,16 = (1,28-1,00-1,00+0,80)/0,50$
97,50	$0,10 = (1,00-0,80-0,80+0,65)/0,50$

I valori ottenuti rappresentano la probabilità di avere una quotazione del sottostante a scadenza pari al prezzo centrale della combinazione.



In questo esempio ipotetico la massa di probabilità mancante sarebbe pari a 0,66 (1-0,34), mentre nelle applicazioni reali con buona disponibilità di dati dovrebbe essere pari ad una percentuale ridotta in corrispondenza degli estremi del *range* di prezzi possibili.

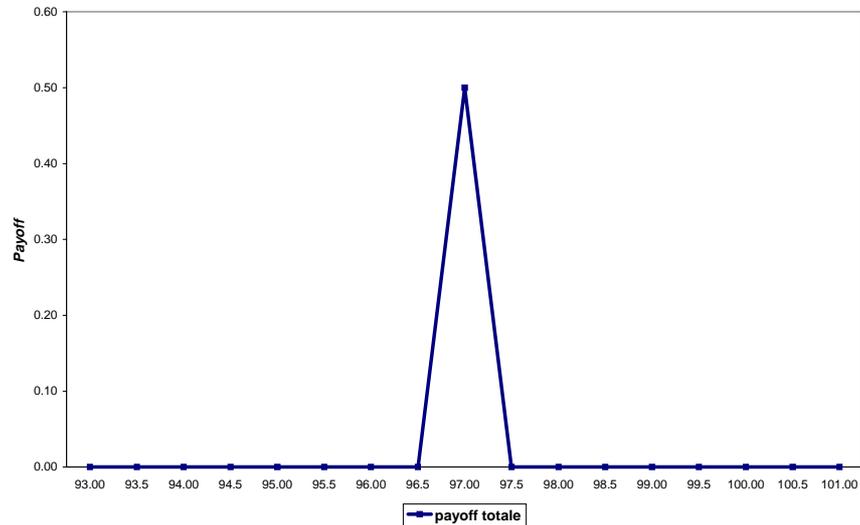
La forte limitazione del modello presentato fino ad ora è quella di considerare un processo di prezzo del sottostante discreto, con intervalli che corrispondono alle differenze minime tra gli *strike* quotati; in questo modo l'assegnazione delle probabilità alle quotazioni dell'*underlying* a scadenza è piuttosto grossolana. In realtà il mercato farà segnare anche prezzi compresi tra gli *strike*. Il *payoff* varia linearmente con S_T da un minimo di 0, per $S_T=K-\Delta$, e un massimo di Δ , per $S_T=K$ per poi ridiscendere fino a 0, per $S_T=K+\Delta$. La strategia non dà quindi un *payoff* costante. Dunque il prezzo della combinazione *butterfly* rappresenta una misura della probabilità di ottenere a scadenza un *payoff* variabile linearmente tra zero e Δ (negli esempi tra zero e 0,50).

Nonostante questa differenza il procedimento per la costruzione di una distribuzione di probabilità discreta non cambia: un portafoglio costituito da tutte le combinazioni *butterfly* possibili ha un valore certo al tempo T ancora pari a Δ e quindi è necessario anche in questo

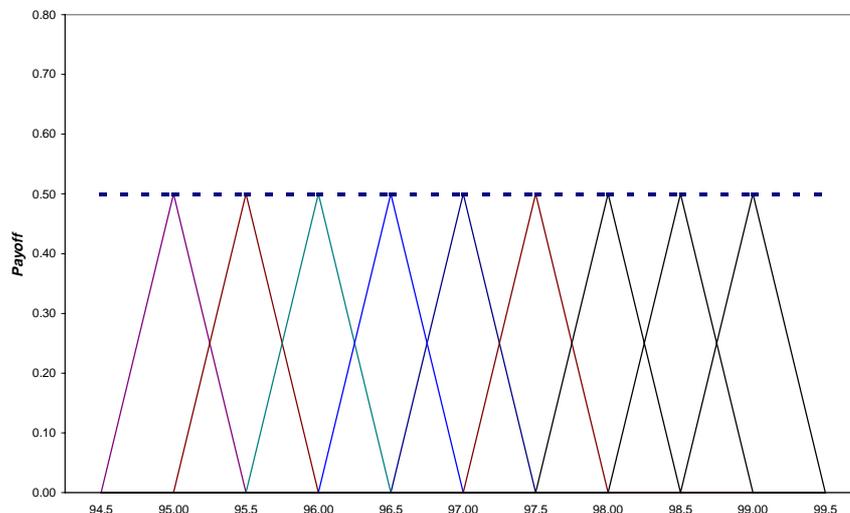
³ La combinazione *butterfly* può essere costruita anche utilizzando opzioni *put*; è necessario sommare un *bull spread* (acquisto e vendita di un'opzione *put* con *strike price* rispettivamente $K-\Delta$ e K) e un *bear spread* (acquisto e vendita di un'opzione *put* con *strike price* rispettivamente $K+\Delta$ e K).

caso riscalfare i valori delle combinazioni di opzioni dividendo per Δ allo scopo di ottenere delle misure di probabilità.

Esempio 19. Rappresentiamo innanzitutto il *payoff* della combinazione *butterfly* degli esempi precedenti nel caso in cui il processo di prezzo sia caratterizzato da intervalli discreti pari ad un centesimo di punto percentuale. Rispetto alla figura dell'esempio 15 si nota che il *payoff* presenta un andamento lineare quasi continuo, che lo differenzia rispetto al titolo AD propriamente detto.



Rappresentiamo a questo punto lo stesso profilo per un portafoglio costituito da tutte le combinazioni *butterfly* possibili; il *payoff* a scadenza è sempre pari a 0,50, in quanto per livelli di prezzo diversi dagli *strike price* si sommano profitti di combinazioni diverse.



Il problema principale nell'applicazione ai dati di mercato di una metodologia di questo che viene definito approccio degli istogrammi⁴ è relativo alla possibilità di ottenere per alcuni livelli di prezzo valori di probabilità anomali o addirittura negativi, a causa della rilevazione di prezzi asincroni, o per via di marginali opportunità di arbitraggio non sfruttate. Per attenuare questi

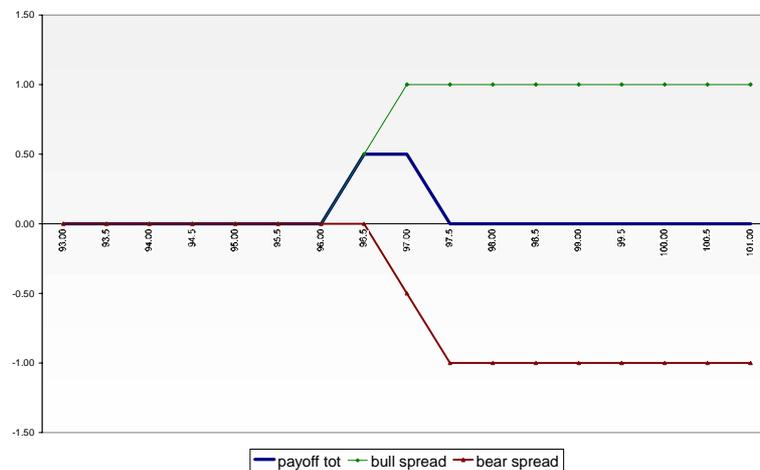
⁴ Un approccio simile al metodo degli istogrammi per la determinazione di probabilità discrete *risk neutral* è stato proposto per il mercato azionario in Rubinstein (1994), modificando un modello analogo descritto in Longstaff (1990).

problemi è possibile utilizzare una combinazione di opzioni che identifichi un'area di *payoff* positivi più ampia rispetto al caso fino ad ora considerato; si tratta di impostare la combinazione *butterfly* come differenza di due combinazioni *bull* e *bear spread* con intervalli tra i prezzi d'esercizio pari a 2Δ , anziché Δ . In termini formali il prezzo del titolo elementare si determina come segue:

$$\text{prezzo AD} = \frac{[C(S_t, t, K - \Delta, T) - C(S_t, t, K + \Delta, T)] - [C(S_t, t, K, T) - C(S_t, t, K + 2\Delta, T)]}{2\Delta}$$

Anche in questo caso il prezzo *AD* non attualizzato costituisce una misura *risk neutral* della probabilità associata dal mercato al verificarsi, alla scadenza dell'opzione, di un prezzo dell'attività finanziaria sottostante compreso tra i due prezzi d'esercizio centrali.

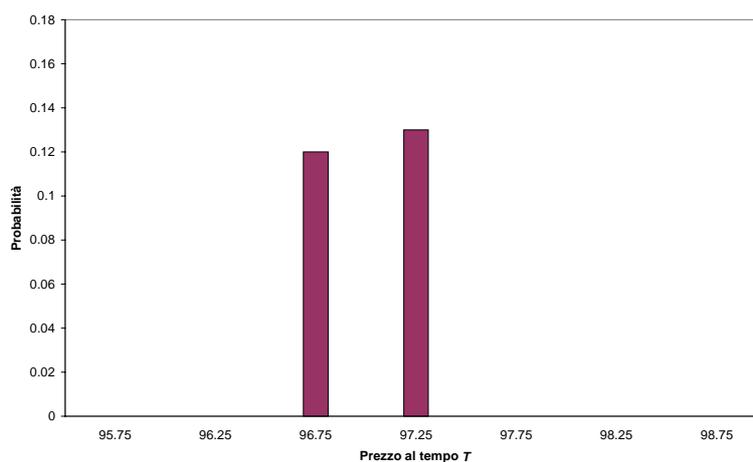
Esempio 20. Utilizzando i dati degli esempi precedenti, la combinazione *butterfly* in versione più ampia centrata sull'intervallo 96,50-97,00 si costruisce con l'acquisto dell'opzione *strike* 96, vendita dell'opzione *strike* 97 (*bull spread*), e con la vendita dell'opzione *strike* 96,50, acquisto dell'opzione *strike* 97,50 (*bear spread*).



La distribuzione di probabilità discreta si costruisce come segue:

Intervallo prezzi	Probabilità (prezzo AD)
96,50-97,00	0,12=(1,60-1,00-1,28+0,80)/1
97,00-97,50	0,13=(1,28-0,80-1,00+0,65)/1

Dal momento che questo diverso approccio richiede per ogni misurazione della probabilità la presenza di quattro opzioni, la rappresentazione della distribuzione discreta è ancor più ridotta rispetto all'esempio precedente:



L'area degli istogrammi corrisponde alle probabilità assegnate ad un prezzo a scadenza compreso rispettivamente negli intervalli 96.50-97.00 e 97.00-97.50; l'istogramma viene rappresentato con una base pari a Δ ed un'altezza pari all'area divisa per la base.

L'approccio di determinazione della funzione di densità *risk neutral* utilizzando le combinazioni *butterfly* estese appena esemplificato è stato impiegato da Neuhaus (1995) nel mercato delle opzioni su *Bund future* e su *future euromarco*⁵. Per verificare l'affidabilità delle probabilità determinate in questo modo è stata calcolata una misura di valore atteso attraverso il prodotto tra il prezzo d'esercizio medio di ogni classe e l'area del rispettivo istogramma; tale misura è stata confrontata con il valore atteso espresso dal mercato in quel momento, ovvero con il prezzo del rispettivo contratto *future*, ottenendo valori pressoché identici e confermando dunque l'affidabilità della metodologia di costruzione.

A questo punto la distribuzione discreta ottenuta dovrebbe consentire di esprimere giudizi relativi alle attese e all'incertezza di mercato, attraverso un'analisi descrittiva della stessa. A tale scopo è preferibile utilizzare le tipiche misure di dispersione, tra le quali si privilegia solitamente il campo di variazione interquartile⁶, per isolare in termini chiari l'evoluzione temporale delle aspettative di mercato.

⁵ L'approccio degli istogrammi è stato impiegato anche da Bahra (1997) per determinare la distribuzione implicita *risk neutral* dell'eurosterlina, utilizzando i prezzi delle opzioni quotate al *LIFFE*, scadenza giugno 1996, osservate il 06.03.1996 e l'08.03.1996.

⁶ Nella ricerca di Neuhaus (1995) infatti si rappresenta l'evoluzione del *sentiment* nei giorni immediatamente precedenti e successivi il rilascio del dato mensile (febbraio 1994) sull'aggregato monetario *M3*; si riscontra come dati preliminari e previsioni non alterino la percezione dello scenario inflattivo e di evoluzione dei tassi d'interesse, mentre l'uscita del dato definitivo genera notevole incertezza come si riscontra nel forte incremento della distanza tra il primo ed il terzo quartile.

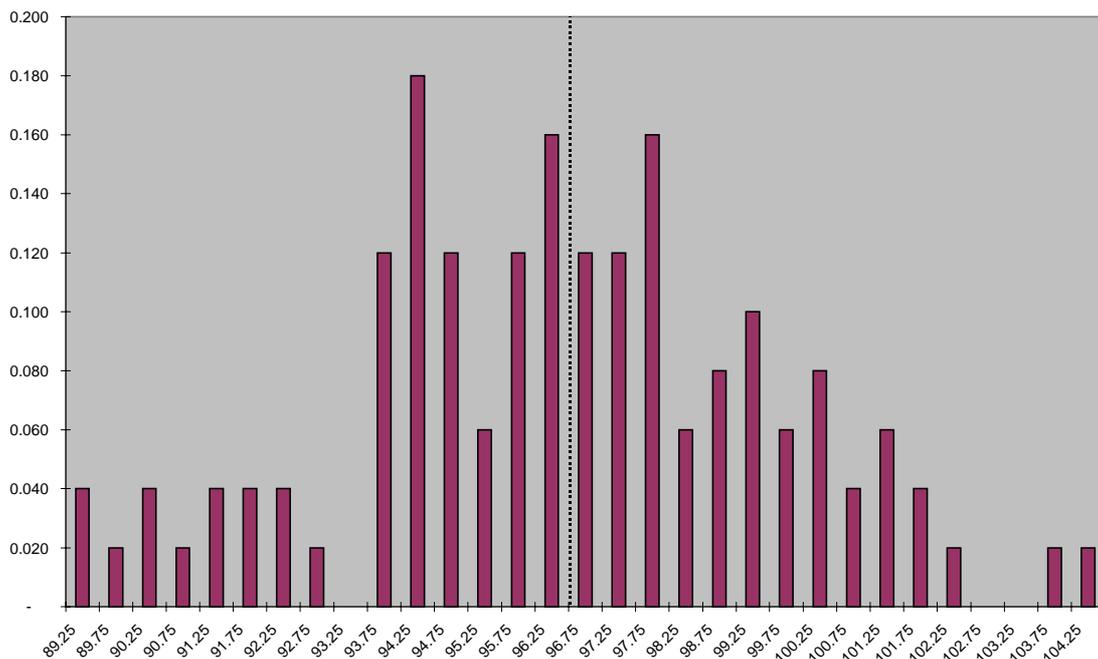


Figura 6: Distribuzione implicita *risk neutral* ad istogrammi.

La funzione di densità rappresentata è stata calcolata sulla base dei valori espressi dal mercato di opzioni *call* sul *Bund future* trattato al *LIFFE* il giorno 4 marzo 1994, utilizzando i dati riportati nella tabella 10 di Neuhaus (1995:45). Il segmento tratteggiato verticale rappresenta il valore atteso della distribuzione, ovvero il prezzo *forward* del sottostante.

La semplicità nella prima approssimazione della distribuzione implicita *risk neutral* che l'approccio degli istogrammi consente va confrontata con gli inevitabili inconvenienti di un procedimento totalmente empirico; innanzitutto non c'è un modo sistematico per modellare le code della distribuzione, dal momento che il *range* coperto dagli *strike prices* trattati nel mercato può non essere sufficientemente ampio. In secondo luogo l'eventualità che i prezzi delle opzioni registrati determinino probabilità negative o consentano opportunità di arbitraggio⁷, causata da problemi di misurazione relativi ai *bid-ask spread* o alla sincronia di rilevazione dei prezzi per diversi *strike prices*, non è gestibile direttamente; è possibile attenuare la problematica utilizzando rilevazioni di *settlement* anziché dati *intraday*.

3.1.2 Interpolazione della funzione della volatilità implicita

Gli approcci di estrazione della distribuzione *risk neutral* a partire dall'interpolazione della funzione della volatilità implicita sono piuttosto eterogenei; l'elemento che in genere li accomuna è comunque quello di affrontare il problema di approssimazione della densità del sottostante non in base ai prezzi di mercato delle opzioni, bensì dal lato delle corrispondenti misure di volatilità implicita, determinate con le formule di valutazione classiche senza per questo considerare le volatilità implicite come stima di una volatilità attesa costante, ma semplicemente come parametro di mercato da tarare per un *pricing* corretto.

Il passo successivo è quello di inserire la funzione deterministica della volatilità così ottenuta in un modello di *pricing* nel quale σ_i è funzione dello *strike price* ed, eventualmente, della

⁷ Per una dettagliata rassegna delle ricerche empiriche che, sui diversi mercati, hanno quantificato le effettive opportunità d'arbitraggio oppure le problematiche di sincronizzazione dei prezzi di opzioni e sottostante si veda Bates (1995).

scadenza; la funzione della volatilità implicita consente di interpolare σ_i per un intervallo continuo di valori dello *strike*, rendendo differenziabile la funzione di *pricing*, oltre a smussare eventuali irregolarità nella forma dello *smile*. La derivata seconda di tale formula di *pricing* rispetto al prezzo d'esercizio consentirà di estrarre la distribuzione implicita *risk neutral*.

L'articolo di Shimko (1993) costituisce un ottimo esempio di interpolazione della funzione di volatilità implicita, espressa dal consueto *volatility smile*; in questo caso si utilizza una funzione quadratica, che approssima in modo accurato i valori di volatilità implicita espressi dai prezzi di mercato delle opzioni ed allo stesso tempo mantiene caratteristiche di *smoothness*:

$$\hat{\sigma}(K) = A_0 + A_1 K + A_2 K^2$$

I parametri della funzione vengono stimati minimizzando la distanza dalla distanza dalle volatilità implicite ottenute dai prezzi di mercato delle opzioni. Successivamente, inserendo nel modello di Black e Scholes la funzione interpolata al posto della variabile relativa alla volatilità, si ottiene una formula di *pricing* delle opzioni⁸ coerente con le evidenze di mercato:

$$C(K, \tau) = S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + \left(r + \frac{1}{2} \hat{\sigma}(K, \tau)^2 \right) \tau}{\hat{\sigma}(K, \tau) \sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \hat{\sigma}(K, \tau) \sqrt{\tau} .$$

La derivata seconda della funzione del premio rispetto allo *strike price* determina la densità *risk neutral* nell'intervallo compreso tra il prezzo d'esercizio quotato più basso e più alto⁹. Nelle code della distribuzione, ovvero per prezzi d'esercizio non coperti dai prezzi di mercato, si sopperisce utilizzando densità ottenute da funzioni di probabilità *lognormali*: la densità risultante è dunque costituita da tre parti.

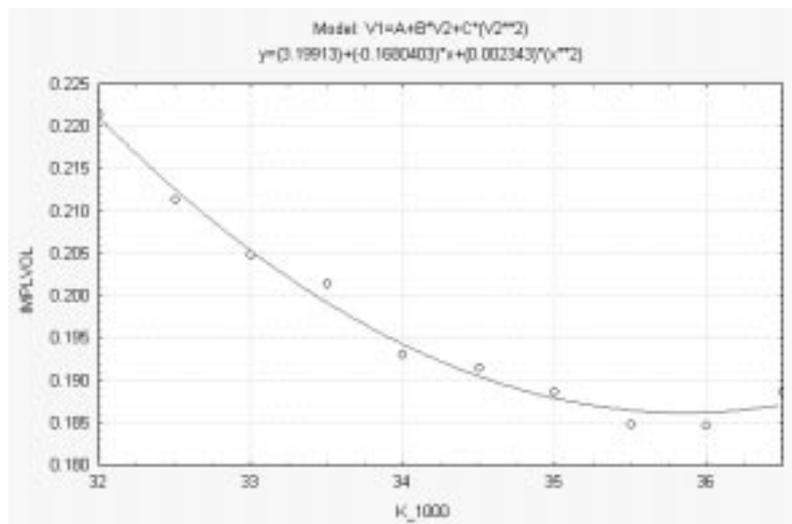


Figura 7: Funzione quadratica della volatilità implicita per opzioni *MIBO30*.

Le volatilità implicite sono state calcolate a partire dai prezzi osservati il 21 luglio 1999 durante le contrattazioni sull'opzione *MIBO30* agosto 1999; per migliorare la significatività delle

⁸ Si prenda atto che l'utilizzo della formula di Black e Scholes non implica una considerazione di validità della stessa nell'ambito del modello; si tratta solo di un meccanismo di conversione che permette di interpolare le volatilità implicite anziché i prezzi stessi delle opzioni.

⁹ La formulazione analitica del risultato della derivata seconda della funzione di *pricing* è presente in Shimko (1993).

rilevazioni sono state utilizzate le quotazioni di opzioni put (call) per prezzi d'esercizio inferiori (superiori) al livello *ATM*, escludendo i contratti poco liquidi ed i prezzi non sincroni. L'interpolazione è stata impostata utilizzando la funzione quadratica proposta da Shimko (1993).
(elaborazioni su dati fonte Reuters)

Dall'applicazione della metodologia all'indice *S&P500*¹⁰ si ottiene una distribuzione caratterizzata da asimmetria negativa e da leptocurtosi. In realtà all'approccio di Shimko (1993) sono stati riconosciuti alcuni difetti¹¹, relativi innanzitutto all'incapacità di garantire un livello adeguato di accuratezza nell'interpolazione: sono sufficienti alcune piccole variazioni nei prezzi osservati delle opzioni per cambiare il segno dell'asimmetria implicita. In secondo luogo il fatto di assegnare arbitrariamente una struttura di volatilità costante al di fuori dei prezzi d'esercizio trattati, non rende sempre possibile una transizione omogenea dalla parte osservabile alle code della distribuzione. In terzo luogo il fatto di utilizzare la regressione nell'interpolazione implica che le volatilità implicite osservate non necessariamente si trovino esattamente sulla funzione dello *smile* stimata. Infine va posta molta attenzione alla presenza di *outliers*, ai quali la funzione interpolata della volatilità è piuttosto sensibile.

Per ovviare a queste imprecisioni, approcci successivi più evoluti utilizzano una tecnica d'interpolazione diversa rispetto a Shimko (1993), concedendo maggior flessibilità nella forma dello *smile*, e dunque nella densità di probabilità, e migliorando in questo modo l'accuratezza; in particolare questa metodologia permette di far passare precisamente la funzione interpolante per i punti corrispondenti alle rilevazioni di mercato. Tutto questo avviene sostituendo la funzione quadratica con una *cubic spline*¹², ovvero con una funzione polinomiale uguale o inferiore al terzo grado; i polinomi compresi tra due rilevazioni vengono scelti di modo che dove si incontrano presentino una derivata prima della funzione uguale e differenziabile. Questo garantisce che la derivata prima sia continua, e dunque differenziabile in ogni punto della *cubic spline*. Al di fuori dei prezzi osservati lo *smile* viene esteso utilizzando il primo e l'ultimo polinomio esistente per una distanza pari a quella per cui il polinomio è stato impostato; oltre questi limiti lo *smile* è considerato *flat*. In Bahra (1997) ad esempio l'utilizzo della tecnica della *cubic spline* viene giudicato, dopo un confronto con i risultati di altre metodologie, il miglior metodo d'interpolazione della funzione dello *smile*; l'applicazione nella determinazione della distribuzione di probabilità implicita nei prezzi delle opzioni sul *future eurosterlina*, ottenuta con la metodologia di Shimko (1993) modificata per tener conto di uno *smile* interpolato con la *cubic spline*, risulta molto promettente. Campa, Chang e Reider (1998) utilizzano la tecnica dell'interpolazione mediante *cubic spline* per il mercato dei cambi *OTC*, ottenendo distribuzioni di probabilità neutrali al rischio che incorporano con successo le informazioni addizionali presenti nel *volatility smile*.

Una tecnica alternativa d'interpolazione della funzione di volatilità alternativa, che fa uso esclusivo di variabili di mercato, viene proposta da Malz (1998a) e utilizza alcune semplificazioni consentite dalle convenzioni e dalle pratiche di *trading* presenti nel mercato *OTC* delle opzioni valutarie; tale metodologia specifica innanzitutto lo *smile* della volatilità come funzione di una misura di *moneyness* data dal *Delta* dell'opzione anziché dal prezzo d'esercizio:

$$\sigma(\text{Delta}, \text{ATM}_t, \text{RR}_t, \text{STR}_t) = b_0 \text{ATM}_t + b_1 \text{RR}_t (\text{Delta} - 0,50) + b_2 \text{STR}_t (\text{Delta} - 0,50)^2$$

La funzione dello *smile* è dunque dipendente da tre componenti: una costante pari alla volatilità *ATM*_t; una funzione lineare del prezzo della combinazione *risk reversal*, descritta nell'ambito

¹⁰ L'applicazione utilizza opzioni con scadenza dicembre osservate il 21.10.1991.

¹¹ Le imprecisioni dell'approccio di Shimko (1993) sono descritte in Bahra (1997) ed in Malz (1998a).

¹² In Bates (1991) e Abken (1995) si utilizza la metodologia della *cubic spline* per ottenere prezzi delle opzioni interpolati per specifici livelli di *moneyness*.

del paragrafo 2.5.3, che esprime l'asimmetria dello *smile*; una funzione quadratica del prezzo della combinazione *strangle* che esprime il grado di curvatura dello *smile*, ovvero l'entità della differenza tra volatilità di opzioni *OTM* rispetto ad opzioni *ATM*.

- ♦ La combinazione *risk reversal*, già introdotta nel paragrafo 2.5.3, costituisce la differenza di prezzo tra due opzioni *call* e *put* egualmente *OTM*, nella maggior parte dei casi con *Delta* pari la prima a 0,25 e la seconda a -0,25. Per omogeneità di calcolo si utilizza frequentemente per l'opzione *put* il *Delta* dell'opzione *call* di pari *moneyness*, ovvero 0,75. In termini formali:

$$RR_t^{0,25Delta} = \sigma call_t^{0,25Delta} - \sigma put_t^{-0,25Delta}$$

- ♦ La combinazione *strangle* corrisponde alla differenza tra la media delle volatilità implicite di opzioni *call* e *put* *OTM* e la volatilità implicita di opzioni *ATM*, nella maggior parte dei casi con le misure di *Delta* indicate nella formula seguente:

$$STR_t^{0,25Delta} = \left(\sigma call_t^{0,25Delta} + \sigma put_t^{-0,25Delta} \right) / 2 - \sigma_t^{0,50Delta}$$

I pregi di questa interpolazione della funzione di volatilità sono la semplicità, la continuità, la differenziabilità e soprattutto la costruzione di ogni componente sulla base di valutazioni espresse dal mercato.

Ponendo il vincolo che tutte e tre le misure di volatilità utilizzate risultino spiegate esattamente dalla funzione dello *smile* elaborata, è possibile calcolare il valore dei coefficienti b_i . Affinché la volatilità calcolata sullo *smile* per *Delta* uguale a 0.50 sia pari a quella osservata *ATM*, bisogna porre b_0 uguale ad uno, infatti:

$$\sigma(0,50, ATM_t, RR_t, STR_t) = b_0 ATM_t + b_1 RR_t \cdot 0 + b_2 STR_t \cdot 0 = ATM_t \text{ per } b_0 = 1$$

Allo stesso modo l'analogo vincolo¹³ riferito alla combinazione *risk reversal* rende $b_1 = -2$:

$$RR_t = \sigma(0,25, ATM_t, RR_t, STR_t) - \sigma(0,75, ATM_t, RR_t, STR_t) = -\frac{b_1}{2} RR_t$$

Infine il terzo vincolo¹⁴ relativo alla combinazione *strangle* rende $b_2 = 16$, ovvero:

$$STR_t = \frac{1}{2} \left[\sigma(0,25, ATM_t, RR_t, STR_t) + \sigma(0,75, ATM_t, RR_t, STR_t) \right] - ATM_t = 0,25^2 b_2 STR_t$$

La forma funzionale risultante è la seguente:

$$\sigma(Delta, ATM_t, RR_t, STR_t) = ATM_t - 2RR_t (Delta - 0,50) + 16STR_t (Delta - 0,50)^2$$

Dalla funzione della volatilità così ottenuta, è relativamente semplice determinare la distribuzione di probabilità del sottostante. Si sostituisce innanzitutto nella precedente il

¹³ Sviluppamo i passaggi per ottenere il valore del parametro b_1 :

$$RR = \sigma(0,25) - \sigma(0,75) = ATM + b_1 RR(-0,25) + b_2 STR(-0,25)^2 - ATM - RR(0,25) - b_2 STR(0,25)^2$$

$$RR = -0,50 b_1 RR$$

$$b_1 = -2$$

¹⁴ Sviluppamo i passaggi per ottenere il valore del parametro b_2 :

$$STR = \frac{\sigma(0,25) + \sigma(0,75)}{2} - ATM = \frac{ATM + b_1 RR(-0,25) + b_2 STR(-0,25)^2 + ATM + RR(0,25) + b_2 STR(0,25)^2}{2} - ATM$$

$$STR = \frac{2ATM + 0,125 b_2 STR}{2} - ATM = 0,0625 b_2 STR$$

$$b_2 = 16$$

termine *Delta* con la sua espressione analitica, ottenibile dal modello di Garman e Kohlhagen (1983)¹⁵, che comprende essa stessa la volatilità:

$$\Delta = e^{-r_f \tau} N(d_1) = e^{-r_f \tau} N \left(\frac{\ln \left(\frac{S}{K} \right) + \left(r_d - r_f + \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}} \right)$$

$$\hat{\sigma} = ATM_t - 2RR_t \left(e^{-r_f \tau} N \left(\frac{\ln \left(\frac{S}{K} \right) + \left(r_d - r_f + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \right) \tau}{\hat{\sigma} \sqrt{\tau}} \right) - 0,50 \right) + 16STR_t \left(e^{-r_f \tau} N \left(\frac{\ln \left(\frac{S}{K} \right) + \left(r_d - r_f + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \right) \tau}{\hat{\sigma} \sqrt{\tau}} \right) - 0,50 \right)^2$$

dove r_d e r_f rappresentano rispettivamente il tasso d'interesse sulla valuta domestica ed estera.

In questo modo si ottiene una funzione analitica della volatilità implicita, per la quale non esiste una soluzione in forma chiusa, ma può essere comunque risolta iterativamente, e si va a sostituire per il termine corrispondente nel modello di Black e Scholes:

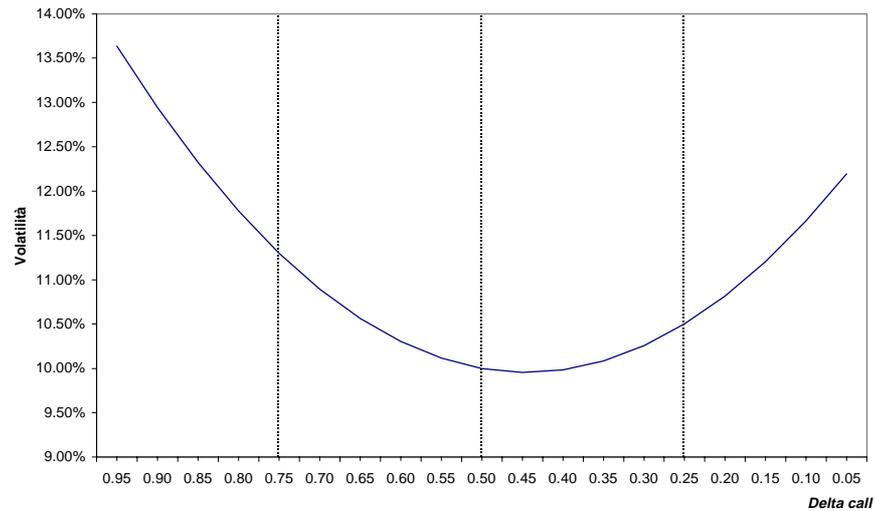
$$\hat{C} = e^{-r_f \tau} SN \left(\frac{\ln \left(\frac{S}{K} \right) + \left(r_d - r_f + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \right) \tau}{\hat{\sigma} \sqrt{\tau}} \right) - e^{-r_d \tau} KN \left(\frac{\ln \left(\frac{S}{K} \right) + \left(r_d - r_f - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \right) \tau}{\hat{\sigma} \sqrt{\tau}} \right)$$

Differenziando due volte la formula ottenuta rispetto allo *strike price* con metodi numerici, si ottiene la distribuzione di probabilità *risk neutral* in modo diretto, senza ipotesi aggiuntive sulla distribuzione.

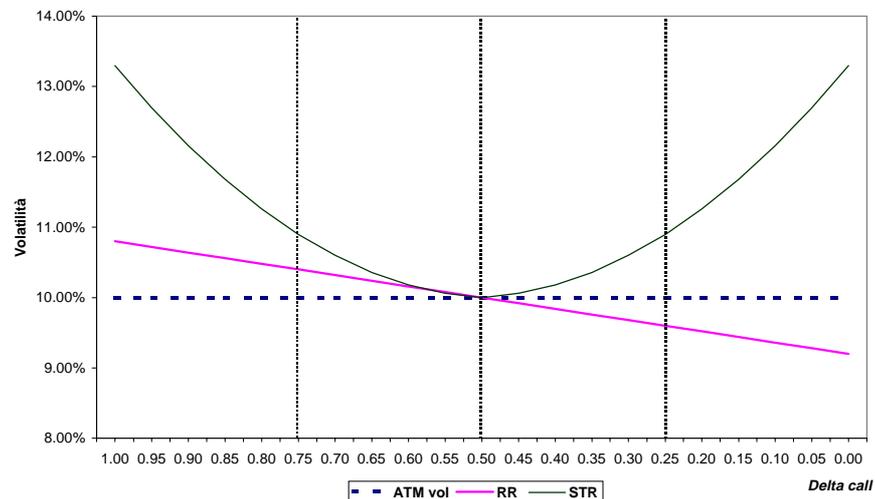
Esempio 21. Si ipotizzi che un *market maker* sul mercato delle opzioni valutarie *OTC* quoti una volatilità *ATM forward* per opzioni ad un mese sul cambio euro/dollaro USA pari al 10%, una combinazione *risk reversal 25Delta* pari a 0,80 euro *put* (ovvero l'opzione *put OTM* ha un valore superiore rispetto alla *call* corrispondente) ed una combinazione *strangle 25Delta* pari a 0,90. La funzione della volatilità risulta dunque essere, nel caso specifico, la seguente:

$$\sigma(\Delta, ATM_t, RR_t, STR_t) = 0,10 - 0,016(\Delta - 0,50) + 0,144(\Delta - 0,50)^2$$

¹⁵ Si tratta dell'estensione del modello base di Black e Scholes (1973) alle opzioni valutarie; infatti il modello originario non fornisce una corretta valutazione delle opzioni su valute, poiché in queste ultime sono coinvolti due tassi d'interesse.



Rappresentiamo le tre componenti dello *smile* nella figura che segue:



La funzione costante della volatilità *ATM* rispetto a *Delta* identifica il livello di riferimento per la volatilità, mentre la componente lineare *RR* esprime l'asimmetria e la componente quadratica *STR* rappresenta il grado di curvatura dello *smile*. I valori negativi della combinazione *risk reversal*, ovvero i valori positivi riferiti all'opzione *put*, determinano l'asimmetria negativa dell'effetto *smile* nella funzione della volatilità.

3.1.3 Alberi binomiali impliciti

Il filone degli alberi binomiali impliciti si pone l'obiettivo di sviluppare un modello *arbitrage free* che sia coerente con il *volatility smile* e la sua *term structure*; questo è indipendente, a differenza degli approcci con volatilità deterministica analizzati nel paragrafo precedente, dalle ipotesi del modello di Black e Scholes, ed allo stesso tempo non implica la stima di parametri addizionali, come avviene invece nel caso di processi stocastici del prezzo con più fattori casuali.

La funzione deterministica della volatilità assume nel caso degli alberi binomiali impliciti caratteristiche peculiari in quanto, anziché essere impostata come una relazione stabile rispetto a prezzo del sottostante e variabile temporale, è definita nell'ambito di un modello che

approssima in modo molto preciso i prezzi di mercato delle opzioni, in base ad un procedimento basato appunto su alberi binomiali.

Il mercato ideale nell'ambito del quale sviluppare un modello di questo tipo è certamente quello delle opzioni sull'indice *S&P500* trattate al *CBOE*, in quanto oltre ad essere tra i più liquidi ed attivi, presenta un numero piuttosto esteso di opzioni trattate sia per diverso *strike price* che per diversa scadenza¹⁶; infatti la costruzione di un albero implicito è, come si vedrà successivamente nel dettaglio, un procedimento che richiede una buona disponibilità di dati di *input*.

L'equazione di moto geometrico *browniano* in Black e Scholes viene sostituita dalla seguente:

$$\frac{dS}{S} = \mu(t)dt + \sigma(S,t)dZ$$

dove $\mu(t)$ è il termine di *drift* neutrale al rischio e dipendente solo dal tempo e $\sigma(S,t)$ è una funzione deterministica di volatilità locale che dipende sia dal tempo che dal prezzo del sottostante; la peculiarità del filone degli alberi binomiali è quella di determinare $\sigma(S,t)$ in modo numerico, facendo in modo che i prezzi delle opzioni calcolati dal modello siano coerenti con le quotazioni di mercato e, quindi, con la matrice delle volatilità implicite.

Nella letteratura sono presenti tre approcci fondamentali alla costruzione di alberi impliciti ricombinanti: in Dupire (1994) si propone un procedimento per determinare un albero trinomiale implicito e *risk neutral* che riesce ad interpretare sia l'effetto *smile*, che la sua dipendenza dal tempo. Dal momento che l'albero trinomiale presenta un gran numero di gradi di libertà, è possibile fissare a priori i prezzi del sottostante ad ogni nodo e la posizione temporale dei nodi e dunque il procedimento si riduce al calcolo delle probabilità di transizione nell'ambito dell'albero.

Il secondo approccio si riferisce a Rubinstein (1994) Rubinstein (1995), nell'ambito del quale in primo luogo si costruisce come *prior guess* un albero binomiale standard secondo Cox, Ross e Rubinstein (1979), utilizzando la volatilità implicita Black e Scholes media di due opzioni *ATM*; successivamente, utilizzando le misure di probabilità *risk neutral* lognormali assegnate ai nodi finali e retroagendo dalla data di scadenza dell'opzione, si imposta un algoritmo di minimizzazione non lineare dell'errore¹⁷ rispetto ai prezzi di mercato¹⁸ noti di opzioni europee, dal quale si determinano le probabilità neutrali al rischio stimate. L'accorgimento utilizzato in questo caso per evitare di ottenere probabilità negative è l'assunzione che tutti i percorsi che conducono allo stesso nodo finale abbiano la stessa probabilità *risk neutral*; l'effetto indesiderato è l'impossibilità di considerare la dipendenza dal tempo della volatilità.

Il terzo approccio, proposto in Derman e Kani (1994), presenta un algoritmo per un albero binomiale implicito *risk neutral*, in grado di incorporare sia l'effetto *smile* che la struttura a termine della volatilità implicita. A differenza di Dupire (1994), il minor numero di gradi di libertà non consente di specificare a priori la posizione dei nodi.

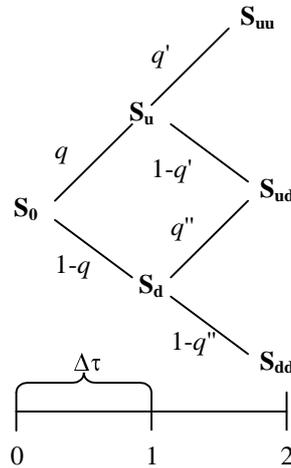
¹⁶ Per le caratteristiche delle opzioni sull'indice *S&P500* rilevanti per il *pricing* si veda Rubinstein (1994:772) e Ait-Sahalia e Lo (1998:16).

¹⁷ La sensitività della distribuzione di probabilità ottenuta alla tecnica di ottimizzazione utilizzata non si dimostra essere rilevante, come si illustra in Jackwerth e Rubinstein (1996).

¹⁸ In Rubinstein (1994) si impone che il prezzo ottenuto dall'albero binomiale implicito ottimizzato sia esattamente compreso tra i valori di mercato di *bid* e *ask*; questo aspetto può determinare problemi di *overfitting* oppure prezzi non più *arbitrage free*. Un miglioramento dell'approccio in questo senso si ottiene in Jackwerth e Rubinstein (1996), che impongono nell'ottimizzazione una funzione di penalità per le deviazioni dal prezzo medio, senza peraltro forzare i valori ottenuti esattamente all'interno del *range* denaro-lettera.

In quanto segue si esporrà il modello di Derman e Kani (1994), con i correttivi suggeriti in uno studio successivo da Barle e Cakici (1995). Pur trattandosi del modello matematicamente più semplice dei tre elencati, la sua descrizione esauriente occuperebbe molte pagine. Ci si limita, pertanto, ad illustrarne la logica e l'applicazione con un semplice esempio.

Il punto di partenza è costituito dall'albero binomiale standard¹⁹, che si rappresenta graficamente nella versione a tre periodi:



Il prezzo del sottostante al tempo iniziale è pari a S_0 , il prezzo in caso di rialzo (ribasso) corrisponde ad S_u (S_d), la probabilità di rialzo (ribasso) neutrale al rischio viene indicata con q ($1-q$), ed ogni *step* è separato da un intervallo temporale pari a $\Delta\tau$.

Si rispettano le identità fondamentali dell'albero binomiale che garantiscono un ambiente di riferimento *risk neutral*, ovvero:

- Per i prezzi in corrispondenza del primo intervallo:

$$qS_u + (1-q)S_d = S_0 e^{r\Delta\tau}$$

- Per l'equilibrio tra S_u e i prezzi che da esso discendono:

$$q'S_{uu} + (1-q')S_{ud} = S_u e^{r\Delta\tau}$$

- Per il legame tra S_d e i prezzi che possono seguire allo *step* successivo:

$$q''S_{ud} + (1-q'')S_{dd} = S_d e^{r\Delta\tau}$$

Si tratta a questo punto di introdurre l'elemento innovativo che contraddistingue i modelli ad albero binomiale implicito rispetto alla versione standard, ovvero la caratteristica di volatilità locale variabile. Si deve disporre innanzitutto di un insieme di prezzi di mercato di opzioni differenziate per scadenza e prezzo di esercizio, dai quali estrapolare diversi livelli di volatilità implicita. Essi verranno impiegati per ricavare, nodo dopo nodo, una distribuzione del prezzo del sottostante, che sia per l'appunto coerente con quanto il mercato sconta in merito alle volatilità future. Per calibrare l'albero implicito sulle quotazioni di mercato, è necessario differenziare il livello di volatilità da impiegare per calcolare ogni prezzo in relazione al nodo, allo *step* dal quale deriva e al tempo.

¹⁹ Per un approfondimento dei meccanismi di costruzione e delle proprietà del modello binomiale standard si rinvia ad Erzegovesi (1999a).

L'accorgimento che permette di sfruttare i dati nel senso indicato consiste nell'uguagliare il prezzo di mercato dell'opzione, disponibile al tempo iniziale, al valore teorico della stessa ricavato dall'albero implicito attraverso il metodo probabilistico, ovvero tramite la definizione del valore teorico dell'opzione come il valore atteso del *payoff* a scadenza attualizzato ad una data precedente a piacere. Il valore stimato viene dunque qui calcolato come l'attualizzazione alla data iniziale del *payoff* a scadenza, il quale è determinato sulla distribuzione rappresentata dall'albero implicito che si sta generando. Perciò la tecnica suggerita è tesa ad assicurare che i prezzi del sottostante, che insieme allo *strike* determinano per definizione il *payoff*, siano calcolati in base al livello di volatilità implicita nel prezzo di mercato dell'opzione utilizzata. In sostanza si tratta di eguagliare il valore teorico di ogni opzione, calcolato sull'albero, al relativo prezzo osservato.

Un accorgimento particolare introdotto nel modello di Derman e Kani (1994) da Barle e Cakici (1995) è quello di considerare come *strike price* dell'opzione in un determinato nodo, il prezzo *forward* del sottostante nel nodo precedente, accorgimento già introdotto nell'esempio 4 della prima sezione; tale scelta si spiega come tentativo di evitare che le probabilità *risk neutral* associate a ciascun prezzo possano assumere valori non compresi tra 0 e 1²⁰. Inoltre lo stesso accorgimento consente di calcolare il valore a scadenza dell'opzione in funzione dell'unico scenario che rende l'opzione *ITM*²¹.

A questo proposito si rammenti che, indicato con S_{kj} ²² il prezzo che si sta ricercando in corrispondenza del generico nodo (k,j) , il *payoff* di un'opzione che scade all'intervallo j viene calcolato in questo nodo come:

- $\max(S_{kj}-K,0)$ qualora si tratti di una *call*
- $\max(K-S_{kj},0)$ nel caso di una *put*

Affinché il *payoff* possa essere determinato in funzione di S_{kj} e venga così eliminato l'operatore di massimizzazione, si dovrà scegliere di volta in volta l'opzione che garantisca un *payoff* non nullo in corrispondenza del nodo, il cui prezzo si intende stimare ovvero S_{kj} . In termini più generici, la scelta deve ricadere su quell'opzione che scade sicuramente *ITM* per un prezzo pari a quello che si vuole determinare. In caso contrario il *payoff* nel nodo in questione risulterebbe nullo e quindi nel vincolo non comparirebbe più la variabile che si intende stimare.

Il vincolo finale da imporre per la definizione di ciascun prezzo sull'albero implicito consiste allora nel far coincidere il prezzo di mercato dell'opzione considerata con il valore teorico della stessa, il quale si ricava come valore atteso del *payoff* a scadenza attualizzato alla data iniziale²³.

Esempio 22. Si vuole costruire un albero implicito a due periodi utilizzando i dati seguenti:

²⁰ Si rinvia ancora ad Erzegovesi (1999a:13) per la dimostrazione che l'utilizzo di uno *strike price* pari al prezzo *forward* e compreso tra il prezzo in caso di ribasso ed in caso di rialzo, consente di ottenere probabilità *risk neutral* non degeneri.

²¹ Come già si evidenziava nell'esempio 4 della prima sezione questo espediente permette di omettere, nelle formule nelle quali compare definizione del *payoff*, l'operatore $\max(\dots)$ di difficile trattabilità e di esprimere dunque il valore del *payoff* in modo univoco.

²² L'indice j individua l'intervallo temporale e dunque descrive lo sviluppo orizzontale dell'albero binomiale; l'indice k individua livelli di prezzo dal più elevato al più basso e quindi specifica la dimensione verticale. Nei grafici rappresentati in questo paragrafo si è impiegata una notazione meno generale per la sua maggiore leggibilità.

²³ Quest'ultima puntualizzazione consente di evidenziare la diversità di questo nuovo approccio rispetto a quello tipico degli alberi binomiali standard. E' chiaro ora che qui è abbandonata l'impostazione secondo la quale, individuati i valori dei parametri strutturali sulla base di un preciso livello di volatilità locale, tutti i prezzi si ricavano semplicemente in funzione del numero di rialzi e ribassi che caratterizzano i percorsi alternativi che conducono ai singoli nodi. Se ciò è valido nell'ambito degli alberi standard, nel modello in questione tale logica non è applicabile.

$$S_0 = 100$$

$$\Delta\tau = 1 \text{ anno}$$

tasso annuo continuo: 3%

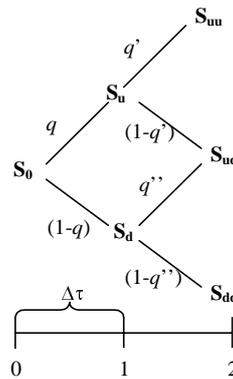
volatilità annua implicita in un'opzione *call ATM*: 10% costante per ogni scadenza

funzione della volatilità implicita: $10\% \pm 0,5 (\pm(-\Delta K))/100$

La funzione matematica che descrive lo *smile* definisce un livello di volatilità implicita annua che aumenta (diminuisce) linearmente di mezzo punto percentuale per ogni variazione negativa (positiva) di dieci punti nello *strike* rispetto al prezzo d'esercizio *ATM*²⁴. Avremmo potuto usare altre interpolanti: nelle applicazioni reali sono da preferire quelle che spiegano esattamente le volatilità implicite osservate per i contratti più liquidi.

Tra i dati a disposizione non compaiono direttamente i prezzi di mercato delle opzioni necessarie per costruire l'albero implicito. Per determinare i prezzi in questione si dovrà valutare ciascuna opzione mediante la formula di Black e Scholes, inserendo l'appropriato valore della volatilità ricavato dalla funzione dello *smile* sopra indicata.

L'insieme di questi prezzi costituisce il *set* di variabili *input*, le quali possono essere meglio individuate in riferimento alla rappresentazione grafica dell'albero che si vuole costruire:



Utilizzando la notazione generica del grafico, per determinare le incognite al primo *step* è necessario disporre di:

- prezzo di un'opzione *call* o *put* con scadenza tra un periodo e prezzo di esercizio uguale al *forward* ad un anno dello *spot* iniziale. Il ricorso ad un'unica quotazione di mercato è sufficiente per stimare i prezzi al primo *step* e la rispettiva probabilità *risk neutral* di rialzo e ribasso.

Sono necessari maggiori dati di *input* per la definizione delle incognite al secondo *step*; si deve disporre di:

- prezzo di un'opzione *call* con scadenza tra due periodi e *strike* dato dal *forward* a un anno di S_u ; questo prezzo permette di calcolare S_{uu} in funzione del livello di volatilità implicita ricavato dallo *smile* e perciò coerente con quanto previsto dal mercato per le specificate condizioni di prezzo e tempo.
- prezzo di un'opzione *put* con scadenza tra due *step* e *strike* pari al *forward* a un anno di S_d ; con questo dato di mercato si determina S_{dd} impiegando un valore di volatilità implicita in linea con quanto previsto dal mercato.

²⁴ La funzione della volatilità implicita è dunque una retta inclinata negativamente rispetto al livello dello *strike*; tale scelta non rispecchia in termini precisi la realtà. Il maggior difetto è ravvisabile nell'indipendenza dalla variabile tempo, dal momento che il modello è concepito per generare alberi impliciti coerenti non solo con lo *smile*, ma anche con la struttura a termine della volatilità. In questo contesto le imprecisioni citate vanno peraltro accettate al fine di utilizzare dei dati di *input* semplici da trattare e facilitare in tal modo la comprensione dell'esempio proposto.

Nel caso specifico in esame, questi dati di *input* si ricavano, nodo dopo nodo, dalla funzione che descrive lo *smile*. Per la definizione dei prezzi al primo *step* è stato fornito, come suggerito dai dati di *input*, il valore di mercato di un'opzione *call* calcolato per un livello di volatilità pari al 10% e *strike* pari al prezzo *forward* ad un anno di S_0 , ovvero:

$$S_0 e^{r\Delta\tau} = 100e^{0,03} = 103,0455$$

Il valore di mercato di un'opzione *call* con queste caratteristiche, ottenuto impiegando il modello di Black e Scholes, è pari a 4,9958.

A questo punto le prime incognite da determinare sono S_u ed S_d ; la terza incognita è data dalla probabilità *risk neutral*. Per ottenere le soluzioni opportune è necessario dunque impostare tre equazioni; la prima di esse si definisce facilmente per via del vincolo *risk neutral* che eguaglia il valore atteso al prezzo *forward*. La seconda equazione si può ottenere confrontando il valore teorico con il valore di mercato dell'opzione che è stato in precedenza determinato in 4,9958. L'ultimo vincolo corrisponde alla centratura dell'albero sul prezzo *forward*, come già era avvenuto nell'esempio 4: il rialzo (ribasso) che segue il ribasso (rialzo) non ha l'effetto di riportare il prezzo del sottostante sul valore di partenza *spot*, bensì sul valore di partenza *forward* a due periodi. E' possibile dunque impostare il sistema che, in notazione generica, risulta essere:

$$\begin{cases} qS_u + (1-q)S_d = S_0 e^{r\Delta\tau} \\ C_0 = e^{-r\Delta\tau} q(S_u - K) \\ S_u \times S_d = S_0^2 e^{2r\Delta\tau} = F^2 \end{cases}$$

Resta così da definire il vincolo di centratura sul prezzo *forward* a due anni dello *spot* iniziale:

$$S_0^2 e^{2r\Delta\tau} = 100^2 e^{0,06} = 10618,37$$

Si possono allora sostituire i simboli con i valori noti, per ottenere:

$$\begin{cases} qS_u + (1-q)S_d = 103,0455 \\ 4,9958 = e^{-0,03} q(S_u - 103,0455) \\ S_u \times S_d = 10618,37 \end{cases}$$

Dopo alcuni passaggi matematici, le soluzioni alle tre incognite che si ricavano sono:

$$\begin{aligned} S_u &= 113,8828 \\ S_d &= 93,2394 \\ q &= \frac{e^{0,03} - 0,932394}{1,138828 - 0,932394} = 0,475021 \end{aligned}$$

Si deve sottolineare che questi valori sono stati conseguiti in funzione del livello di volatilità implicita di un'opzione che scade al termine del primo intervallo e che è contraddistinta da un prezzo di esercizio pari al *forward* a un anno dello *spot* iniziale. Perciò si può concludere che essi sono coerenti con i prezzi di mercato di opzioni *call* e *put* aventi le caratteristiche appena descritte.

Passando al secondo *step*, si può calcolare innanzitutto il prezzo associato al nodo centrale, per il quale non si necessita di dati supplementari, dal momento che esso è determinato come il prezzo di un *forward* con scadenza $2\Delta\tau$:

$$S_{ud} = S_0 e^{2r\Delta\tau} = 100e^{0,06} = 106,1837$$

Per quanto concerne la stima dei prezzi S_{uu} e S_{dd} è obbligatorio il ricorso a due opzioni distinte e perciò sono stati calcolati rispettivamente i valori di mercato di una *call* e di una *put* aventi scadenza a due anni e prezzo di esercizio pari ai prezzi *forward* a un anno di S_u e S_d secondo l'ordine proposto.

Per il calcolo di S_{uu} , si deve ricorrere al prezzo di una *call* con *strike price* pari dunque a:

$$K = S_u e^{r\Delta\tau} = 113,8828 \times e^{0,03} = 117,3511$$

Questo dato è essenziale per poter derivare il livello di volatilità da impiegare per la definizione di S_u . La misura della volatilità ricercata, ottenuta dalla funzione che descrive lo *smile*, dipende inoltre dallo *strike* dell'opzione *ATM* utilizzato al passo precedente, pari per definizione a 103,0455 (ovvero $S_0 \exp(r\Delta\tau)$).

Applicando dunque la formula ai dati ottenuti si ha:

$$\sigma_{\text{imp}} = 10 - 0,5 \times \frac{117,3511 - 103,0455}{10} = 9,2847\%$$

Inserendo un livello di volatilità pari a quello appena calcolato ed una scadenza alla fine del secondo periodo nella formula di Black e Scholes, si ottiene la quotazione di mercato dell'opzione *call* pari a 2,2480.

Proseguendo nell'intento di derivare S_{uu} , non resta che impostare il sistema composto dalle equazioni che riassumono i due vincoli enunciati in precedenza nella trattazione teorica. In particolare esso è dato da:

$$\begin{cases} S_u e^{r\Delta\tau} = q' S_{uu} + (1 - q') S_{ud} \\ C_0(T = 2, K = S_u e^{r\Delta\tau}) = e^{-2r\Delta\tau} [qq'(S_{uu} - K)] \end{cases}$$

Essendo già noti q , C_0 , K e S_{ud} , le incognite sono soltanto due ovvero q' e S_{uu} . Si può quindi riformulare il sistema sostituendo i termini noti con i rispettivi valori:

$$\begin{cases} 113,8828 \times e^{0,03} = q' S_{uu} + (1 - q') \times 106,1837 \\ 2,2480 = e^{-0,06} [0,475021 \times q'(S_{uu} - 117,3511)] \end{cases}$$

L'esecuzione di semplici passaggi matematici dà luogo alle seguenti soluzioni:

$$\begin{aligned} S_{uu} &= 126,4874 \\ q' &= 0,550017 \end{aligned}$$

Allo stesso modo si deriva S_{dd} in funzione però della volatilità implicita di un'opzione *put* con scadenza a due anni e *strike* pari al *forward* a un anno di S_d ovvero:

$$K = S_d e^{r\Delta\tau} = 93,2394 \times e^{0,03} = 96,0789$$

La volatilità implicita associata ad un'opzione con questo *strike price* è pari a:

$$\sigma_{\text{imp}} = 10 + 0,5 \frac{103,0455 - 96,0789}{10} = 10,3483\%$$

A questo livello di volatilità corrisponde un premio per l'opzione *put*, calcolato ancora una volta attraverso la formula di Black e Scholes, pari a 2,5382.

L'ultimo passaggio consiste nell'impostazione del sistema a due equazioni in due incognite, q'' e S_{dd} :

$$\begin{cases} S_d e^{r\Delta\tau} = (1 - q'') S_{dd} + q'' S_{du} \\ P_0(T = 2, K = S_d e^{r\Delta\tau}) = e^{-2r\Delta\tau} [(1 - q')(1 - q'')(K - S_{dd})] \end{cases}$$

La pseudoprobabilità $(1 - q)$ è stata determinata nei passaggi relativi al primo *step* e risulta essere pari a:

$$(1 - q) = 1 - 0,475021 = 0,52479$$

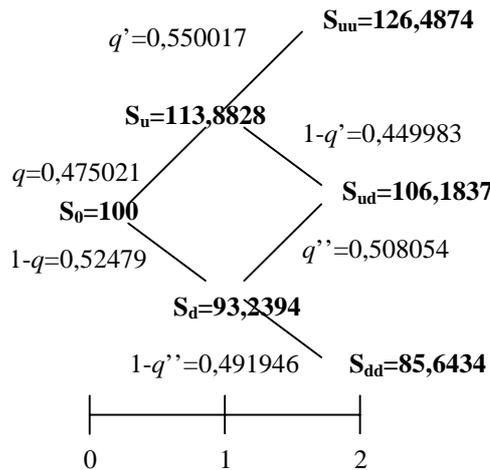
Sostituendo nel sistema ai simboli i valori appropriati che sono stati ricavati nei passi precedenti si ottiene

$$\begin{cases} 93,2394 \times e^{0,03} = (1-q'')S_{dd} + q'' \times 106,1837 \\ 2,5382 = e^{-0,06} [0,52479 \times (1-q'')(96,0789 - S_{dd})] \end{cases}$$

Il sistema così formulato porta alle seguenti soluzioni:

$$\begin{aligned} S_{dd} &= 85,6434 \\ (1-q'') &= 0,491946 \end{aligned}$$

Riepilogando i risultati ottenuti, l'albero a volatilità implicita costruito si rappresenta come:



Dalla descrizione dei singoli passaggi compiuti per la sua costruzione risulta chiaro che si tratta di un albero che rappresenta la distribuzione del prezzo di un generico titolo, la quale riflette, per costruzione, le misure di volatilità implicite che il mercato delle opzioni associa a determinate fasce di prezzo a date future.

L'approccio descritto costituisce un contributo fondamentale nella costruzione di alberi binomiali *arbitrage free* atti a descrivere processi stocastici con volatilità variabile deterministica. L'utilizzo di questi strumenti per *hedging* e *pricing* sembra essere promettente, anche se è necessario tenere presente i problemi ricorrenti in ogni modello *data intensive*, ovvero la potenziale *overspecification* del processo *in sample* con conseguente scarsa generalizzazione per applicazioni fuori campione.

E' essenziale a questo punto tenere ben presenti i presupposti di questo approccio. Le probabilità *risk neutral* determinate saranno corrette solo per prezzi di mercato osservati correttamente, per mercati efficienti dal punto di vista informativo, per assenza di costi di transazione. Il modello ha il pregio di essere molto robusto: nessuna assunzione è prevista sulle preferenze dell'investitore, tranne la *non sazietà*; nessuna ipotesi è richiesta per il processo stocastico del sottostante, dunque il metodo è non parametrico, in quanto la distribuzione impiegata, binomiale a parametri variabili, consente di approssimare forme svariate. L'approssimazione è peraltro grezza per un numero di nodi contenuto. Riducendo la durata dello *step*, aumentano i nodi ed il profilo della distribuzione si smussa, a costo però di un appesantimento dei calcoli.

3.1.4 Misture di lognormali

L'approccio della mistura di lognormali consiste nel vincolare la funzione di densità probabilistica *risk neutral* del sottostante ad una struttura minimale, per evitare che la distribuzione derivata dai prezzi delle opzioni risulti caratterizzata da eccessiva discontinuità²⁵. Si tratta di specificare dei vincoli piuttosto generali, nell'ambito dei quali collocare un procedimento di *fitting* rispetto ai dati di mercato.

In linea teorica potrebbe essere prevista qualsiasi forma funzionale per la distribuzione finale a cui vincolare la stima della densità implicita; il problema deriva peraltro dal fatto che la funzione di probabilità può cambiare con la variazione del periodo di detenzione. La distribuzione lognormale conserva la caratteristica di stabilità rispetto alla proprietà additiva: è possibile affermare infatti che se i rendimenti giornalieri sono normalmente distribuiti, lo saranno anche rendimenti con periodicità diversa. E' dunque plausibile riferire la restrizione sulla forma funzionale della distribuzione implicita finale alla somma ponderata di due o più densità lognormali; in termini intuitivi è come se ogni rendimento istantaneo fosse "estratto" da una distribuzione "scelta" tra un numero finito di normali (solitamente due o tre). Questo metodo si presta dunque ad un'interpretazione economica intuitiva, quella di regimi alternativi multipli²⁶, che conducono a distribuzioni date dalla ponderazione delle due o tre lognormali.

L'approccio della mistura di lognormali è molto generale, in quanto imporre una forma specifica per la distribuzione finale è compatibile con diversi processi stocastici seguiti dal sottostante; al contrario imporre un processo stocastico risulterebbe coerente con una sola funzione di densità probabilistica finale. Inoltre la struttura minima che caratterizza l'andamento del sottostante nel tempo è promettente nei casi in cui esiste poca informazione a priori circa l'effettivo processo stocastico assunto dai partecipanti al mercato. In effetti l'utilizzo di una mistura di lognormali per approssimare distribuzioni caratterizzate da asimmetria ed eccesso di curtosi, che sarebbero generate da processi di prezzo *browniani* a regimi alternativi, può essere interpretato come una tecnica di *fitting* di distribuzioni osservate generate da processi diversi (ad esempio processi con volatilità stocastica o con *jump*); la flessibilità dell'approccio è dunque analoga a quella degli alberi binomiali impliciti.

In Melick e Thomas (1997) si sviluppa un metodo completo di costruzione della funzione di densità a partire dai prezzi di mercato di opzioni su *oil futures*²⁷, mediante l'approccio della mistura di lognormali; tralasciando di entrare nel dettaglio del procedimento di calcolo utilizzato per derivare limiti superiori ed inferiori per il prezzo di opzioni con facoltà di esercizio anticipato, concentriamo l'attenzione in questa sede sulla metodologia adottata per ottenere lo stimatore della funzione di densità probabilistica *risk neutral*. Il punto di partenza è costituito dalla scelta di una forma funzionale per la distribuzione finale del prezzo del sottostante alla scadenza dell'opzione; questa viene fatta derivare dalla mistura di tre lognormali:

$$g[f_0] = \pi_1 g_1[f_0] + \pi_2 g_2[f_0] + \pi_3 g_3[f_0] \quad \text{dove:}$$

²⁵ In Söderlind e Svensson (1997) si dimostra ad esempio che, applicando la metodologia proposta da Breeden e Litzenberger (1978) e approfondita nella prima sezione in modo perfettamente corrispondente a quanto previsto in termini teorici, ovvero implementando quello che è stato definito nel paragrafo 3.1.1 come "approccio degli istogrammi", si ottengono in alcuni casi valori di probabilità negativi e comunque approssimazioni piuttosto irregolari. Può dunque rivelarsi vantaggioso imporre alcune restrizioni per garantire che il risultato finale sia costituito da una distribuzione probabilistica ragionevole.

²⁶ Ad esempio in Melick e Thomas (1997) l'utilizzo di tre lognormali diverse per la distribuzione dei prezzi del petrolio corrisponde agli sviluppi possibili della guerra del Golfo del 1991.

²⁷ Si utilizzano i prezzi di *settlement* di opzioni di stile americano sul contratto *future* sul petrolio, quotate al NYMEX, nel periodo compreso tra il 02.07.1990 ed il 30.03.1991.

$$g_i[f_0] = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i f_0} \right) \exp \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(f_0) - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \right] \text{ e } \pi_i, \quad i = 1, 2, 3, \text{ costituiscono le ponderazioni}$$

delle singole densità lognormali.

Per valutare al meglio la *performance* del modello della mistura, si elabora altresì un modello *benchmark* costituito dalla formula di *pricing* standard delle opzioni, che dà origine ad una distribuzione lognormale unica. La stima dei parametri della mistura di lognormali e della normale singola deriva dalla minimizzazione della differenza tra valori teorici e di mercato effettuata sulla base di un algoritmo numerico.

I risultati ottenuti dimostrano ad esempio che, durante la crisi del Golfo la funzione di densità del modello e del *benchmark* differiscono in modo sostanziale; in particolare la mistura evidenzia la presenza di una sorta di trimodalità. I test di significatività statistica dimostrano che il modello della mistura di lognormali elaborato è in grado di spiegare gli errori del modello con singola lognormale, mentre è decisamente rifiutata l'ipotesi contraria.

Un approccio di mistura di due lognormali, caratterizzato dalla minimizzazione della distanza tra prezzi teorici e di mercato di opzioni sia *call* che *put*, viene utilizzato anche in Bahra (1997) per le opzioni su diversi sottostanti²⁸: opzioni su indici di mercato azionario, su tassi a breve, su tassi a lungo e su tassi di cambio. L'impostazione della metodologia non cambia sostanzialmente rispetto alla versione esposta dettagliatamente per Melick e Thomas (1997); gli elementi differenziali sono in primo luogo l'utilizzo di due anziché tre lognormali nella mistura e conseguentemente la stima di cinque parametri $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \pi_1)$ ed in secondo luogo qualche aggiustamento delle variabili coinvolte per tener conto delle peculiarità del sottostante. Dalle distribuzioni implicite ottenute si estrapolano le misure statistiche descrittive rilevanti, quali i momenti ed il campo di variazione interquartile; per una comprensione dell'utilità dell'approccio per scopi di politica monetaria, si analizza l'evoluzione di queste variabili nei periodi caratterizzati da notizie o dati economici rilevanti.

Un approccio molto più articolato nella costruzione analitica si ritrova in Söderlind e Svensson (1997), che impostano per il mercato *bond future* una mistura di lognormali bivariate; le due dimensioni derivano dal processo stocastico seguito dal fattore di sconto e dal prezzo del sottostante, mentre la mistura è la risultante di più distribuzioni, una per ogni stato di mercato j la cui probabilità di accadimento, o peso nella mistura, corrisponde ad α^j , vincolato a $\sum_{j=1}^n \alpha^j = 1$.

Una volta impostata l'equazione per il valore dell'opzione *call* coerente con le restrizioni sulla distribuzione finale, è possibile stimare l'insieme dei parametri impliciti tramite una procedura di minimizzazione dell'errore quadratico tra valore teorico e valore di mercato. La distribuzione *risk neutral* così ottenuta può essere utilizzata per gli usuali scopi interpretativi e previsionali.

Un'estensione dell'impostazione di Söderlind e Svensson (1997) applicata ai tassi d'interesse a breve e a lungo termine della lira²⁹ è presente in Fornari e Violi (1998); in questo caso si considerano due soli stati possibili per la distribuzione probabilistica del tasso d'interesse, corrispondenti ad alta e bassa variabilità, distinti e non osservabili:

²⁸ Per il mercato azionario Bahra (1997) utilizza le opzioni trattate al *LIFFE* sull'indice *FT-SE100*; per i tassi a breve utilizza opzioni sul contratto *future euromarco* e *short sterling* trattate al *LIFFE*; per i tassi a lungo opzioni sul contratto *future long gilt* e *bund* trattate ancora al *LIFFE*; per le opzioni su *USD/GBP*, *JPY/DEM*, *DEM/GBP*, *DEM/USD* e *JPY/USD* le quotazioni del *PHLX* per opzioni di stile europeo.

²⁹ Si esaminano le opzioni su contratti *futures* dell'euro lira a tre mesi e del BTP decennale quotate al *LIFFE* tra l'ottobre 1991 ed il gennaio 1997.

$$C(K) = e^{-r\tau} \sum_{j=1}^2 \alpha_j \left[\exp\left(\bar{b}^j + \frac{1}{2}\sigma_{bb}^j + \sigma_{db}^j\right) \Phi\left(\frac{\bar{b}^j + \sigma_{bb}^j + \sigma_{db}^j - \ln K}{\sqrt{\sigma_{bb}^j}}\right) - K \Phi\left(\frac{\bar{b}^j + \sigma_{db}^j - \ln K}{\sqrt{\sigma_{bb}^j}}\right) \right]$$

dove \bar{b}^j è la media del logaritmo del prezzo del titolo nello stato j , σ_{bb}^j è la varianza della media del prezzo del titolo nello stato j , σ_{db}^j è la covarianza tra le variazioni del logaritmo del titolo e quelle del fattore di sconto nello stato j , α_j è il peso relativo della lognormale bivariata.

Dal momento che la formulazione di Söderlind e Svensson (1997) non incorpora la dipendenza del prezzo dell'opzione dalla durata della stessa, utilizzando solo opzioni con un'unica scadenza, in Fornari e Violi (1998) si estende il modello, sfruttando l'impostazione suggerita da Jamshidian (1989), per tener conto di un processo *mean reverting* del tasso a breve che determina una struttura della volatilità a termine non lineare. Il modello così strutturato è stato stimato su campioni di opzioni che precedono e seguono di cinque giorni un evento rilevante per considerazioni di politica monetaria. In tutti i casi l'ipotesi nulla che la distribuzione di probabilità sia effettivamente una mistura di due lognormali non può essere rifiutata a nessun livello di significatività; in secondo luogo le due lognormali presentano generalmente caratteristiche molto diverse tra loro: una di esse presenta una media di molto inferiore rispetto all'altra, contribuisce in misura marginale alla distribuzione complessiva, ma allo stesso tempo ha una deviazione standard frequentemente superiore, cosicché è volta principalmente a determinare la curtosi della distribuzione ottenuta come mistura.

Fornari e Violi (1998) ottengono risultati molto simili utilizzando al posto della funzione di volatilità di Jamshidian (1989), una funzione di volatilità deterministica corrispondente al "Model 1" di Dumas, Fleming e Whaley (1998), ovvero una funzione quadratica dello *strike price*; l'intento in questo caso è quello di tenere in maggiore considerazione l'effetto *volatility smile*, approfondito nel paragrafo 2.5.1, rispetto all'effetto della struttura a termine della volatilità.

L'approccio della mistura di lognormali viene utilizzato anche nel mercato dei cambi *OTC* da Campa, Chang e Reider (1998)³⁰; l'impostazione della metodologia non cambia sostanzialmente rispetto alla versione esposta per Melick e Thomas (1997), se non per l'utilizzo di due anziché tre lognormali. L'aspetto più rilevante di questo studio è l'apparente mancanza di significato economico percepibile nelle due lognormali determinate; infatti i parametri e le probabilità associate ad ogni distribuzione fluttuano ampiamente di settimana in settimana, senza nessuna motivazione determinante. Queste risultanze potrebbero derivare da un *set* di dati disponibili piuttosto ridotto; la disponibilità di sole cinque osservazioni può far sì che piccole variazioni nei prezzi di mercato delle opzioni determinino forti oscillazioni dei parametri delle distribuzioni.

In conclusione l'aspetto più promettente dell'approccio della mistura di lognormali è relativo proprio alla flessibilità della forma della distribuzione finale, che la rende compatibile con un'ampia gamma di conformazioni della densità probabilistica *risk neutral*. Tale flessibilità ha una conseguenza positiva diretta sul comportamento nelle code della distribuzione, che risulta molto più regolare: la probabilità decresce in modo monotono e sempre in misura sufficiente ad evitare valori anomali.

³⁰ Per il mercato dei cambi ci si può riferire altresì allo studio di McCauley e Melick (1996a) nell'ambito del quale, a partire dalla volatilità *ATM forward* e dai valori delle combinazioni *risk reversal* e *strangle* quotate sul mercato *OTC*, si ottiene dapprima una funzione della volatilità rispetto al livello di *moneyness*. Successivamente la traduzione dei livelli di volatilità in prezzi delle opzioni permette di applicare l'approccio esemplificato in Melick e Thomas (1997) per determinare la distribuzione di probabilità *risk neutral*.

Tra gli aspetti problematici dell'approccio della mistura vi è certamente quello di non affermare nulla circa il processo seguito dall'attività finanziaria sottostante prima della scadenza dell'opzione; questo determina l'impossibilità di costruire, sulla base del modello, strategie di *hedging* dinamico o strategie di replica.

3.1.5 Metodi non parametrici avanzati

La distribuzione di probabilità del sottostante ottenuta dai prezzi delle opzioni è strettamente legata alle assunzioni parametriche sul processo di prezzo ipotizzate nel modello; se tali assunzioni non sono sufficientemente realistiche, in quanto ad esempio la dinamica seguita dal sottostante evidenzia elementi di *jump*, la densità risultante non rifletterà prezzi corretti. Uno stimatore della *State Price Density*, che non dipenda da assunzioni parametriche specifiche, può consentire di ottenere distribuzioni di prezzo compatibili con tali errori di specificazione. In termini empirici si tratta di determinare una funzione di *pricing* delle opzioni a partire dai prezzi di mercato e con metodi non parametrici; sulla base delle metodologie proposte nel paragrafo 2.2, si differenzierà due volte la funzione ottenuta rispetto allo *strike price*, ottenendo, date apposite condizioni di regolarità, una distribuzione di probabilità *risk neutral* proporzionale alla *State Price Density*.

L'aspetto che differenzia i diversi approcci è il metodo adottato per ottenere una funzione di *pricing* in modo non parametrico a partire da una serie di prezzi di mercato delle opzioni e loro caratteristiche relative, ovvero *strike price*, scadenza, tasso *risk free*, eventuale tasso di dividendo e quotazione del sottostante. Nell'ambito di questo paragrafo si analizzerà uno dei contributi più significativi dell'approccio non parametrico, basato su tecniche statistiche riconducibili ad un'evoluzione dell'analisi di regressione; possono essere considerate metodologie affini il filone degli alberi binomiali impliciti, presi in esame nel paragrafo 3.1.3, e l'approccio delle reti neurali, analizzato in Hutchinson, Lo e Poggio (1994), nonostante quest'ultimo non venga direttamente impiegato per l'estrazione di una distribuzione implicita.

In Aït-Sahalia e Lo (1998) la tecnica statistica impiegata per ottenere il valore atteso della formula di valutazione condizionato al *set* di valori di mercato è la *nonparametric kernel regression*³¹; questa metodologia ha il vantaggio di richiedere poche assunzioni iniziali, tranne una certa regolarità dei dati usati nella stima, anche se costituisce un procedimento *data intensive*. Ma l'elemento più promettente consiste nell'elevato grado di *smoothness* della funzione di *pricing* ottenuta; tale caratteristica consente di derivare valori di *output* attendibili, a partire da osservazioni contigue, anche quando non sono disponibili specifici dati di *input* per l'intero intervallo. In realtà su questo aspetto si gioca molta della validità dell'approccio, in quanto deve essere stabilito con attenzione il significato di contiguità: l'intervallo nell'ambito del quale impostare la media locale deve comunque continuare a riflettere gli elementi di non linearità, e dunque non deve essere troppo ampio, senza peraltro incorporare *noise*, e quindi non deve risultare troppo ristretto.

Esemplifichiamo in termini semplici questo concetto. Ipotizziamo di voler stimare la relazione tra la variabile H_i ed il vettore di variabili Z_i che soddisfi la seguente equazione non lineare:

$$H_i = H(Z_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

dove $H(\cdot)$ è una funzione non lineare non nota ed ε_i corrisponde a *white noise*. Supponiamo di stimare $H(\cdot)$ in uno specifico punto $Z_{i_0} = z_0$ e ipotizziamo, per questa specifica osservazione di

³¹ La complessità econometrica del procedimento di stima non parametrica ci impone di mantenere un linguaggio piuttosto generico; maggiori dettagli si ritroveranno peraltro nelle esemplificazioni proposte, che riprendono quanto espresso in Aït-Sahalia e Lo (1998). Per ulteriori approfondimenti si rinvia comunque a manuali specialistici in argomento, come ad esempio Wand e Jones (1995).

\mathbf{Z}_i , di poter ottenere ripetute osservazioni della variabile H_{i_0} , diciamo $H_{i_0}^{(1)}, H_{i_0}^{(2)}, \dots, H_{i_0}^{(q)}$.

In questo caso lo stimatore più appropriato della funzione $H(\cdot)$ nel punto \mathbf{z}_0 corrisponde a:

$$\hat{H}(\mathbf{z}_0) = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q H_{i_0}^{(j)} = H(\mathbf{z}_0) + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \varepsilon_{i_0}^{(j)} \quad \text{dove} \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \varepsilon_{i_0}^{(j)} = 0$$

Naturalmente non è possibile immaginare di avere le osservazioni ripetute dell'esempio appena enunciato; tuttavia, assumendo la regolarità della funzione $H(\cdot)$, per l'osservazione della serie storica delle osservazioni \mathbf{Z}_i vicino al valore di \mathbf{z}_0 i corrispondenti valori di H_i dovrebbero essere vicini ad $H(\mathbf{z}_0)$. In altre parole in un ridotto intorno di \mathbf{z}_0 , $H(\mathbf{z}_0)$ sarà all'incirca costante; appare intuitivo a questo punto immaginare che la media delle osservazioni venga ponderata in base alla distanza del vettore \mathbf{Z}_i dal punto \mathbf{z}_0 . La scelta della funzione di ponderazione, spesso rappresentata da una densità di probabilità, determina l'intensità della media locale.

I dati contigui utilizzati nell'elaborazione dello stimatore sono resi più numerosi dall'inclusione, oltre alle rilevazioni *cross section*, di tutta la serie temporale dei prezzi delle opzioni a disposizione; l'assunzione forte su cui è fondato questo procedimento è relativa alla stazionarietà della distribuzione nell'arco temporale considerato, per cui la funzione della volatilità implicita è ipotizzata stabile nel tempo.

Il modello di regressione *kernel* impostato in Aït-Sahalia e Lo (1998) è specificato in primo luogo da un vettore di cinque variabili³² esplicative \mathbf{Z}_i ,

$$\mathbf{Z}_i \equiv [S_{t_i}, K_i, \tau_i, r_{t_i, \tau_i}, \delta_{t_i, \tau_i}] \quad \forall C_i, i=1, \dots, n$$

cosicché ogni prezzo di mercato dell'opzione C_i è posto in relazione alle rispettive caratteristiche; in secondo luogo dall'ampiezza dell'intervallo tra i dati \mathbf{Z}_i , regolabile secondo i criteri esplicitati in precedenza.

La densità di probabilità $K(\mathbf{Z}-\mathbf{Z}_i)$, dove K è denominato *kernel* ed è una funzione del vettore \mathbf{Z} , ha un determinato *spread* attorno al punto \mathbf{Z}_i ; è possibile cambiare questo *spread* con l'utilizzo di un parametro h , denominato *bandwidth*, per formare una nuova funzione di densità:

$$(1/h)K((\mathbf{Z}-\mathbf{Z}_i)/h)$$

Uno stimatore del valore atteso di H condizionato a \mathbf{Z} è dato dalla seguente espressione, denominata *Nadaraya-Watson kernel estimator*, nell'ambito della quale h tende a zero con l'incremento della dimensione n del campione:

$$\hat{H}(\mathbf{Z}) = E[H|\mathbf{Z}] = \frac{\sum_{i=1}^n K((\mathbf{Z}-\mathbf{Z}_i)/h)H_i}{\sum_{i=1}^n K((\mathbf{Z}-\mathbf{Z}_i)/h)}$$

Intuitivamente lo stimatore del valore atteso condizionato al punto \mathbf{Z} , ovvero il prezzo di un'opzione con caratteristiche descritte dal vettore \mathbf{Z} , è dato dalla media ponderata dei prezzi osservati H_i nell'ambito della quale si dà più enfasi alle opzioni le cui caratteristiche \mathbf{Z}_i sono più simili alle caratteristiche \mathbf{Z} dell'opzione da valutare.

In realtà l'accuratezza della regressione risente negativamente dell'elevato numero di *regressors* utilizzato; per ridurre le dimensioni del problema, mantenendo allo stesso tempo la natura non parametrica dell'approccio, si utilizza con buoni risultati un approccio che si basa sulla formula

³² Le cinque variabili esplicative sono nell'ordine il prezzo dell'attività finanziaria sottostante, il prezzo d'esercizio dell'opzione, il tempo a scadenza dell'opzione, il tasso d'interesse privo di rischio ed il tasso di dividendo continuo.

di *pricing* di Black e Scholes, nell'ambito della quale però il parametro della volatilità implicita è una funzione non parametrica:

$$C(S_t, K, \tau, r_{t,\tau}, \delta_{t,\tau}) = C_{BS}(F_{t,\tau}, K, \tau, r_{t,\tau}; \sigma(F_{t,\tau}, K, \tau))$$

In questo modello, definito semiparametrico³³, si semplifica innanzitutto il problema per quanto attiene il tasso di dividendo utilizzando la variabile esplicativa prezzo del *future* anziché prezzo dell'indice *spot*; in secondo luogo c'è bisogno di stimare solamente la regressione di σ su di un sottoinsieme del vettore delle variabili esplicative $\tilde{\mathbf{Z}} \equiv [F, K, \tau]$. Lo stimatore della *State Price Density* si ottiene dunque con le appropriate derivate parziali della funzione di *pricing* così determinata; in termini formali:

$$\hat{f}_t^*(S_T) = e^{r_{t,\tau}\tau} \left[\frac{\partial^2 \hat{C}_{BS}(F_{t,\tau}, K, \tau, r_{t,\tau}; \sigma(F_{t,\tau}, K, \tau))}{\partial K^2} \right]_{K=S_T}$$

La complessità di costruzione dello stimatore semiparametrico determina la necessità di verificarne l'attendibilità innanzitutto nell'ambito di un contesto del tutto teorico; Aït-Sahalia e Lo (1998) ne analizzano dunque i risultati rispetto ad un *benchmark* costituito da prezzi di opzioni esattamente pari al valore teorico del modello di Black e Scholes (1973). In termini specifici si sviluppano 5.000 simulazioni Monte Carlo della serie di quotazioni giornaliere generate da un processo stocastico di moto geometrico *browniano*, che sono utilizzate per determinare i prezzi delle opzioni, create nei casi e con le caratteristiche delle convenzioni del *CBOE*, le quali quotano sul mercato esattamente il valore teorico più un piccolo termine di *white noise*. Lo stimatore semiparametrico applicato ai prezzi di queste opzioni artificiali è in grado di generare quotazioni e la rispettiva funzione di densità del sottostante in tutti i casi con un errore inferiore all'uno per cento rispetto ai corrispondenti valori teorici.

Considerando dunque l'attendibilità della formula di *pricing* non parametrica, è possibile esaminare la rilevanza empirica attraverso un'applicazione relativa alla valutazione di opzioni sull'indice *S&P500*³⁴. I risultati in Aït-Sahalia e Lo (1998) relativi allo stimatore *kernel* della volatilità implicita $\hat{\sigma}(F_{t,\tau}, K, \tau)$ evidenziano un rilevante effetto *smile*, caratterizzato da una consistente asimmetria, coerente con gli studi presentati nel paragrafo 2.5.1; la forma della curva della volatilità implicita diventa progressivamente più piatta con l'incremento della scadenza dell'opzione. Anche le differenze tra la densità di probabilità ottenuta in modo semiparametrico e la distribuzione *lognormale* prevista dal modello classico sono rilevanti: nonostante valore atteso e deviazione standard siano comparabili, le due distribuzioni differiscono notevolmente per asimmetria e curtosi. In termini specifici, per tutte quattro le scadenze la funzione stimata presenta *skewness* negativa e leptocurtosi, la cui entità cresce con la scadenza dell'opzione. La verifica statistica dell'ipotesi che le distribuzioni di probabilità del sottostante ottenute in modo parametrico e non parametrico costituiscano in realtà la stessa funzione di densità è decisamente rifiutata in termini statisticamente significativi.

Le risultanze delle verifiche empiriche non fanno dunque che confermare quanto era stato dimostrato anche dagli approcci considerati nei paragrafi precedenti relativamente alle

³³ Si tratta di una versione molto simile al promettente approccio "ad hoc" sviluppato in Dumas, Fleming e Whaley (1998) che sarà preso in considerazione nel paragrafo 3.1.6.

³⁴ I dati utilizzati da Aït-Sahalia e Lo (1998) sono ottenuti dal *CBOE* per il periodo compreso tra il 4 gennaio 1993 e il 31 dicembre 1993 e corrispondono ad un campione *filtrato* di 14.431 osservazioni. In realtà l'utilizzo di dati di opzioni con diversa scadenza richiede l'ipotesi di stazionarietà della distribuzione del sottostante, ovvero l'ipotesi che tutti i prezzi osservati in un determinato periodo siano in effetti osservazioni *noisy* della stessa distribuzione.

caratteristiche delle distribuzioni di probabilità neutrali al rischio sul mercato azionario. L'aspetto determinante dell'approccio non parametrico è peraltro quello di assumere una densità probabilistica funzione stabile del vettore \mathbf{Z} delle variabili esplicative; tale presupposto è verificato dal confronto statisticamente significativo di due densità stimate su due periodi diversi. Il secondo aspetto qualificante deriva dal precedente: se la funzione è stabile nel tempo, dovrebbe fornire stime *out of sample* caratterizzate da minori errori di previsione rispetto ad altri modelli. Il confronto con un modello di albero binomiale implicito Jackwerth e Rubinstein (1996), con un modello basato una rete neurale Hutchinson, Lo e Poggio (1994) e con il modello di Black e Scholes (1973) conferma le attese; per previsioni su orizzonti temporali brevi l'evoluzione del processo di *mean reversion* della funzione della volatilità implicita sul suo *pattern* medio è sufficientemente lenta da rendere vantaggioso l'utilizzo di approcci più centrati sui dati recenti, come ad esempio gli alberi binomiali. Tuttavia l'effetto *mean reversion* è comunque in grado di far sì che la stima di una funzione stabile nel tempo, come nel caso dello stimatore non parametrico, effettui previsioni migliori su orizzonti più lunghi. Il terzo aspetto importante è relativo alla natura della regressione non parametrica, che implica un numero rilevante di variabili di regressione, accanto alla necessità di derivare due volte la funzione ottenuta; questo rende la stima della funzione di densità implicita particolarmente *data intensive*. Le varie assunzioni che si possono imporre successivamente per ridurre la dimensione del problema sono in molti casi quelle ipotesi che si volevano evitare di utilizzare impiegando lo stimatore non parametrico. Rimane in ogni caso il fatto che l'implementazione di un approccio non parametrico necessita di un consistente numero di quotazioni per *strike price* e per scadenza.

3.1.6 Modelli a confronto

Nell'ambito di questo paragrafo si vogliono confrontare gli approcci all'estrazione della distribuzione implicita presi in esame fino a questo punto; in altre parole si vogliono isolare alcune caratteristiche peculiari di ogni modello per consentire scelte appropriate e giudizi attendibili.

Innanzitutto è possibile affermare che tutte le metodologie proposte fino ad ora consentono di interpretare in modo convergente la situazione di mercato; in Campa, Chang e Reider (1998) ad esempio si dimostra come l'utilizzo di tre dei metodi descritti poco sopra, ovvero albero binomiale implicito, mistura di lognormali ed interpolazione polinomiale della funzione di volatilità, porti ad ottenere distribuzioni implicite *risk neutral* molto simili; in tutti i casi vengono riflesse le informazioni addizionali presenti nel *volatility smile* e si rilevano dunque le deviazioni tipiche dal *benchmark* lognormale. In realtà l'approccio prescelto in Campa, Chang e Reider (1998) per l'analisi del fenomeno oggetto di studio, è l'albero binomiale implicito; tale scelta viene giustificata con la volontà di evitare di imporre una struttura parametrica eccessivamente rigida alla densità risultante, incorporando allo stesso tempo le caratteristiche peculiari dei dati di mercato.

Un secondo aspetto, che può discriminare la scelta di una metodologia rispetto ad un'altra, si riferisce alla disponibilità di dati per lo specifico mercato oggetto di studio, oppure, visto dall'angolazione opposta, il grado di intensità di dati richiesto dallo specifico approccio; ad esempio l'utilizzo di opzioni *OTC* sul mercato dei cambi, con la conseguente disponibilità di pochi livelli di *strike price*³⁵, limita fortemente la precisione dei vari metodi proposti per determinare la densità *risk neutral*, sebbene ogni opzione *call* (*put*) incorpori la probabilità totale dal prezzo d'esercizio ad infinito (a zero). Per aumentare la precisione si potrebbe tentare

³⁵ L'approccio più completo in questo senso è proposto in Campa e Chang (1998), che riescono ad ottenere prezzi di opzioni su cambi *OTC* per cinque livelli di *strike price*; in McCauley e Melick (1996a) si utilizzano tre livelli di prezzo d'esercizio.

di sfruttare l'informazione presente nella struttura a termine dei prezzi dell'opzione, utilizzando quotazioni di opzioni con diverso tempo a scadenza; un approccio alternativo può essere quello di utilizzare la serie storica dei prezzi delle opzioni per aumentare la precisione, ipotizzando che tutti i prezzi di opzioni osservati in un certo periodo siano osservazioni *noisy* della stessa distribuzione.

L'introduzione di quest'ultimo elemento ci porta ad individuare un terzo aspetto essenziale nella valutazione delle tecniche di estrazione proposte; utilizzare dati di mercato relativi ad una singola rilevazione *cross section* dei prezzi delle opzioni, come avviene nell'approccio degli alberi binomiali, oppure una rilevazione aggregata dei prezzi in un intervallo di tempo, come accade utilizzando la *kernel regression*, implica un procedimento rispettivamente meno o più *data intensive* e di conseguenza soggetto in misura minore o maggiore ai tipici problemi di *overfitting*. Sarebbe dunque preferibile quell'approccio che, sotto il vincolo di un grado di approssimazione della distribuzione implicita *risk neutral* sufficientemente preciso, utilizza il minor numero di gradi di libertà. In realtà nel confronto tra l'approccio degli alberi binomiali impliciti e l'approccio non parametrico va tenuta ben presente un'ulteriore considerazione; nel primo caso si approssimano perfettamente tutti i prezzi di mercato delle opzioni in un particolare istante, ma non necessariamente il modello rimane coerente nel tempo. Nel secondo caso invece l'obiettivo è quello di individuare una funzione più stabile nel tempo e dunque lo stimatore potrà evidenziare una maggiore variabilità del grado di *fitness* rispetto ai prezzi di mercato registrati in singole sedute.

In termini generali si possono dunque considerare maggiormente attendibili in un'ottica di *pricing* istantanea del derivato i modelli basati su alberi binomiali impliciti, mentre in un'ottica di valutazione *out of sample* di valori teorici di equilibrio dell'opzione risultano più stabili i modelli non parametrici basati sulla *kernel regression*. Considerazioni analoghe possono essere fatte per i modelli basati su funzione di interpolazione della volatilità implicita, che peraltro possono essere applicati sia a dati "puntuali" che a serie.

In termini più specifici può risultare interessante un confronto per verificare in quale misura le tecniche di estrazione della distribuzione di probabilità implicita presentate fino ad ora risultano stabili nel tempo oppure se costituiscono solamente un'accurata e significativa rappresentazione delle aspettative e delle dinamiche che il mercato riflette in uno specifico istante temporale. Per approfondire questo aspetto ci si può riferire ad uno studio di Dumas, Fleming e Whaley (1998), che propone una verifica sistematica dei risultati ottenibili dall'utilizzo di tecniche d'interpolazione della funzione di volatilità, con l'obiettivo specifico di verificarne *out of sample* la stabilità nel tempo. Non viene impostata una verifica statistica vera e propria sui prezzi delle attività finanziarie, procedimento che richiederebbe tra l'altro alcuni anni di osservazioni; si considera piuttosto il comportamento futuro dei prezzi delle opzioni, ovvero si confrontano i prezzi quotati sul mercato rispetto ai valori teorici determinati da un modello di *pricing* con funzione deterministica della volatilità stimata nella settimana precedente. Questo approccio consente di ottenere rapidamente un verdetto sulla validità di questi modelli nell'attività di *pricing* e di copertura *out of sample*.

Il primo passo consiste nello specificare una funzione d'interpolazione della volatilità; per garantire maggiore significatività alla verifica si propongono diverse funzioni alternative, i cui parametri vengono aggiustati in modo da approssimare con sufficiente precisione i prezzi di mercato delle opzioni. I modelli proposti utilizzano in tutti i casi una misura di volatilità locale, come avveniva nell'ambito del filone degli alberi binomiali del paragrafo 3.1.3, che dipende nei diversi casi dal prezzo ed eventualmente dal tempo³⁶.

³⁶ Si propongono sostanzialmente quattro modelli per la funzione di volatilità locale. La prima formulazione utilizza un parametro di volatilità costante, che rappresenta il modello di Black e Scholes (1973). La seconda versione

Su di un campione costituito dai prezzi delle opzioni sull'indice *S&P500*³⁷, Dumas, Fleming e Whaley (1998) stimano i parametri di ciascun tipo di funzione della volatilità su base settimanale, minimizzando la somma degli errori quadratici tra prezzo di mercato dell'opzione e suo valore teorico secondo il modello adottato³⁸.

Per accertare la qualità dei modelli stimati si impostano le tipiche misure quantitative di valutazione dell'errore ed un indicatore informativo, noto come *Akaike Information Criterion* (Akaike (1973)), volto ad identificare il potenziale grado di *overfitting*. I risultati ottenuti *in sample* suggeriscono che la relazione più importante è quella della volatilità con il prezzo del sottostante, mentre aggiungere la variabile temporale non sembra incrementare il potere esplicativo, se non nella combinazione con lo *strike price*. Inoltre se nella valutazione si considerano i gradi di libertà utilizzati da ogni modello, è piuttosto evidente la *performance* migliore delle funzioni deterministiche della volatilità più parsimoniose.

Le misure di errore sulla previsione *out of sample* non fanno che confermare quanto affermato poco sopra; l'aggiunta della variabile temporale sembra essere la causa dei problemi di *overfitting* dei modelli più articolati. A questo punto è necessario ottenere ulteriori elementi di valutazione confrontando gli errori di previsione dei modelli con un *benchmark* appropriato. Il parametro di confronto ideale viene individuato nel comportamento tipico dei *market makers*. La valutazione delle opzioni avviene con il modello classico di Black e Scholes (1973), nell'ambito del quale si inserisce però una misura di volatilità implicita interpolata per *strike* e scadenze; tale approccio è definito in Dumas, Fleming e Whaley (1998) come "approccio *ad hoc*" e risulta essere molto simile alle funzioni della volatilità impiegate in Shimko (1993) o in Malz (1998a) e descritte nel paragrafo 3.1.2, oppure alla versione semiparametrica dell'approccio di Ait-Sahalia e Lo (1998) descritto nel paragrafo 3.1.5.

Le misure di errore dell'approccio *ad hoc* si rivelano in tutti i casi inferiori rispetto alle funzioni con volatilità locale deterministica proposte da Dumas, Fleming e Whaley (1998), soprattutto per le opzioni *ATM*; questo significa che non vi è nessun tipo di miglioramento nell'utilizzo dei modelli proposti rispetto all'approccio *ad hoc*. Per completare l'analisi è possibile riferirsi, oltre ad una valutazione delle diverse tecniche rispetto alle attività di *pricing*, all'efficacia nell'attività di *hedging*; ipotizzando un ribilanciamento continuo del portafoglio, la copertura risulta adeguata solo se il modello di *pricing* è attendibile. I risultati migliori in Dumas, Fleming e Whaley (1998) sono manifestati dal modello di Black e Scholes (1973) ed in seconda battuta dal modello *ad hoc*; questa evidenza empirica è spiegata probabilmente dalla caratteristica di stabilità degli errori dei modelli più parsimoniosi.

Concludendo il confronto dei modelli rispetto alla stabilità nel tempo, è possibile affermare che i modelli che riflettono in termini più semplici le prassi operative e le evidenze empiriche sono più efficaci nell'utilizzo *out of sample* rispetto ai modelli più articolati, sebbene questi ultimi presentino caratteristiche attraenti in termini di *fitting*.

presenta la volatilità locale come funzione deterministica parabolica dello *strike price*. Il terzo modello aggiunge al precedente una dipendenza lineare dal tempo e dal prodotto prezzo-tempo. Il quarto modello inserisce un'ulteriore dipendenza quadratica dal tempo.

³⁷ I dati si riferiscono ad opzioni trattate al *CBOE* nel periodo compreso tra giugno 1988 e dicembre 1993. Sono escluse dal campione le opzioni con meno di sei o più di cento giorni a scadenza, le opzioni con *moneyness* (*XF-I*) superiore al 10% e le opzioni non contrattate nell'ultima mezz'ora di *trading*.

³⁸ L'estrazione della distribuzione di probabilità *risk neutral* implicita ottenuta utilizzando la funzione deterministica della volatilità descritta dal modello più articolato, il modello 3, pone in evidenza l'usuale asimmetria negativa e leptocurtosi.

3.2 Modelli basati su processi stocastici con più fattori casuali

In questa seconda parte di rassegna dei metodi proposti nella letteratura per l'estrazione della distribuzione di probabilità *risk neutral* implicita nei prezzi delle opzioni, si vogliono descrivere le linee generali di quegli approcci che hanno in comune il fatto di impostare una struttura specifica sul processo stocastico non *browniano* seguito dal sottostante o dalla sua variabilità. La notevole complessità nella formulazione analitica di questi approcci, che richiederebbe tra l'altro un livello di approfondimento che va al di là degli obiettivi di questo *paper*, oltre alla minore valenza applicativa, suggeriscono di mantenere in quanto segue un'impostazione piuttosto schematica.

Tra le caratteristiche comuni ai modelli analitici che si andranno ad approfondire vi è frequentemente l'impossibilità di applicare le tipiche strategie di replica *arbitrage free*. Mentre nell'ambito dei modelli che assumono processi stocastici di moto geometrico *browniano* dei prezzi del sottostante oppure varianza ad elasticità costante (si veda ad esempio Cox e Rubinstein (1985)) le opzioni sono attività finanziarie ridondanti, con un'equivalente distribuzione *risk neutral* determinabile come condizione di non arbitraggio, per i modelli più complessi la determinazione della distribuzione di probabilità *risk neutral* richiede il *pricing* del rischio di volatilità o del rischio di *jump*, il quale di conseguenza implica tipicamente vincoli aggiuntivi sulla distribuzione o sulle preferenze dell'agente rappresentativo. In questo modo si perde dunque la completezza del modello, ovvero la possibilità di impostare politiche di *hedging* o di *arbitrage pricing* a rischio (teorico) nullo.

3.2.1 Modelli con volatilità stocastica

I contributi della letteratura in tema di volatilità implicita analizzati fino a questo punto hanno posto in evidenza tra l'altro il carattere eteroschedastico della distribuzione dei prezzi e le problematiche che questo genera nell'ambito dei modelli di *pricing* dei derivati. In questo paragrafo si presentano i tratti generali dei principali approcci che formalizzano in termini specifici il comportamento della varianza e che vanno sotto l'etichetta di schemi di valutazione con variabilità stocastica. L'elemento distintivo di questi modelli rispetto a Black e Scholes (1973) si riferisce alla presenza di una seconda categoria di rischio, oltre al rischio di prezzo: si tratta appunto del rischio di volatilità.

Gli approcci standard nel *pricing* del rischio di volatilità sono sostanzialmente due: in primo luogo è possibile considerare il rischio aggiuntivo come rischio non sistematico e dunque diversificabile e con prezzo pari a zero, così come avviene in Hull e White (1987), Scott (1987) e Johnson e Shanno (1987). Caratteristica comune di tutti gli approcci riconducibili a questa categoria è infatti quella di imporre frequentemente ipotesi soggette a rilevanti restrizioni; in Hull e White (1987) ad esempio si assume una variabilità spiegata, come nel caso del sottostante, da un processo stocastico descritto da moto *browniano* geometrico; per giungere peraltro ad una soluzione analitica si ipotizza nulla³⁹ la correlazione tra le fonti di errore dei due processi. Questa ipotesi si rivela particolarmente forte soprattutto alla luce delle evidenze empiriche di correlazione tra sottostante e volatilità, di cui si è dato conto ampiamente nel paragrafo 2.5.3.

La seconda categoria di modelli assume una qualche funzione di utilità espressione delle preferenze dell'agente rappresentativo, tipicamente di tipo logaritmico, sulla base della quale è

³⁹ Nelson (1990) dimostra che i modelli standard *ARCH* e *GARCH* tendono al limite a modelli di volatilità stocastica con variazioni di volatilità indipendenti dalle variazioni di prezzo, anche se in Nelson (1991) lo sviluppo del modello *E-GARCH* permette una correlazione diversa da zero tra ritorni sul sottostante e variazioni di volatilità.

poi possibile prezzare il rischio di volatilità; questo avviene tra gli altri in Wiggins (1987) ed in Melino e Turnbull (1990).

La rilevante alternativa alle soluzioni in forma chiusa, che imporrebbe forti restrizioni (ad esempio correlazione nulla tra sottostante e volatilità) oppure l'esplicitazione della funzione di utilità, è rappresentata dalle soluzioni di modelli complessi ottenute attraverso simulazioni numeriche, tipicamente con metodo Monte Carlo, che permettono di introdurre ipotesi non eccessivamente restrittive e di arrivare comunque ad una soluzione accettabile.

La complessa struttura formale dei modelli a volatilità stocastica sin qui accennata può in parte spiegare la minor diffusione di test empirici rispetto ad approcci più accessibili. Per alcune applicazioni promettenti ci si può comunque riferire ad esempio al modello sviluppato da Heston (1993) per opzioni su cambi e su tassi d'interesse; i valori assunti dalla correlazione tra il processo di prezzo ed il processo di volatilità riescono a spiegare l'asimmetria della distribuzione di probabilità del prezzo e dunque l'effetto *skew* nella funzione della volatilità implicita rispetto al livello di *moneyness*. L'evoluzione del parametro che controlla la variabilità della volatilità è in grado di spiegare il fenomeno dell'eccesso di curtosi della funzione di densità e dunque riesce ad interpretare il tipico *volatility smile*. Dunque una stima appropriata dei numerosi parametri è in grado di spiegare una buona parte delle regolarità empiriche riscontrate sul mercato.

Lo stesso modello di Heston (1993) viene impiegato per opzioni su indici di mercato azionario in uno studio di Nandi (1998); si imposta una verifica empirica dei risultati nell'attività di *pricing* ed *hedging out of sample* di un modello con volatilità stocastica sviluppato per opzioni sull'indice *S&P500*. I risultati ottenuti in termini di *pricing* sono migliori rispetto al modello di Black e Scholes (1973), anche se sono osservabili ancora sostanziali divergenze tra valore teorico e di mercato per opzioni *deep OTM*; in termini di *hedging*, tenendo conto dei costi di transazione e utilizzando per la copertura il contratto *future*, il modello con volatilità stocastica consente di ottenere una minore varianza, significativa in termini statistici, rispetto al modello classico.

Per il mercato dei tassi d'interesse italiano si può considerare lo studio di Fornari e Violi (1998), nell'ambito del quale si presenta un modello di volatilità stocastica con la struttura di Hull e White (1987), utilizzando simulazioni Monte Carlo per ottenere una soluzione non in forma chiusa ed interpretando l'eteroschedasticità tramite un'estensione dello schema *GARCH* al caso *Power-ARCH*⁴⁰. L'applicazione operativa al contratto *BTP future*⁴¹, effettuata tramite duemila repliche dell'esperimento, ha permesso di stimare la distribuzione di probabilità sui cinque, dieci e venti giorni successivi; i risultati ottenuti, anche rispetto ad un'analisi di sensitività condotta con valori estremi dei parametri e delle condizioni iniziali, permettono di considerare la forma della distribuzione simulata piuttosto robusta e compatibile con fenomeni di asimmetria e curtosi indotti da una correlazione sensibile tra prezzo e volatilità.

⁴⁰ Il vantaggio nell'utilizzo dello schema *P-ARCH* anziché *GARCH* consiste nell'interpretare una dinamica della volatilità non ristretta a priori, ma stimata sulla base dei corsi osservati dei titoli, ovvero stimando il parametro δ nella formulazione che segue:

$$\sigma_t^\delta = \omega + \alpha \left(|\varepsilon_{t-1}| - \gamma \varepsilon_{t-1} \right)^\delta + \beta \sigma_{t-1}^\delta, \quad -1 \leq \gamma \leq 1, \quad (\omega, \alpha, \beta, \delta) \in \mathfrak{R}$$

In realtà l'applicazione operativa di questo schema determina un incremento della complessità per il quale può essere preferibile utilizzare lo schema *GARCH*, così come avviene per le simulazioni Monte Carlo in Fornari e Violi (1998).

⁴¹ I parametri del modello formulato sono stimati per i prezzi del *futures* sul *BTP* quotato al *LIFFE*, dal 15 ottobre 1991 al 20 febbraio 1996.

3.2.2 Modelli con processo diffusivo a salti

L'assunzione di Black e Scholes sulla continuità della dinamica seguita dal processo di prezzo dell'attività sottostante è stata rimossa nella letteratura già in Merton (1976), che ha introdotto un elemento di *jump*, secondo l'impostazione peraltro di un elemento di rischio aggiuntivo interpretato come non sistematico e dunque con prezzo pari a zero.

Un'impostazione che si discosta da quella di Merton, richiedendo una funzione di utilità dell'agente per il *pricing* del rischio di "salto" è presente nella ricerca di Bates (1991). L'equazione differenziale stocastica che spiega la presenza di un processo di *jump* casuale ed eventualmente asimmetrico si può esprimere in termini formali come⁴²:

$$\frac{dS}{S} = [\mu - \lambda \bar{k}] dt + \sigma dZ + kdq ,$$

dove μ è il ritorno atteso, σ è la volatilità istantanea condizionata all'assenza di salti, Z è un processo di Wiener standard, k è l'intensità percentuale del *jump* casuale condizionato ad una distribuzione di Poisson, λ rappresenta la frequenza di eventi di Poisson e q è un contatore di Poisson con intensità λ . Il processo del sottostante è descritto da un moto geometrico *browniano* per la maggior parte del tempo, ma in media λ volte all'anno il prezzo salta di un ammontare casuale k .

Le differenze rispetto al processo diffusivo a salti di Merton (1976) sono piuttosto importanti: in primo luogo il *jump* può essere asimmetrico, ovvero con media diversa da zero; questo implica che la distribuzione di probabilità risultante sarà asimmetrica positiva (negativa) per valori attesi di k superiori (inferiori) a zero. In secondo luogo, come già accennato nella premessa, è difficile mantenere l'ipotesi di Merton (1976) che il rischio di salto sia diversificabile quando il sottostante è rappresentato dal contratto *future* sull'indice *S&P500*; al contrario si impongono in Bates (1991) tre restrizioni sulle preferenze: i mercati sono privi di frizioni, la ricchezza viene investita in modo ottimale e segue un processo diffusivo di *jump*, l'agente rappresentativo ha una funzione di utilità separabile nel tempo. In questo modo il rischio di *jump* è sistematico; tutti i prezzi delle attività e la ricchezza *saltano* simultaneamente, anche se eventualmente per un ammontare differente.

Il modello di processo diffusivo a salti impostato secondo questa logica può essere utilizzato per stimare la distribuzione neutrale al rischio a partire dai dati di mercato; attraverso un metodo di regressione non lineare possono essere determinati i parametri non conosciuti, ovvero la deviazione standard implicita in assenza di *jumps* e la frequenza, l'entità e la dispersione media implicita dei salti.

Un'applicazione del modello al mercato azionario americano in Bates (1991) evidenzia, come già facevano le analisi temporali dell'asimmetria presentate nel paragrafo 2.5.3, la predominanza di una distribuzione molto simile ad una *lognormale* fino all'ottobre 1986; le aspettative di *jump* di entità media negativi e le attese sulla frequenza degli stessi dimostrano la forte percezione di potenziale *crash* che caratterizza il periodo giugno-agosto 1987 ed il periodo post-crollo. Sembra dunque evidente che nei due mesi così come nel pomeriggio precedenti il 19 ottobre 1987 non era presente nessuna forte aspettativa di *crash*.

⁴² La formula proposta costituisce una rielaborazione dell'equazione presentata in Bates (1991:1023).

3.2.3 Coerenza dei modelli con la term/strike structure della volatilità

I modelli con volatilità stocastica o con l'introduzione di *jump* si sono dimostrati coerenti con alcune delle anomalie riscontrate nei prezzi di mercato delle opzioni rispetto al modello di Black e Scholes, dal momento che riescono a produrre distribuzioni di probabilità caratterizzate sia da *skewness* che da eccesso di curtosi. Questo non implica peraltro che i suddetti modelli siano in grado di rimanere coerenti con le evidenze empiriche anche rispetto all'evoluzione nel tempo dell'effetto *volatility smile* e della sua asimmetria. Questo aspetto è molto importante per un modello di *pricing*, in quanto un comportamento nel tempo difforme rispetto ai test di mercato determina imprecisione nei parametri approssimati ad una certa frequenza nella valutazione su altre scadenze.

In Das e Sundaram (1999) si propone una metodologia per isolare la dipendenza di questi modelli⁴³ dalla *term structure*: si tratta di determinare innanzitutto da ciascuno di essi un'espressione in forma chiusa per *skewness* e curtosi e, sulla base di queste relazioni, caratterizzare la dipendenza del momento terzo e quarto dai diversi parametri del modello ed in particolare dalla variabile temporale. Applicando questa tecnica si dimostra che, per quanto riguarda i modelli con processi diffusivi a salti, è promettente la riduzione del grado di asimmetria e di curtosi con l'incremento della scadenza; l'aspetto problematico è relativo semmai al fatto che tale riduzione è molto più rapida di quanto si verifichi nella realtà. I processi di *jump* possono dunque generare *volatility smile* ragionevoli solo per brevi scadenze: lo *smile* si appiattisce troppo velocemente nel tempo. Altro elemento poco coerente si riferisce alla *term structure* della volatilità implicita *ATM*, che in un processo a salti è funzione crescente del tempo a scadenza; questo porta il modello ad essere incompatibile con una struttura decrescente o non monotona, che è possibile riscontrare spesso nella realtà⁴⁴.

Analizzando invece la dipendenza dalla variabile temporale del momento terzo e quarto nei modelli con volatilità stocastica, è piuttosto evidente l'incapacità di generare alti livelli di asimmetria e curtosi per brevi scadenze; dunque non sono compatibili con i pronunciati effetti *smile* osservati empiricamente. Una seconda caratteristica poco coerente di questo genere di modelli è la tendenziale impostazione crescente di *skewness* e curtosi rispetto al passaggio da brevi a medie scadenze: questo implica l'impossibilità di osservare il caratteristico appiattimento dello *smile*. Al contrario un aspetto dei modelli di volatilità stocastica molto promettente è collegato alla compatibilità con qualsiasi forma della struttura a termine delle volatilità implicite *ATM*: crescente, decrescente, non monotona. In questo senso i modelli con volatilità stocastica sono in grado di interpretare un aspetto importante dei mercati finanziari in modo decisamente migliore rispetto ai processi a salti⁴⁵.

A questo punto potrebbe sembrare che la soluzione migliore nella rappresentazione dei fenomeni empirici sia un modello che combina volatilità stocastica e processi di *jump*; un modello di questo tipo potrebbe essere in grado di generare curtosi adeguata per scadenze ravvicinate (via *jump*) così come per scadenze moderatamente lontane (via volatilità stocastica),

⁴³ I modelli che sono presi in considerazione come rappresentativi della rispettiva categoria sono il modello di processi diffusivo a salti con *jumps* distribuiti in modo lognormale e il modello con volatilità stocastica con processo *square root* per la volatilità.

⁴⁴ In Das e Sundaram (1999) si porta come esempio il profilo decrescente della *term structure* della volatilità *ATM* delle opzioni sull'indice *S&P500* che prevalse nel periodo ottobre/novembre 1997.

⁴⁵ Un confronto econometrico tra modelli con volatilità stocastica e modelli con processo diffusivo a salti è già presente in Jorion (1988); l'aspetto interessante delle risultanze ottenute si riferisce alla sostanziale uniformità di *pricing* dei due modelli per dati con rilevazione mensile, rispetto a sostanziali differenze con dati settimanali. Questo fenomeno è perfettamente in linea con le più recenti evidenze presentate in Das e Sundaram (1999).

e potrebbe essere compatibile con qualsiasi forma della *term structure* della volatilità *ATM*⁴⁶. L'aspetto negativo di una scelta di questo genere si riferisce alla ridotta parsimoniosità del modello risultante, ovvero al potenziale effetto di *overfitting*. In realtà l'elemento importante che si può derivare dal contributo di Das e Sundaram (1999) è relativo all'utilizzo di un modello appropriato una volta che siano conosciute le caratteristiche dinamiche della serie oggetto di studio; è chiaro che in un contesto specifico caratterizzato da volatilità implicita *ATM* decrescente rispetto alla scadenza non potrà essere vantaggioso l'utilizzo di un modello di processo diffusivo a salti.

Per concludere la parte di questo *paper* dedicata alla presentazione dei modelli basati su processi stocastici con più fattori casuali è opportuno un accenno sull'interesse a fini operativi di queste formulazioni. Innanzitutto è apparsa evidente, nonostante il livello volutamente generico della trattazione, l'intrinseca complessità analitica di questo tipo di modelli, elemento che ne limita di fatto l'utilizzo operativo. Si potrebbe obiettare peraltro che altri modelli econometrici altrettanto complessi, come ad esempio le diverse versioni degli schemi *GARCH*, sono a tutt'oggi abbastanza diffusi anche tra gli operatori; nel caso dei modelli con volatilità stocastica o con *jump* è presente però un altro elemento che ne complica ulteriormente l'utilizzo. E' infatti difficile portare a livello operativo (*pricing* e copertura) modelli che si basano su un certo numero di parametri non osservabili che sono necessari per caratterizzare adeguatamente i processi e le rispettive interazioni. Per un effettivo utilizzo nella prassi operativa, che consenta di trarre beneficio dalle potenzialità di questi modelli nell'ottenere migliori risultati rispetto a Black e Scholes (1973), sembra indispensabile lo sviluppo di versioni più agevoli da stimare e che consentano di intravedere nelle dinamiche descritte utili elementi interpretativi.

3.3 Un confronto tra distribuzioni implicite e distribuzioni dei ritorni realizzati

Nell'ambito di questo lavoro di *survey* sono stati presentati gli approcci più importanti della recente letteratura per la determinazione della distribuzione di probabilità *risk neutral* implicita nei prezzi delle opzioni; ci si può ragionevolmente chiedere se un approccio del tutto indipendente dal *set* informativo contenuto nella serie dei ritorni del sottostante può consentire di prevederne la distribuzione che sarà realizzata in futuro. In altre parole ci si può chiedere se le implicazioni provenienti da due fonti informative diverse sono compatibili⁴⁷; l'aspetto maggiormente problematico di un confronto di questo genere sta nella più volte menzionata natura *risk neutral* della densità implicita nei prezzi delle opzioni, al contrario della distribuzione "vera" ottenuta dai ritorni del sottostante, che riflette necessariamente la propensione al rischio dell'agente rappresentativo. Non avrebbe senso un confronto che dipende

⁴⁶ In Bates (1996b) si sviluppa un modello che combina volatilità stocastica e rischio di *jump*; l'asimmetria della distribuzione può essere originata sia da correlazione tra sottostante e volatilità, sia da un'entità media del salto diversa da zero; allo stesso modo l'eccesso di curtosi dalla variabilità della volatilità così come da una rilevante componente di *jump*. Anche in Backus, Foresi, Li e Wu (1997) si sviluppa un modello molto articolato che tenta di riconciliare tutte le anomalie valutative della formula di Black e Scholes.

⁴⁷ Le poche evidenze empiriche dimostrano una promettente affinità tra le due distribuzioni; ad esempio Rubinstein (1994) converte la densità *risk neutral* determinata per lo *S&P500* in una densità "vera", ipotizzando che l'agente rappresentativo massimizzi una funzione di utilità della propria ricchezza con un'avversione al rischio costante, assumendo nella fattispecie utilità logaritmica. Il premio al rischio, calcolato il 02.01.1990, varia tra il tre ed il cinque per cento, e la distribuzione soggettiva è solo leggermente traslata verso destra rispetto alla distribuzione *risk neutral*; la forma funzionale delle due densità rimane molto simile. Un'indicazione simile si ritrova altresì in Neuhaus (1995), che riscontra come non sia riscontrabile nessun errore di previsione sistematico utilizzando misure di volatilità storica (espressione della densità "vera") e di volatilità implicita (espressione della densità neutrale al rischio) nella previsione della volatilità futura; questo esclude che vi siano differenze rilevanti tra le distribuzioni soggettive e *risk neutral*.

in modo cruciale da ipotesi specifiche sulle preferenze aggregate dell'investitore, per le quali esiste nella letteratura un forte disaccordo riguardo a cosa costituisca un valore ragionevole di avversione al rischio relativa.

Una prima promettente impostazione per affrontare questo problema può essere quella di isolare proprio la differenza tra le due densità (*risk neutral* ex ante e realizzata ex post) come una misura di avversione al rischio, di cui monitorare evoluzione ed entità nel tempo. Una seconda complessa alternativa può essere quella di ottenere, tramite una metodologia appropriata, una distribuzione di probabilità *risk neutral* direttamente dai ritorni del sottostante; il confronto con la densità implicita nei prezzi delle opzioni potrà fornire utili elementi interpretativi del *pricing* delle opzioni.

Un'applicazione della prima impostazione si può riferire a Jackwerth (1997); a partire dalla constatazione delle difficoltà riscontrate dalla letteratura nella determinazione specifica delle funzioni di avversione al rischio dell'agente rappresentativo, si individua una soluzione indiretta e promettente nello specificare dapprima una distribuzione *risk neutral* e successivamente una distribuzione che riflette le preferenze dell'investitore e dunque derivare una misura di avversione al rischio in termini differenziali⁴⁸.

L'evidenza empirica dimostra che nell'ambito del mercato azionario americano del periodo *pre-crash* le due distribuzioni, *risk neutral* ed effettiva, erano entrambe approssimativamente lognormali, con una leggera traslazione verso destra della densità "vera"; in questo caso una funzione di utilità con una moderata avversione al rischio poteva costituire un aggiustamento ragionevole per passare da una distribuzione all'altra. Il periodo *post-crash* al contrario è caratterizzato da una densità effettiva ancora approssimativamente lognormale, ma da una distribuzione implicita *risk neutral* asimmetrica negativa e leptocurtica; di fronte a queste evidenze è possibile affermare che se la prima componente, ovvero la densità "vera", è rimasta la stessa e la seconda componente, ovvero la densità neutrale al rischio, è cambiata, allora necessariamente la funzione di avversione al rischio deve essersi modificata a cavallo del crollo. Prendiamo in esame in modo specifico come Jackwerth (1997) dimostra in modo analitico queste risultanze.

La distribuzione di probabilità *risk neutral* implicita nei prezzi delle opzioni si ottiene⁴⁹ utilizzando una variante del metodo degli alberi binomiali impliciti proposto in Jackwerth e Rubinstein (1996); la differenza consiste nell'interpolazione della funzione della volatilità implicita e non della distribuzione di probabilità. Inoltre, per garantire un maggiore livello di *fit* rispetto alle volatilità *ATM* dove la variabilità della volatilità è inferiore, si utilizza una funzione obiettivo che divide l'errore per la deviazione standard della volatilità associata a quel particolare *strike price*. Per determinare la distribuzione di probabilità "vera" si utilizza la serie storica dei prezzi dell'indice ex post sulla base della quale si calcolano i ritorni e si deriva la densità tramite il metodo non parametrico *Gaussian kernel*.

A questo punto è possibile calcolare la funzione di avversione al rischio, assumendo ragionevolmente che le distribuzioni *risk neutral* e "vera", differendo solamente nel termine di *drift* a causa del premio al rischio, siano caratterizzate da identica volatilità. La procedura empirica impiegata è fondata sulla metodologia *bootstrap*, che prevede di ricalcolare più volte

⁴⁸ In Jackwerth (1997) si dimostra in modo molto lineare che è possibile scrivere un coefficiente di avversione al rischio nei termini di una distribuzione *risk neutral* e di una distribuzione soggettiva semplicemente con il rapporto tra la derivata seconda cambiata di segno e la derivata prima di una funzione di massimizzazione dell'utilità futura; tale procedimento ha il pregio di eliminare dall'espressione alcuni termini, come il parametro λ dell'ottimizzazione *lagrangiana*, che sarebbero di difficile quantificazione.

⁴⁹ Il campione di dati utilizzati si riferisce alle opzioni sull'indice *S&P500 (CBOE)*, al contratto *future S&P500* e all'indice *S&P500* tra il 02.04.1986 ed il 29.12.1995.

la funzione di avversione al rischio sulla base di un campione di dati di *input* (ritorni e prezzi di opzioni) che prima di ogni iterazione viene ricomposto con la tecnica *resample with replacement*; in questo modo si riesce ad ottenere una sorta di intervallo di confidenza per la misura di avversione al rischio. Nel periodo *pre-crash*, come nelle attese, la funzione di avversione al rischio è, coerentemente con la teoria economica, positiva e decrescente con la ricchezza; al contrario dopo il 1987 tale relazione presenta valori anomali negativi e forte crescita per elevati livelli di ricchezza. Il cambiamento a cavallo del *crash* si è dimostrato drastico; la funzione di utilità si presenterebbe convessa. Le spiegazioni per questo fenomeno spaziano dall'inadeguatezza della distribuzione storica per approssimare la distribuzione soggettiva, all'incapacità per l'indice *S&P500* di essere una buona *proxy* del mercato, alla ridotta accuratezza nell'approssimazione della densità *risk neutral*; tutte queste ipotesi sembrano prive di fondamento. La spiegazione più plausibile si riferisce all'elevato prezzo delle opzioni *put OTM* determinato dall'elevata domanda per esigenze di assicurazione di portafoglio; la verifica più appropriata in questo caso è quella di impostare una *trading rule* che sfrutti questi *mispricing*. La strategia di *trading* simulata riesce in effetti ad ottenere *extra rendimenti* nel periodo *post-crash*, anche con la presenza di alcuni *jump* introdotti artificialmente; la spiegazione più probabile della negatività della funzione di avversione al rischio è dunque relativa a fenomeni di *mispricing*, dal momento che non è conciliabile con le preferenze dell'agente rappresentativo e dal momento che le altre ipotesi del modello si sono rivelate robuste.

Un esempio della seconda alternativa si ritrova in Aït-Sahalia, Wang e Yared (1998); la metodologia utilizzata per ottenere dai ritorni del sottostante una distribuzione *risk neutral* non ex ante, quale quella implicita, bensì direttamente comparabile con la densità implicita nei prezzi delle opzioni, è il teorema del cambio di misura di Girsanov⁵⁰. Inoltre un'ipotesi forte del modello si riferisce all'uguaglianza tra la funzione di volatilità istantanea della dinamica di prezzo effettiva e di quella neutrale al rischio; è possibile dunque utilizzare i valori del sottostante per determinare uno stimatore⁵¹ della volatilità. Per quanto riguarda il coefficiente *risk neutral* di *drift*, ottenuto come differenza tra tasso *risk free* e tasso di dividendo, esso è direttamente osservabile dalla relazione di parità tra prezzo *spot* e prezzo *forward*. A questo punto, conoscendo il parametro di diffusione e di *drift*, può essere determinata la densità di probabilità *risk neutral* dai ritorni del sottostante risolvendo l'equazione differenziale parziale oppure utilizzando simulazioni numeriche Monte Carlo, nell'ambito delle quali la funzione di diffusione è rappresentata dallo stimatore non parametrico della volatilità.

Per quanto riguarda poi la distribuzione implicita nei prezzi delle opzioni, essa si determina in modo non parametrico con la metodologia *kernel regression* introdotta in Aït-Sahalia e Lo (1998) ed analizzata nel paragrafo 3.1.5. A questo punto è possibile verificare l'ipotesi nulla, ovvero che le due distribuzioni *risk neutral* ottenute siano uguali.

Le risultanze ottenute da Aït-Sahalia, Wang e Yared (1998) sull'indice *S&P500*⁵² dimostrano che, dopo il *crash* dell'ottobre 1987, la distribuzione implicita nei prezzi delle opzioni è divenuta più asimmetrica e leptocurtica rispetto alla densità effettiva *risk neutral*; questa evidenza è perfettamente coerente con la presenza da quel punto in poi di un effetto *smile* decisamente asimmetrico. Il mercato delle opzioni avrebbe incorporato nelle formule di *pricing*

⁵⁰ Si veda Harrison e Kreps (1979) e Baxter e Rennie (1996:63-76).

⁵¹ Viene utilizzato uno stimatore non parametrico della funzione di diffusione che non impone restrizioni alla funzione di *drift*; le simulazioni Monte Carlo impostate per determinarne empiricamente la *performance* portano a risultati incoraggianti.

⁵² Il campione di dati utilizzati si riferisce alle opzioni sull'indice *S&P500* trattate al *CBOE* tra il 25.04.1986 ed il 31.12.1994; i valori della serie del sottostante indice *S&P500* provengono dal *CME* e vengono rilevati ogni cinque minuti.

un elemento di eccesso di reazione rispetto alla *skewness* e curtosi comunque presenti nella serie del sottostante. L'accertamento in termini più formali di questa differenza nelle densità probabilistiche avviene in primo luogo tramite un'analisi di regressione dei primi quattro momenti della distribuzione implicita sui corrispondenti momenti della distribuzione effettiva; mentre per valore atteso e varianza non ci sono sostanziali differenze, per *skewness* e curtosi sono sistematici gli eccessi della densità ottenuta dalle opzioni. In secondo luogo si imposta una verifica dell'ipotesi di uguaglianza delle due distribuzioni; tale assunzione non può essere rifiutata in termini statisticamente significativi. Il terzo metodo di verifica è quello più promettente; se il *pricing* delle opzioni amplifica le probabilità di eventi estremi è possibile impostare delle semplici *trading rules*⁵³ per sfruttare questi disallineamenti, e, se i risultati ottenuti sono soddisfacenti in termini di indice di Sharpe, allora è possibile affermare che le due distribuzioni non sono uguali. E' evidente dai risultati di Ait-Sahalia, Wang e Yared (1998) che tali regole operative riescono a battere la strategia *buy & hold* sia per il periodo complessivo, che per singoli sottoperiodi.

Una naturale interpretazione della differenza tra le distribuzioni *risk neutral* implicite ed effettive può riferirsi al fatto che il mercato delle opzioni imposta formule di *pricing* che considerano possibili *jump* negativi di entità assimilabile al *crash* del 1987, sebbene tali eventi non si presentino poi nella serie dell'indice sottostante del periodo successivo. Di conseguenza l'aggiunta di un termine di *jump* nella serie del sottostante, oltre alla componente che si riferisce al processo diffusivo, dovrebbe riuscire a colmare le differenze; per evitare di introdurre complicazioni relative alle preferenze⁵⁴, si preferisce introdurre, secondo la dinamica storica dell'indice, un salto di entità negativa fissa con diverse frequenze di accadimento. Si mette in evidenza come attraverso un *jump* del -10%, con frequenza pari ad una volta in tre anni, si riescono a riconciliare decisamente le differenze di asimmetria.

3.4 Conclusioni

In questa sezione sono stati presentati gli approcci proposti dalla letteratura per l'estrazione della distribuzione di probabilità implicita nei prezzi delle opzioni. Possiamo rappresentare lo schema concettuale seguito nella trattazione in un quadro sinottico (si veda la figura 8) che, in una struttura a matrice, classifica gli studi di questo filone di ricerca rispetto a due dimensioni: in primo luogo si distingue l'approccio in base ai presupposti teorici, ovvero secondo le due categorie che potremmo definire rispettivamente approcci "empirici" (paragrafo 3.1) e approcci "analitici" (paragrafo 3.2). La seconda dimensione individua l'origine accademica o professionale del contribuente; tale distinzione è importante per inquadrare la tipologia di interessi conoscitivi che l'estrazione della distribuzione di probabilità *risk neutral* intende soddisfare e presenta spesso un nesso diretto relativo al mercato oggetto di studio.

Lo schema proposto mette in evidenza alcune relazioni tra gli approcci analizzati che era difficile intravedere nella trattazione precedente; ad esempio sono accomunate nei presupposti le tecniche che utilizzano gli alberi binomiali impliciti con le metodologie della mistura di lognormali, con riferimento alla specificazione di una distribuzione nota come *prior* i cui parametri vengono ottimizzati sulla base dei prezzi di mercato. Allo stesso modo l'approccio degli istogrammi, che può essere considerato l'approccio più semplicistico alla costruzione della distribuzione di probabilità implicita, fa parte della stessa categoria delle tecniche basate sulla

⁵³ La regola di *trading* per sfruttare un eccesso di asimmetria si riferisce alla combinazione *risk reversal*: nella fattispecie si tratta di vendere l'opzione sopravvalutata *put OTM* e di comprare l'opzione *call OTM*. La regola di *trading* per sfruttare l'eccesso di curtosi si riferisce invece alla combinazione *butterfly*: nella fattispecie si tratta di vendere sia un'opzione *deep OTM* sopravvalutata che un'opzione *ATM* e di comprare due opzioni *OTM*.

⁵⁴ Per una trattazione analitica dei processi di *jump* si veda Bates (1991) e l'analisi dei modelli presentati nel paragrafo 3.2.2.

kernel regression; in entrambi i casi la stima avviene in modo non parametrico, ovvero senza l'imposizione di restrizioni sul processo stocastico del sottostante o sulla forma della distribuzione risultante o sulla funzione della volatilità implicita rispetto a *strike* e scadenza.

Ambito d'origine e mercati studiati		Sintesi tra approccio operativo (banche d'investimento americane) e approccio accademico.	Studi prevalenti di Banche Centrali e di Organi di Vigilanza per scopi di politica monetaria.
Impostazione		Modelli con applicazioni prevalenti ad indici di mercato azionario.	Modelli con applicazioni prevalenti al mercato dei cambi e dei tassi d'interesse.
Volatilità variabile deterministica	Alberi binomiali	Derman Kani 94, Dupire 94, Rubinstein 94, Jackwerth Rubinstein 96	
	Interpolazione <i>implied volatility</i>	Shimko 93, Dumas Fleming Whaley 98	McCauley Melick 96, Malz 98
	Mistura di lognormali		Bahra 97, Melick Thomas 97, Fornari Violi 98
	Metodi non parametrici	Ait Sahalia Lo 98	Neuhaus 95
Processi stocastici con più fattori casuali	Modelli di volatilità stocastica	Hull White 87, Melino Turnbull 90, Nandi 98	Heston 93, Fornari Violi 98
	Modelli di <i>jump</i>	Bates 91	

Figura 8 : Classificazione degli approcci all'estrazione della distribuzione di probabilità.

Un'ulteriore sistematizzazione dei concetti espressi nei paragrafi precedenti viene presentata in figura 9. In questo caso l'attenzione non è rivolta tanto all'origine del contributo o ai presupposti teorici che possono indicare utili parallelismi, quanto piuttosto alla classificazione rispetto in primo luogo ad elementi essenziali negli studi in materia di opzioni finanziarie ed in secondo luogo rispetto ad elementi specifici delle metodologie; ci si chiede dunque innanzitutto come viene spiegata la volatilità, qual è il processo del prezzo del sottostante che viene ipotizzato, quale tecnica statistica viene utilizzata, e successivamente quali sono i mercati finanziari oggetto di studio e quali i limiti ed i vantaggi ravvisabili in ogni approccio.

E' necessario qualche chiarimento solo per la seconda parte degli elementi considerati. L'individuazione del mercato finanziario nell'ambito del quale ogni tecnica proposta è stata impiegata nella letteratura dipende dall'intensità di dati richiesta dallo specifico approccio. E' evidente come sul mercato azionario sia disponibile un maggior numero di quotazioni per molteplici livelli di *strike price* e dunque si utilizzino prevalentemente procedimenti *data intensive*, mentre per il mercato dei tassi d'interesse e soprattutto per i tassi di cambio spesso si impiegano approcci più parsimoniosi.

I limiti dei modelli presi in considerazione si riferiscono generalmente alle caratteristiche della tecnica statistica utilizzata, che può essere soggetta a fenomeni di *overfitting* del modello rispetto ai dati di *input* oppure può diventare sensibile rispetto alla tecnica d'interpolazione utilizzata. I vantaggi dei diversi approcci sono relativi frequentemente alla possibilità di mantenere una struttura *arbitrage free* del modello, oppure si riferiscono alla stabilità delle relazioni individuate, che consente buoni risultati di previsione *out of sample*.

Metodi per estrarre la PDF	Alberi binomiali	Interpolazione implied volatility	Mistura di lognormali	Metodi non parametrici	Modelli di volatilità stocastica o di jump
Fenomeno studiato	Sviluppo di modelli di pricing che tengono conto dell'effetto <i>smile</i> , pur rimanendo <i>arbitrage free</i> ; si ottiene poi la distribuzione <i>risk neutral</i> del sottostante.	Sviluppo di funzioni deterministiche alternative della volatilità e successiva determinazione della distribuzione <i>risk neutral</i> .	Sviluppo di un metodo generale per stimare la densità probabilistica <i>risk neutral</i> , imponendo a priori una specifica forma funzionale .	Sviluppo di un metodo non parametrico per stimare la distribuzione <i>risk neutral</i> , tramite un'analisi <i>cross section</i> e <i>time series</i> .	Sviluppo di modelli con volatilità stocastica o con processo diffusivo a salti del sottostante.
Funzione esplicativa della volatilità	Si esprime una misura di volatilità istantanea con l'incremento dei nodi ed il tendere a zero della loro distanza.	La volatilità è, nei diversi casi, funzione lineare del tempo oppure quadratica dello <i>strike</i> , del tempo, di "dati pivot" di mercato.	La mistura di due o tre distribuzioni consente di interpretare la volatilità rispetto all'evoluzione del prezzo del sottostante.	La volatilità implicita quotata come <i>input</i> dello stimatore <i>kernel</i> permette di considerare effetto <i>smile</i> e <i>term structure</i> .	La volatilità viene spiegata da un processo stocastico, oppure le anomalie sono attribuibili a <i>jumps</i> del prezzo del sottostante
Processi del sottostante ipotizzati	Il processo <i>risk neutral</i> del prezzo del sottostante si diffonde con <i>drift</i> costante e volatilità locale dipendente dalla <i>moneyness</i> e dal tempo.	Non si impongono restrizioni al processo del sottostante; le evidenze empiriche dimostrano deviazioni dal moto geometrico <i>browniano</i> .	Le assunzioni non si riferiscono al processo del sottostante, ma alla distribuzione finale, che risulta coerente con molteplici processi.	Il metodo non parametrico implica che ogni possibile assunzione sul processo del sottostante non sia del tutto soddisfatta.	Al processo <i>browniano</i> dei ritorni si somma un processo <i>browniano</i> della volatilità oppure una componente di <i>jump</i> condizionata <i>Poisson</i> .
Tecnica statistica - Strumento di rappresentazione struttura	Costruzione di alberi impliciti con tecniche ricorsive di minimizzazione rispetto ai valori di mercato.	Interpolazione della funzione di volatilità con regressione quadratica, <i>cubic splines</i> .	Minimizzando gli errori quadratici tra valori di mercato e teorici, si ottiene il valore dei parametri.	Si ottiene una funzione di pricing non parametrica con la <i>kernel regression</i> ; si stima la distribuzione <i>risk neutral</i> .	Minimizzando gli errori tra valori di mercato e teorici, si ottiene il valore dei parametri del processo ipotizzato.
Mercati oggetto di studio	Mercato azionario.	Mercato azionario, tassi di cambio <i>OTC</i> .	Tassi a breve, a lungo, tassi di cambio, petrolio.	Mercato azionario.	Mercato azionario, tassi di cambio
Limiti	Problemi tipici di <i>overfitting</i> dei processi <i>data intensive</i> .	Risultati sensibili alla scelta dello strumento per l'interpolazione.	Non sono possibili <i>hedging</i> o replica sulla base del modello.	Problemi tipici di <i>overfitting</i> dei processi <i>data intensive</i> .	Problemi di coerenza con la <i>term structure</i> della volatilità.
Vantaggi	Completezza del modello, ovvero possibilità di replica <i>risk neutral</i> .	Buoni risultati della funzione " <i>ad hoc</i> ", ovvero modello di <i>B&S</i> con volatilità interpolata.	Coerenza con un'ampia gamma di forme funzionali della distribuzione <i>risk neutral</i>	Capacità di considerare tutte le evidenze empiriche e stabilità della funzione nel tempo.	Si riesce a spiegare in modo analitico l'assicurazione contro il pericolo di <i>crash</i> .

Figura 9: Quadro sinottico dei modelli per l'estrazione della SPD dai prezzi delle opzioni.

4. Evidenze empiriche sui mercati azionario, dei cambi, dei tassi d'interesse

In questa terza sezione del *paper* si illustrano le evidenze di alcuni test empirici sui mercati azionario, dei cambi e dei tassi d'interesse, ottenute applicando alcune delle tecniche approfondite nelle sezioni precedenti.

La trattazione è divisa in tre parti principali. In primo luogo vengono analizzate le caratteristiche dei dati di mercato impiegati, riferendosi soprattutto al confronto con le verifiche empiriche proposte dalla letteratura. Nella seconda parte si individuano, per ogni mercato oggetto d'analisi, le divergenze nel *pricing* delle opzioni rispetto al modello classico; in altre parole si studiano le relazioni tra volatilità implicita e *moneyness* o scadenza dell'opzione. In questo modo è possibile caratterizzare modelli di comportamento tipici degli operatori di ogni mercato. La terza parte impiega le tecniche di più semplice implementazione per estrarre dalle quotazioni di mercato delle opzioni una distribuzione di probabilità implicita *risk neutral* dei prezzi dell'attività finanziaria sottostante; questo procedimento consente di ottenere in modo immediato la probabilità assegnata dal mercato a determinati eventi e quindi rende più precisa la percezione delle aspettative degli operatori di mercato e della loro evoluzione.

4.1 Dati di mercato utilizzati

Prima di entrare nel dettaglio della descrizione per ogni mercato delle serie di dati utilizzate, è necessario specificare alcuni aspetti metodologici comuni. Innanzitutto ogniqualvolta si renderà necessario calcolare la volatilità implicita nei prezzi di mercato delle opzioni, verrà impiegato l'algoritmo iterativo di Newton-Raphson, già approfondito nel precedente paragrafo 2.4. In secondo luogo per determinare la variabile che si riferisce al prezzo di mercato del sottostante, si calcolerà il valore teorico del corrispondente prezzo *forward*¹, ottenuto applicando la relazione di parità alle quotazioni di opzioni *call* e *put* con le stesse caratteristiche. In questo modo si riusciranno ad evitare i problemi di sincronia tra prezzo del sottostante e prezzi delle opzioni e le difficoltà nello stabilire opportuni tassi d'interesse ed eventualmente di dividendo.

4.1.1 Mercato azionario

La letteratura in materia di opzioni su indici di mercato azionario ha preso in considerazione in prevalenza le evidenze empiriche riguardanti il mercato americano, ed in modo particolare le opzioni sull'indice S&P500 trattate al CBOE.

Nei test empirici proposti in questa sezione si verifica se le risultanze in ogni caso concordanti per il mercato americano sono altrettanto valide per i mercati azionari europei; per questo

¹ Per calcolare il prezzo di un'opzione, oppure in alternativa la volatilità implicita, quando si dispone del prezzo *forward* anziché del prezzo *spot* dell'attività finanziaria sottostante, si utilizzano versioni *ad hoc* del modello originario di Black e Scholes (1973), quali la formula di Black (1976a) oppure, per opzioni valutarie, il modello di Grabbe (1983).

motivo vengono considerate le opzioni sull'indice azionario inglese *FTSE100* quotate al *LIFFE* e le opzioni sull'indice azionario italiano *MIB30* trattate all'*IDEM*. Si tratta in entrambi i casi di opzioni di stile europeo, che presentano caratteristiche di uniformità e di contrattazione tipiche di strumenti derivati trattati su mercati regolamentati; il sottostante è rappresentato dall'indice di borsa più importante, in quanto costituito dai titoli più liquidi e capitalizzati.

Per quanto riguarda il mercato inglese si prende in considerazione la serie storica delle quotazioni dei prezzi di *settlement* di opzioni *call* e *put* sull'indice *FTSE100* dal 02.03.1998 al 30.04.1999. Per garantire ai premi quotati considerati una sufficiente liquidità si limita l'analisi alle opzioni *ATM* e alle quattro opzioni con un livello dello *strike price* superiore e inferiore rispetto al prezzo d'esercizio centrale; si considerano dunque complessivamente diciotto contratti d'opzione per ogni giornata di contrattazione, per un totale sul periodo analizzato di 5.490 rilevazioni. Un ulteriore accorgimento, che si utilizza sempre per scopi di liquidità, è quello di rilevare i prezzi di mercato delle sole opzioni con scadenza corrispondente alle scadenze trimestrali dei rispettivi contratti *future*, con il vincolo di mantenere comunque una vita residua minima pari a quindici giorni lavorativi (la vita residua massima corrisponde invece ad ottanta giorni).

Nei test empirici riguardanti il mercato azionario italiano si modificano i criteri di scelta delle opzioni da utilizzare nella verifica empirica rispetto al mercato azionario inglese, per accertare se i risultati ottenuti sono robusti anche rispetto a scelte metodologiche alternative. In termini specifici non si considerano i prezzi di chiusura delle opzioni *MIB30*, ma si rilevano le quotazioni in un istante scelto casualmente nell'ultima ora di contrattazioni. Queste rilevazioni vengono filtrate manualmente, eliminando i contratti che non rispettano il requisito di un volume minimo di scambi e le cui quotazioni non sono sincrone rispetto al resto dei dati di mercato considerati. Naturalmente una metodologia di filtro non automatica rende di fatto problematico l'utilizzo di campioni estesi come nel caso del mercato inglese. Per questo motivo i test empirici proposti si limitano a considerare tre giornate scelte casualmente nella seconda metà di luglio 1999 per opzioni con scadenza 20 agosto 1999. Il fatto che non ci si riferisca in questo caso ad una scadenza corrispondente ai rispettivi contratti *future* non determina problemi di liquidità delle quotazioni, che sono risolti a priori grazie alla procedura di filtro; anzi, questa scelta costituisce un ulteriore elemento distintivo rispetto ai test empirici sull'indice *FTSE100* e dunque rende più interessanti le risultanze della verifica.

4.1.2 Mercato dei cambi

La rilevazione dei dati per il mercato delle opzioni valutarie implica difficoltà aggiuntive rispetto ad opzioni scritte su altre attività finanziarie; infatti, nonostante l'esistenza di un certo numero di mercati regolamentati, tra i quali potremmo citare per importanza il *Philadelphia Stock Exchange (PHLX)* oppure il *Chicago Mercantile Exchange (CME)*, la quasi totalità degli scambi avviene nel mercato *OTC*².

Nei test empirici è necessario dunque tenere in considerazione questa evidenza, per evitare che i risultati ottenuti siano influenzati dalla natura di un mercato, come quello regolamentato, che non riflette le aspettative degli operatori prevalenti. Per rispettare questo requisito nella rilevazione dei prezzi delle opzioni valutarie è necessario affrontare peraltro la notevole difficoltà di reperimento dei dati ed in secondo luogo il problema della significatività degli stessi; infatti un *market maker* generalmente non è disponibile a fornire serie storiche di dati

² Secondo una stima della Bank for International Settlements (1996a), alla fine di marzo del 1995 il 96,6% del nozionale sottostante contratti di opzione su cambi era *over the counter*. Per ulteriori approfondimenti sulle caratteristiche peculiari dei mercati delle opzioni valutarie si veda Malz (1998b).

proprietari ed in ogni caso c'è la necessità di accertare che le quotazioni ottenute siano in linea rispetto ad altri operatori e non costituiscano il risultato di modelli di *pricing* peculiari.

L'insieme di queste potenziali problematiche viene risolto nei test empirici che si presentano in questa sezione, in quanto i prezzi delle opzioni valutarie utilizzate si riferiscono all'indice *British Bankers Association (BBA) currency option volatility*. In effetti si tratta innanzitutto di una serie di dati ottenuti dal mercato *OTC*, e dunque rappresentativi di un mercato che riflette le stime dei volumi di contrattazione prevalenti. In secondo luogo questa serie di dati può essere considerata significativa, in quanto è ottenuta come media delle quotazioni dei principali operatori di mercato.

Come è noto dalle sezioni precedenti, la peculiarità del mercato *OTC* è quella di quotare i prezzi delle opzioni in termini di volatilità implicita di opzioni *ATM forward*, oltre alle combinazioni *risk reversal* e *strangle*. L'indice *BBA option volatility* fornisce un *fixing* con periodicità bisettimanale per la volatilità implicita *ATM forward*, per la combinazione *25Delta risk reversal* e per la combinazione *25Delta strangle*, sulle scadenze una settimana, un mese, tre mesi, sei mesi, un anno, due anni. I tassi di cambio considerati sono: sterlina/dollaro USA, dollaro USA/yen, euro/dollaro USA, dollaro USA/franco svizzero, euro/yen, euro/sterlina, dollaro USA/dollaro canadese, dollaro australiano/dollaro USA, dollaro USA/corona svedese, euro/corona svedese, sterlina/yen, euro/franco svizzero, sterlina/franco svizzero.

L'indice *BBA option volatility* viene calcolato come media dei valori forniti da primarie istituzioni finanziarie, ovvero: Banque Paribas, Barclays Capital, CSFB, Chase Manhattan, Citibank, JP Morgan, Merrill Lynch, Morgan Stanley, Nat West e UBS.

4.1.3 Mercato dei tassi d'interesse a lungo termine

Il mercato dei tassi d'interesse a lungo termine ha un punto di riferimento importante nel *LIFFE* di Londra, nonostante il suo ruolo sia stato parzialmente ridimensionato, dopo l'introduzione della moneta unica europea, dallo sviluppo del mercato elvetico-tedesco *EUREX*.

I test empirici proposti faranno dunque riferimento ai prezzi di *settlement* relativi ad opzioni sul contratto *Bund future* quotato al *LIFFE*, nel periodo compreso tra l'inizio di dicembre 1997 e la fine di aprile 1999. L'intervallo temporale considerato è particolarmente significativo, in quanto comprende le fasi cruciali della costituzione dell'Unione Monetaria Europea, ovvero la dichiarazione dei primi paesi aderenti e l'introduzione effettiva della moneta unica; i test empirici si riferiscono dunque al mercato dei tassi d'interesse tedesco che costituisce peraltro il parametro migliore per rappresentare i tassi d'interesse europei.

Anche per le opzioni su *Bund future* sono stati impiegati alcuni accorgimenti per garantire alle quotazioni considerate una sufficiente liquidità. In primo luogo si è limitata l'analisi alle opzioni *ATM* e alle quattro opzioni con un livello dello *strike price* superiore e inferiore rispetto al prezzo d'esercizio centrale; in questo caso le quotazioni considerate complessivamente nel periodo corrispondono a 6.660 rilevazioni. In secondo luogo si è deciso di rilevare i prezzi di mercato delle sole opzioni con scadenza corrispondente alle scadenze trimestrali dei rispettivi contratti *future*, con il vincolo di mantenere comunque una vita residua minima pari a sedici giorni lavorativi (la vita residua massima corrisponde invece ad ottanta giorni).

4.1.4 Mercato dei tassi d'interesse a breve

Anche per il mercato dei tassi d'interesse a breve il *LIFFE* costituisce una delle piazze finanziarie più importanti; per i test empirici proposti in questa sezione si farà riferimento ai prezzi di *settlement* relativi alle opzioni sul contratto *Euro lira future* a tre mesi, quotato appunto al *LIFFE*, nel periodo compreso tra l'inizio di febbraio e la fine di novembre 1998. Durante questo intervallo temporale si è gradualmente completata la convergenza dei tassi a

breve italiani verso i livelli "europei"; può dunque risultare interessante monitorare l'evoluzione delle aspettative implicite nei prezzi delle opzioni.

Come per i dati relativi ai tassi d'interesse a lungo termine, per garantire ai premi quotati considerati una sufficiente liquidità, si è limitata l'analisi alle opzioni *ATM* e alle quattro opzioni con un livello dello *strike price* superiore e inferiore rispetto al prezzo d'esercizio centrale; il numero complessivo delle rilevazioni è pari a 3.888. Si è utilizzato altresì, sempre per scopi di liquidità, l'ulteriore accorgimento di rilevare i prezzi di mercato delle sole opzioni con scadenza corrispondente alle scadenze trimestrali dei rispettivi contratti *future*, con il vincolo di mantenere comunque una vita residua minima in questo caso di 32 giorni lavorativi ed una vita residua massima pari a 96 giorni.

Nonostante gli accorgimenti impiegati si è riscontrato in alcuni casi, soprattutto per livelli del prezzo d'esercizio più elevati rispetto allo *strike price ATM*, un prezzo dell'opzione che non rispettava le condizioni di non arbitraggio; si trattava evidentemente di quotazioni di mercato illiquide e dunque non affidabili. Pertanto le volatilità implicite riferite a questi prezzi anomali sono state tralasciate nelle analisi e nelle rappresentazioni grafiche riferite ai tassi d'interesse a breve che seguiranno.

4.2 Rilevazioni empiriche della funzione della volatilità

Per convenienza, consideriamo la più nota anomalia di mercato rispetto al modello classico di *pricing* di Black e Scholes (1973), ovvero il cosiddetto effetto *volatility smile*. Si tratta di rappresentare, a partire dai prezzi di mercato delle opzioni considerate, la funzione della volatilità implicita rispetto alla *moneyness*; il profilo più o meno pronunciato e più o meno simmetrico dello *smile* e la sua evoluzione nel tempo potrà fornire utili elementi interpretativi circa le caratteristiche delle aspettative prevalenti degli operatori di mercato.

4.2.1 Mercato azionario

La rappresentazione della funzione di volatilità implicita rispetto alla *moneyness* di opzioni scritte su indici di mercato azionario costituisce, come si è chiaramente evidenziato nella *survey* della letteratura riportata nelle sezioni precedenti, il test empirico tradizionale. E' noto infatti come la peculiarità dell'effetto *volatility smile* per il mercato azionario sia il profilo generalmente asimmetrico negativo che lo caratterizza dopo il *crash* del 1987.

Come avveniva invariabilmente nelle verifiche empiriche proposte dalla letteratura per l'indice *S&P500*, anche i test empirici effettuati sui prezzi delle opzioni relative all'indice del mercato azionario inglese *FTSE-100* confermano la presenza di un effetto *smile* asimmetrico.

Dalle funzioni della volatilità rappresentate in figura 10, che si riferiscono ad intervalli temporali di rilevazione diversi, è possibile notare che la volatilità implicita nei prezzi delle opzioni *put OTM* è costantemente superiore rispetto ad opzioni *ATM*, così come risulta sempre inferiore la volatilità implicita di opzioni *call OTM*. Inoltre, confrontando i due periodi temporali considerati, è ravvisabile nel complesso un livello di asimmetria piuttosto stabile della funzione della volatilità implicita; gli unici elementi differenziali degni di nota sono, nel secondo caso, una maggiore sottovalutazione delle opzioni *call OTM* ed una maggiore uniformità, nell'ambito del periodo, delle funzioni della volatilità implicita.

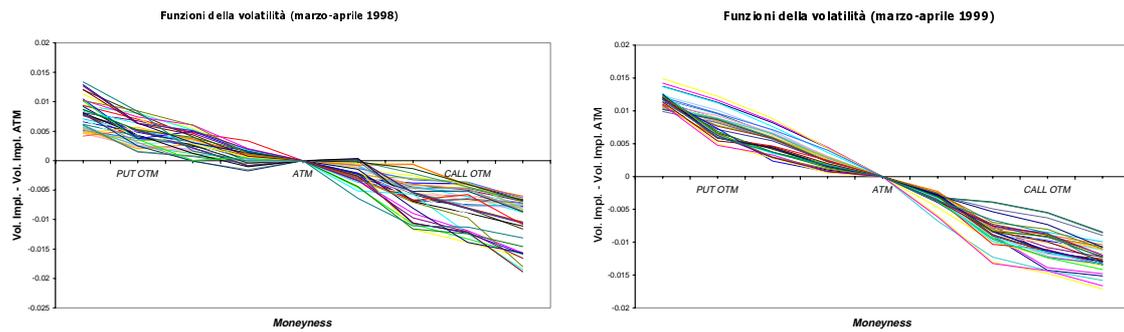


Figura 10: Funzione della volatilità implicita rispetto alla *moneyness* per opzioni su *FTSE-100*.

Utilizzando i prezzi di mercato di opzioni *put* per livelli di *strike price* inferiori al livello *ATM* ed i prezzi di opzioni *call* per prezzi d'esercizio superiori, si sono rilevate le volatilità implicite per nove livelli di *strike price* nei mesi di marzo e aprile del 1998 e del 1999. Allo scopo di ottenere una rappresentazione non influenzata dalla variazione del livello della volatilità nel tempo, ogni funzione è stata elaborata calcolando la differenza della volatilità implicita ottenuta rispetto al livello *ATM*; quest'ultimo valore è stato determinato come media di una *call* e di una *put ATM*. In ogni caso la scadenza delle opzioni considerate è rimasta compresa in un intervallo tra i 36 e gli 80 giorni.

(elaborazioni su dati fonte Datastream)

Anche per le opzioni sull'indice del mercato azionario italiano Mib30 si riscontra lo stesso modello di comportamento. In questo caso, come si è visto nel paragrafo 4.1.1, i prezzi delle opzioni si riferiscono alle quotazioni rilevate nel corso delle contrattazioni anziché ai prezzi di *settlement* e la scadenza considerata non coincide con quella del contratto *future*.

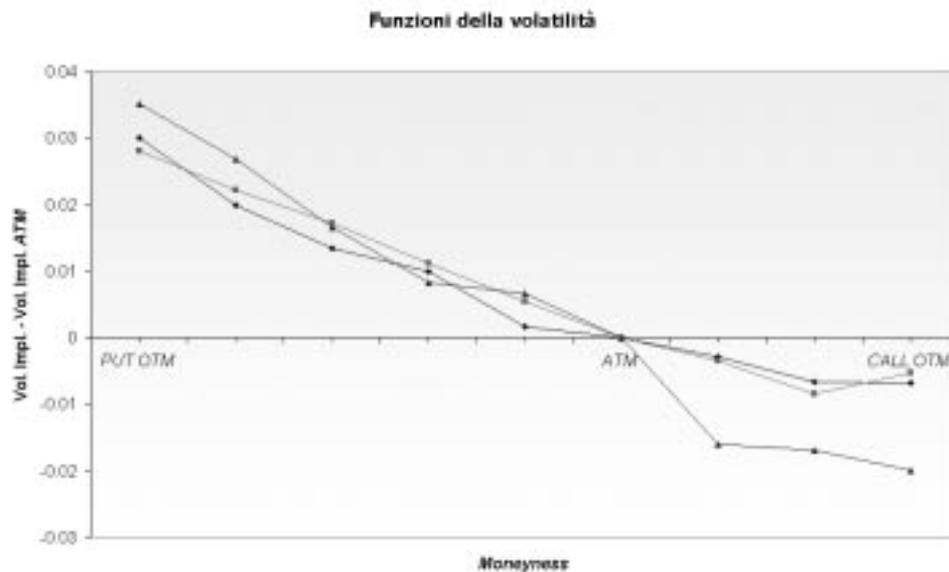


Figura 11: Funzione della volatilità implicita rispetto alla *moneyness* per opzioni *MIBO30*.

La funzione rappresentata è stata costruita calcolando la volatilità implicita nei prezzi di mercato di opzioni *put OTM* per livelli di *strike price* inferiori o uguali al livello *ATM* e nei prezzi di opzioni *call OTM* per livelli superiori. Ci si riferisce a tre giornate campione scelte nella seconda metà di luglio 1999 per opzioni con scadenza agosto. Affinché il confronto non sia influenzato dalle variazioni del livello della volatilità nel tempo, si rappresenta la differenza tra il valore della volatilità implicita ottenuto ed il valore *ATM*.

(elaborazioni su dati fonte Reuters)

Come è possibile notare in figura 11, la funzione della volatilità evidenzia in primo luogo un profilo nettamente asimmetrico negativo, caratterizzato da differenze di volatilità tra opzioni *put OTM* ed opzioni *ATM* decisamente superiori rispetto al mercato inglese. In secondo luogo è ravvisabile una maggiore intensità di dati di mercato per quotazioni inferiori al livello *ATM*³; questa evidenza corrisponde ragionevolmente all'utilizzo delle opzioni nell'ambito del *portfolio management*: al ruolo essenziale svolto dalle opzioni *put OTM* per scopi di assicurazione del portafoglio non corrisponde una funzione altrettanto importante e dunque una liquidità paragonabile delle opzioni *call OTM*.

4.2.2 Mercato dei cambi

Può sembrare problematico rappresentare una funzione della volatilità implicita rispetto alla *moneyness* nell'ambito di un mercato, come quello delle opzioni valutarie *OTC*, nel quale viene convenzionalmente quotata la sola volatilità implicita *ATM*; in effetti per una rappresentazione minimale sono necessari almeno tre punti.

E' possibile sopperire a queste lacune sfruttando le quotazioni delle combinazioni *risk reversal* e *strangle*, che sono tipiche del mercato *OTC*. Infatti, a partire dalla conoscenza delle formulazioni di ogni combinazione esemplificate nelle precedenti sezioni del *paper*, possiamo scrivere un sistema di tre equazioni nelle tre incognite relative ai livelli di volatilità implicita richiesti:

$$\begin{cases} \sigma^{(0,50Delta)} = ATM \\ \sigma^{(0,25Delta)} - \sigma^{(0,75Delta)} = RR \\ \left(\sigma^{(0,25Delta)} + \sigma^{(0,75Delta)} \right) / 2 - \sigma^{(0,50Delta)} = STR \end{cases}$$

Sostituendo alle volatilità le corrispondenti funzioni di *Delta*, *ATM*, *RR*, *STR* (vedi sopra 3.1.2), dopo pochi passaggi si ottengono le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} \sigma^{(0,25Delta)} = ATM + STR - RR/2 \\ \sigma^{(0,50Delta)} = ATM \\ \sigma^{(0,75Delta)} = ATM + STR + RR/2 \end{cases}$$

A questo punto utilizziamo le soluzioni ottenute per comporre la funzione della volatilità per sei tassi di cambio rappresentativi. Come è possibile notare in figura 12, in tutti i casi l'ipotesi di volatilità costante non è considerata valida dal mercato, che manifesta livelli di volatilità implicita diversi rispetto alla *moneyness* dell'opzione.

E' presente dunque l'effetto *volatility smile*, che si presenta, a seconda del sottostante considerato, con profili decisamente asimmetrici negativi (ad esempio per il cambio dollaro/yen oppure euro/yen), con profili piuttosto simmetrici (ad esempio euro/dollaro) o con profili asimmetrici positivi (ad esempio euro/sterlina).

Il caso più eclatante è certamente quello dei cambi contro yen che, oltre ad evidenziare livelli di volatilità implicita pari quasi al doppio della media dei rimanenti sottostanti analizzati, riflettono l'attribuzione da parte degli operatori di una probabilità relativamente elevata all'evento di apprezzamento della valuta giapponese.

³ Questo aspetto non sarebbe potuto emergere nei test empirici riguardanti il mercato azionario inglese, dal momento che in quel caso il criterio standard nella scelta delle opzioni impone di considerare, a prescindere dai prezzi effettivamente quotati, le sole quattro opzioni con prezzo superiore ed inferiore rispetto al livello *ATM*.

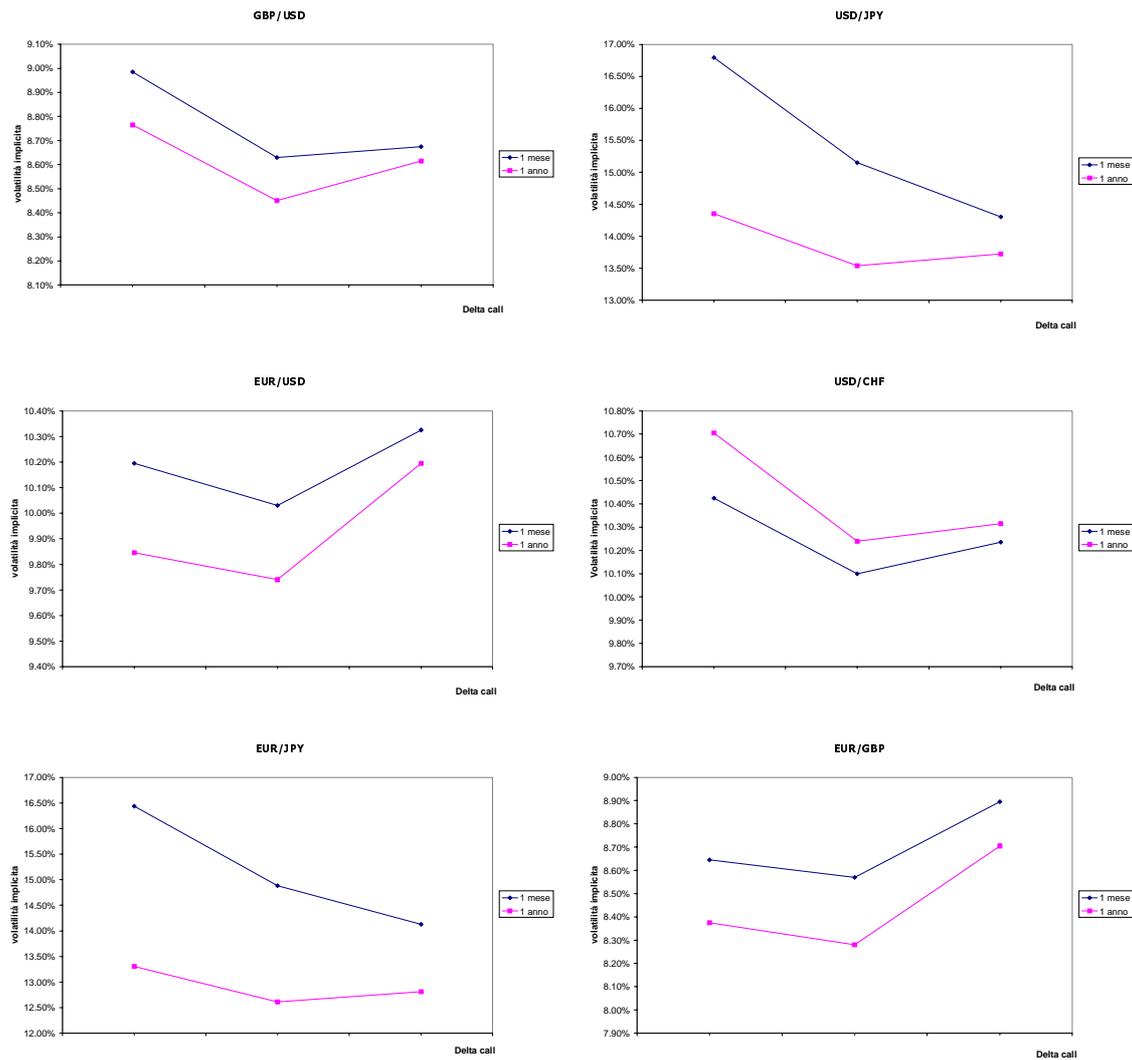


Figura 12: Funzioni della volatilità implicita per sei tassi di cambio rappresentativi.

Si rappresenta il livello di volatilità, ottenuto con le semplici equazioni svolte poco prima in questo paragrafo, per le scadenze pari ad un mese e ad un anno implicite nel *fixing BBA* del 18 agosto 1999; come è noto il *fixing* si riferisce alla volatilità implicita *ATM forward*, alla combinazione *risk reversal* e alla combinazione *strangle*.

(elaborazioni su dati fonte Reuters BBA)

A questo punto potrebbe essere interessante verificare proprio per i tassi di cambio contro yen le evidenze di aspettative di tipo estrapolativo emerse nella letteratura. In altre parole si tratta di verificare in primo luogo se le aspettative di apprezzamento della valuta giapponese si sono effettivamente realizzate nel periodo successivo alla rilevazione della funzione della volatilità implicita; in secondo luogo, se tale evento si è effettivamente verificato, è possibile analizzare quale effetto questo abbia prodotto nella funzione della volatilità.

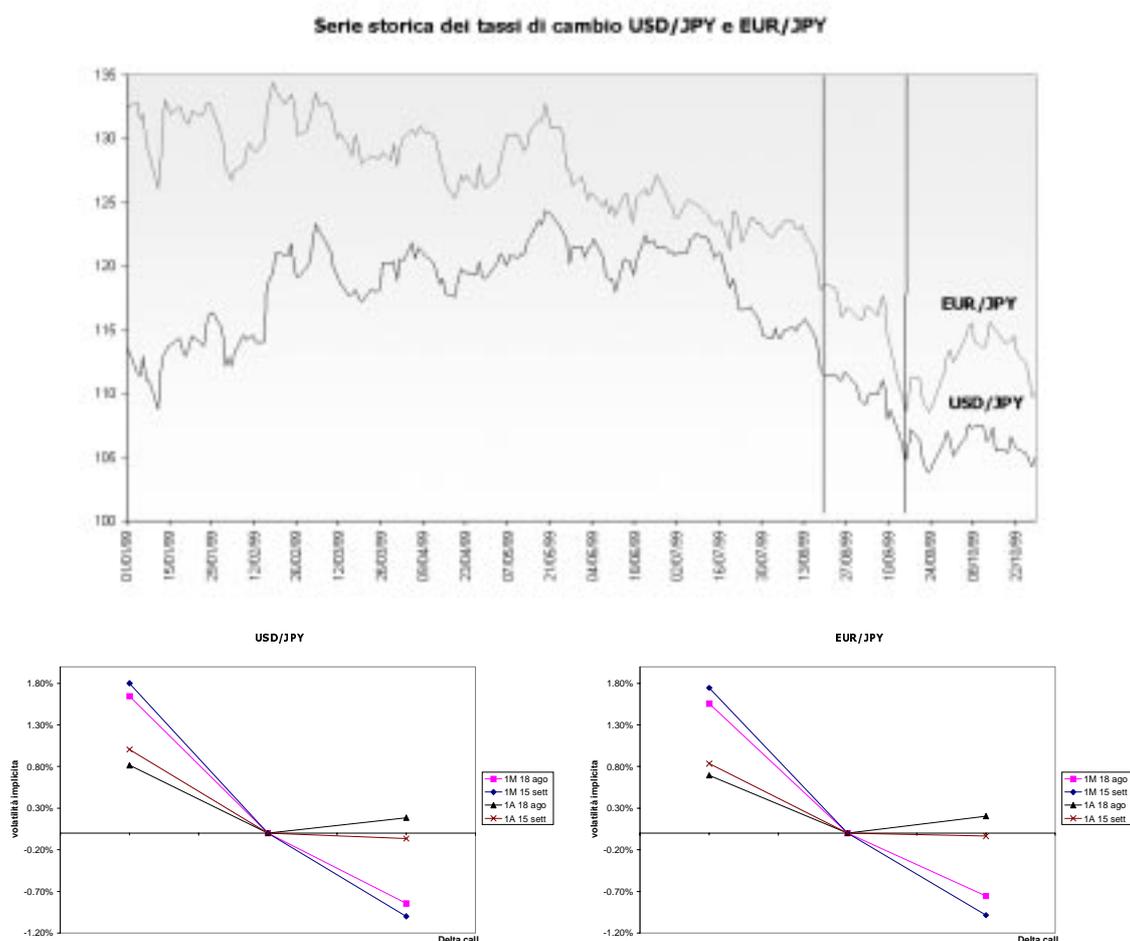


Figura 13: Andamento del cambio dollaro/yen euro/yen ed evoluzione dello *smile*.

Si rappresenta in primo luogo la serie storica dei tassi di cambio di dollaro ed euro contro yen nel corso del 1999; il periodo oggetto d'interesse è compreso tra le due rette verticali.

In secondo luogo si rileva la funzione della volatilità in corrispondenza del *fixing BBA* del 18 agosto e del 15 settembre 1999, per opzioni su dollaro/yen ed euro/yen, nelle scadenze ad un mese e ad un anno; tale funzione si rappresenta come differenza del valore di volatilità implicita ottenuto rispetto al livello *ATM*, allo scopo di ottenere un'esposizione indipendente dalla variazione dal livello della volatilità nel tempo.

(elaborazioni su dati fonte Datastream Reuters BBA)

Osservando la serie storica dei tassi di cambio di dollaro ed euro contro yen rappresentata in figura 13, si nota innanzitutto che le aspettative di apprezzamento della valuta giapponese, espresse nella funzione della volatilità rilevata il 18 agosto 1999, si manifestano dopo che la stessa moneta si è già rafforzata in termini rilevanti nel corso dei due mesi precedenti (giugno e luglio 1999). Questo primo elemento depone certamente a favore dell'ipotesi di presenza di aspettative di tipo estrapolativo nel mercato dei cambi, in quanto il rialzo dello yen determina, nelle attese implicite nei prezzi delle opzioni del 18 agosto, aspettative di ulteriori apprezzamenti.

In secondo luogo è possibile notare che le attese di ulteriore rafforzamento dello yen effettivamente si realizzano nel corso del mese successivo; questo non si rivela peraltro sufficiente per modificare la funzione della volatilità implicita rilevata il 15 settembre, che continua ancora ad esprimere lo stesso *bias*. Quanto osservato è coerente con molte evidenze empiriche presenti in letteratura che documentano la natura estrapolativa delle aspettative nel

mercato dei cambi nel periodo esaminato; un apprezzamento dello yen rende più probabile un ulteriore apprezzamento rispetto all'evento contrario.

Passiamo ora ad analizzare la *term structure* della volatilità implicita. In questo caso l'analisi si può svolgere in due direzioni principali; in primo luogo è possibile costruire la struttura a termine in modo molto semplice utilizzando i dati relativi alla volatilità implicita *ATM* per tutte le scadenze disponibili. In secondo luogo è possibile monitorare il profilo della funzione della volatilità sulle diverse scadenze allo scopo di apprezzarne il diverso grado di curvatura e dunque in un certo senso la differente intensità delle anomalie valutative di mercato.

Nell'ambito del primo approccio d'analisi si rileva, come viene evidenziato in figura 14, una certa difformità nelle *term structure* osservate in diversi periodi temporali. In effetti, anche in relazione al medesimo tasso di cambio sottostante, si notano strutture moderatamente crescenti che dopo un certo numero di mesi divengono spiccatamente decrescenti; l'evidenza di una *term structure* che cambia periodicamente pendenza corrisponde peraltro a fenomeni già rilevati in letteratura⁴.

Inoltre, per tutti i casi rappresentati, le differenze più rilevanti tra le volatilità riferite a diversi orizzonti temporali sono riscontrabili nel breve periodo; per scadenze superiori ai sei mesi le divergenze rispetto all'ipotesi di volatilità costante nel tempo del modello di Black e Scholes (1973) possono essere considerate trascurabili.

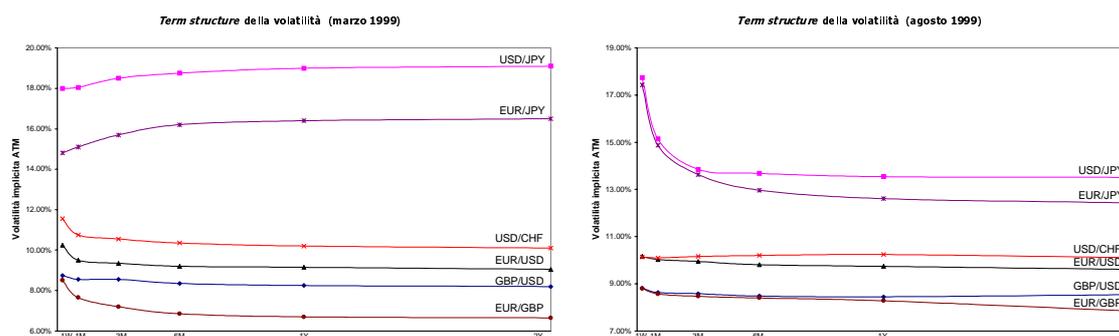


Figura 14: Struttura a termine della volatilità implicita *ATM* per opzioni valutarie.

Si rappresenta la volatilità implicita *ATM* per sei tassi di cambio rappresentativi, per le scadenze che vanno da un minimo di una settimana ad un massimo di due anni; i dati di mercato si riferiscono al *fixing* della *BBA* in data 17 marzo 1999 ed in data 18 agosto 1999.

(elaborazioni su dati fonte Reuters - BBA)

Nell'ambito della seconda direzione d'analisi della struttura a termine della volatilità, possiamo agevolmente rappresentare i profili dello *smile* per diverse scadenze (si veda la figura 15). Innanzitutto si nota come anche da questa rappresentazione sia possibile determinare la *term structure* della volatilità implicita *ATM*; nell'esempio considerato tale struttura è decrescente per entrambi i tassi di cambio presi in esame. In secondo luogo, coerentemente con la letteratura citata e approfondita nel paragrafo 2.5.2, la curvatura e dunque l'asimmetria della funzione della volatilità decresce con l'incremento della scadenza dell'opzione. E' dunque ragionevole ipotizzare minori inesattezze del modello classico nel *pricing* di opzioni *OTM* quanto più lontana nel tempo è la scadenza che le caratterizza.

⁴ Si veda a titolo di esempio l'articolo di Campa e Chang (1995) approfondito nel paragrafo 2.5.2 di questo *paper*.

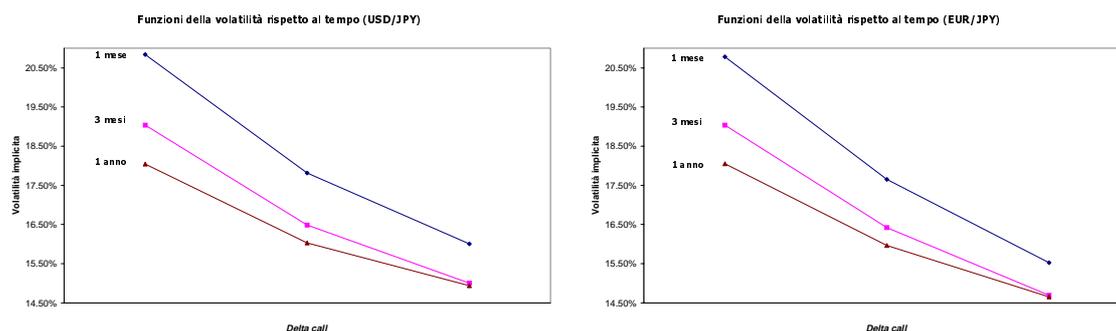


Figura 15: Funzioni della volatilità rispetto alla scadenza dell'opzione.

Si rappresentano le funzioni della volatilità implicita per sottostanti costituiti dai tassi di cambio dollaro/yen ed euro/yen. La costruzione della funzione avviene a partire dalle usuali rilevazioni di volatilità implicita *ATM*, *risk reversal* e *strangle* osservate in data 15 settembre 1999, per opzioni con scadenza un mese, tre mesi ed un anno, utilizzando la metodologia descritta all'inizio di questo paragrafo.

(elaborazioni su dati fonte Reuters - BBA)

4.2.3 Mercato dei tassi d'interesse a lungo termine

Il periodo considerato per l'analisi del mercato dei tassi d'interesse a lungo, come si è visto nel paragrafo 4.1.3, ha una particolare valenza interpretativa, in quanto si riferisce al periodo precedente ed immediatamente successivo all'introduzione della moneta unica europea. Potrebbe dunque rivelarsi interessante verificare la presenza di *pattern* particolari nella funzione delle volatilità implicite per caratterizzare in questo modo le aspettative.

L'aspetto più rilevante che si riscontra nei grafici rappresentati in figura 16 è la presenza di una funzione della volatilità implicita caratterizzata da un profilo invariabilmente asimmetrico negativo, come accadeva per le opzioni su indici di mercato azionario, in tutti i sottoperiodi considerati. Anche in questo caso la spiegazione più convincente del fenomeno sembra essere l'attività di *portfolio insurance* che gli operatori di mercato effettuano, attraverso una domanda ricorrente di opzioni *put OTM*, allo scopo di proteggere i portafogli dal rialzo dei tassi d'interesse.

Un secondo aspetto degno di nota è relativo alla differente intensità dell'asimmetria che caratterizza la funzione della volatilità nei diversi sottoperiodi considerati; in termini specifici è evidente la maggiore regolarità e la minore asimmetria che caratterizza gli ultimi mesi del 1998 ed i primi del 1999. È possibile affermare dunque che nel periodo corrispondente all'introduzione della moneta unica europea (appunto tra fine 1998 e inizio 1999), l'avversione al rischio di rialzo dei tassi d'interesse si è relativamente ridotta.

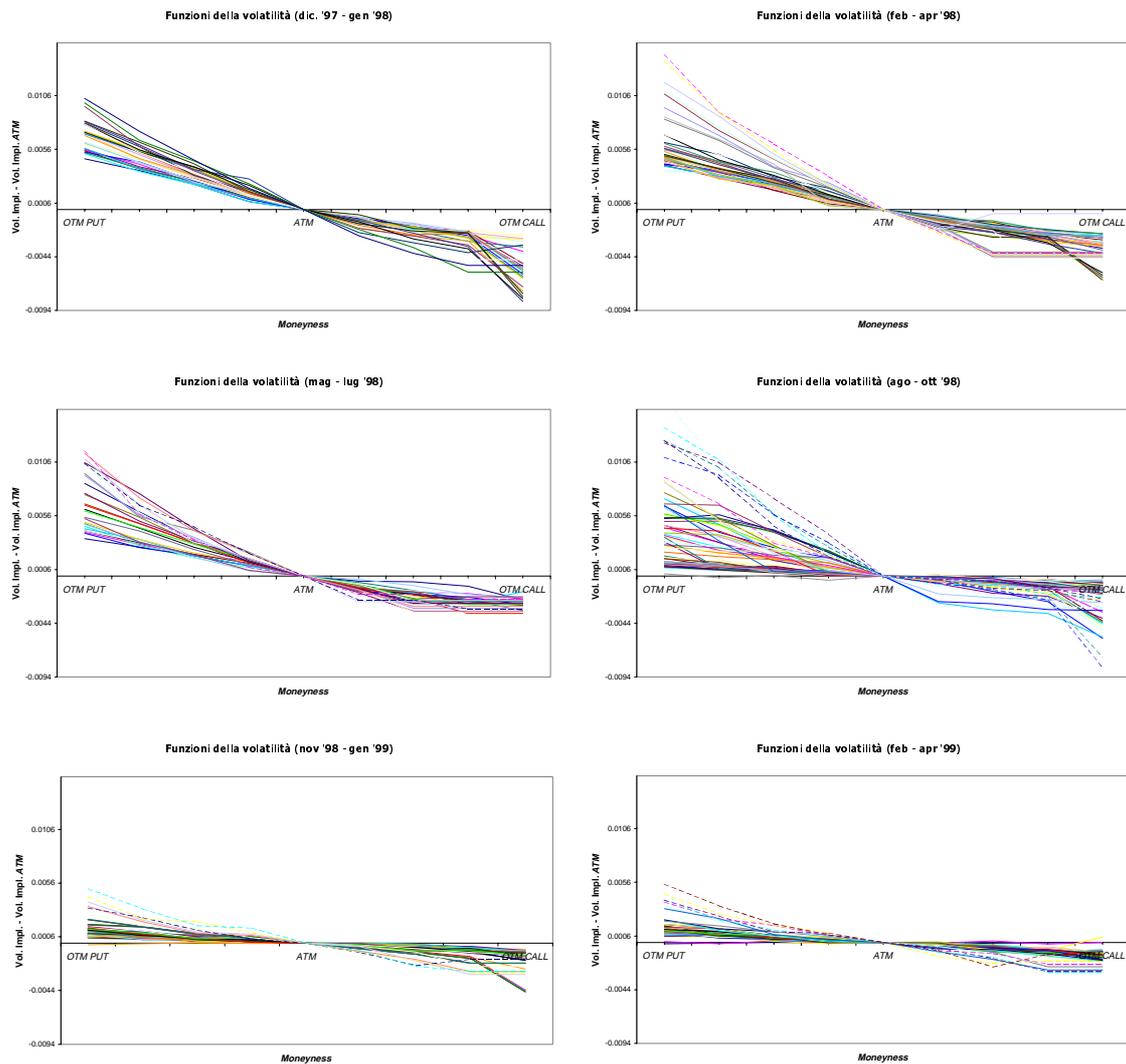


Figura 16: Funzione della volatilità implicita rispetto alla *moneyness* per opzioni su *Bund future*.

Si sono rilevate le volatilità implicite per nove livelli di *strike price* per ogni giornata del periodo compreso tra l'inizio di dicembre 1997 e la fine di aprile 1999. Come nelle esemplificazioni precedenti, per ottenere una rappresentazione che non sia influenzata dalla variazione del livello della volatilità nel tempo, si è elaborata la funzione come differenza tra il valore di volatilità implicita ottenuto ed il livello *ATM*. Al fine di monitorare l'evoluzione della funzione della volatilità rispetto alla *moneyness*, si è diviso l'arco temporale considerato in sei sottoperiodi, in ognuno dei quali si osservano opzioni con vita residua compresa tra 16 e 81 giorni.

(elaborazioni su dati fonte Datastream)

Il terzo elemento importante da considerare è la presenza, in alcuni casi, di funzioni della volatilità piuttosto isolate rispetto all'insieme prevalente delle altre funzioni; tale aspetto diviene ancora più significativo se si riscontra per livelli di *moneyness* inferiori rispetto ad un livello *ATM*. Potrebbe risultare interessante approfondire la natura di questo fenomeno. Se si tratta di cambiamenti rilevanti nelle aspettative, è utile ricollegare il momento in cui questo si verifica a specifici eventi economici accaduti per ottenere importanti elementi interpretativi. Se al contrario si tratta semplicemente di un effetto della rappresentazione impiegata, che non distingue la vita residua delle opzioni di cui si calcola la volatilità implicita, pur entro determinati vincoli di durata minima e massima, la presenza di funzioni della volatilità isolate

potrebbe essere determinata dalla *term structure* della volatilità, che implica generalmente un'asimmetria più pronunciata per una vita residua più breve.

E' agevole approfondire innanzitutto quest'ultimo aspetto, rappresentando le funzioni della volatilità implicita separatamente rispetto alla vita residua; questo procedimento non è altro che un modo per analizzare la struttura a termine della volatilità. Come si può notare dalla rappresentazione di figura 17, l'asimmetria della funzione della volatilità cresce al diminuire della vita residua dell'opzione e subisce un incremento molto rilevante quando si considera un orizzonte temporale di venti giorni; inoltre tali evidenze empiriche si riconfermano con poche varianti nell'intera serie di dati considerata. La presenza di funzioni della volatilità piuttosto isolate è dunque interpretabile in relazioni agli effetti prodotti dalla *term structure*, piuttosto che per via di variazioni rilevanti nelle aspettative. Infine l'attività di copertura dal rischio di rialzo dei tassi, che abbiamo generalmente identificato come determinante principale dell'asimmetria nella funzione di volatilità, sembra essere concentrata sui contratti con scadenza più ravvicinata.

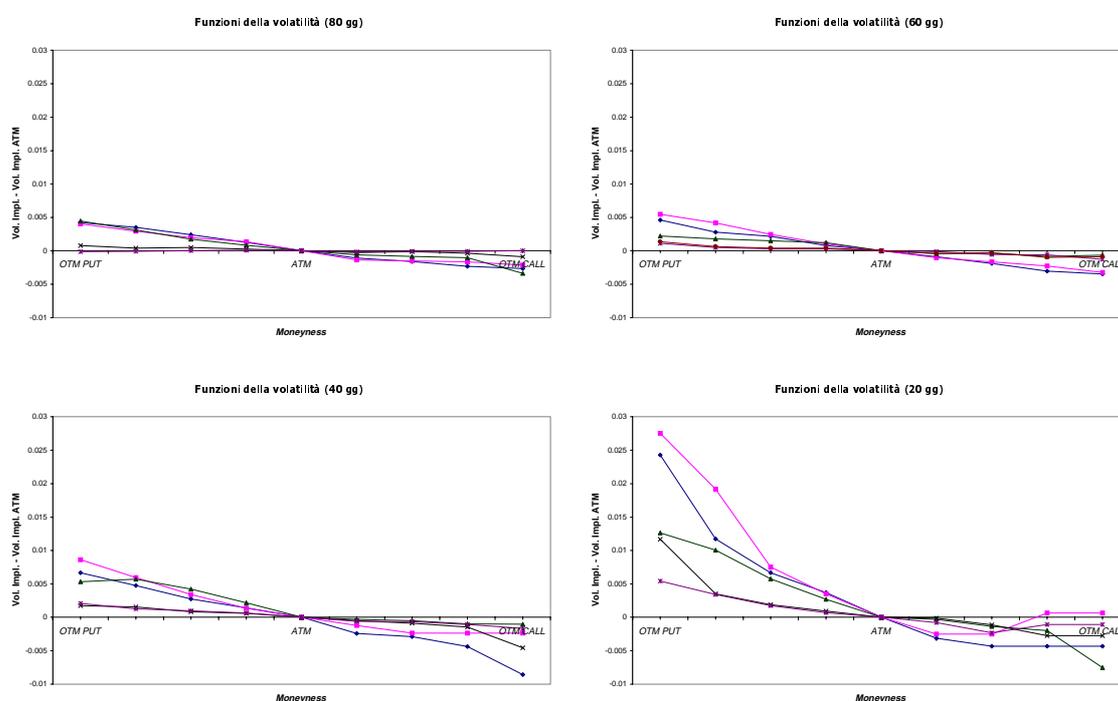


Figura 17: Funzioni della volatilità implicita divise per vita residua di opzioni su *Bund future*.

Nella serie dei prezzi di mercato di opzioni su *Bund future* per il periodo compreso tra dicembre 1997 ed aprile 1999 sono state isolate e rappresentate separatamente le funzioni della volatilità implicita rispetto alla *moneyness* per opzioni con vita residua rispettivamente di 80, 60, 40 e 20 giorni. Per facilitare il confronto, come nelle figure presentate in precedenza, si è considerata la differenza della volatilità implicita espressa dall'opzione rispetto al livello di volatilità *ATM*.

(elaborazioni su dati fonte Datastream)

4.2.4 Mercato dei tassi d'interesse a breve termine

Lo studio del comportamento del mercato dei tassi d'interesse a breve termine rilevabile nei prezzi delle opzioni su *Euro lira future* può rivelarsi interessante per verificare se, nel corso del 1998, l'imminente introduzione della moneta unica ed il conseguente scenario di convergenza verso un livello più ridotto dei tassi d'interesse, fosse pienamente scontato nelle aspettative di mercato e dunque non fosse percepito dagli operatori di mercato nessun rischio di tensione finanziaria con conseguente rialzo dei tassi. Rispetto alle considerazioni espresse nel paragrafo

precedente per il mercato dei tassi d'interesse a lungo termine, in questo caso il collegamento con l'orientamento di politica monetaria è più immediato.

Rappresentiamo innanzitutto l'usuale funzione della volatilità implicita rispetto alla *moneyness* dell'opzione. Il livello di volatilità meno elevato che caratterizza il comparto dei tassi d'interesse a breve termine determina una minore liquidità delle opzioni con *strike price deep OTM* o *ITM*; per questo motivo la rappresentazione delle funzioni della volatilità risulta frequentemente incompleta, soprattutto per i livelli di prezzo d'esercizio superiori rispetto al prezzo *ATM*. Come si nota in figura 18 sono comunque prevalenti *volatility smile* con pronunciata asimmetria negativa, seppur relativamente ad eccessi di volatilità inferiori, nel peggiore dei casi, a 0,50 punti percentuali.

Funzioni della volatilità

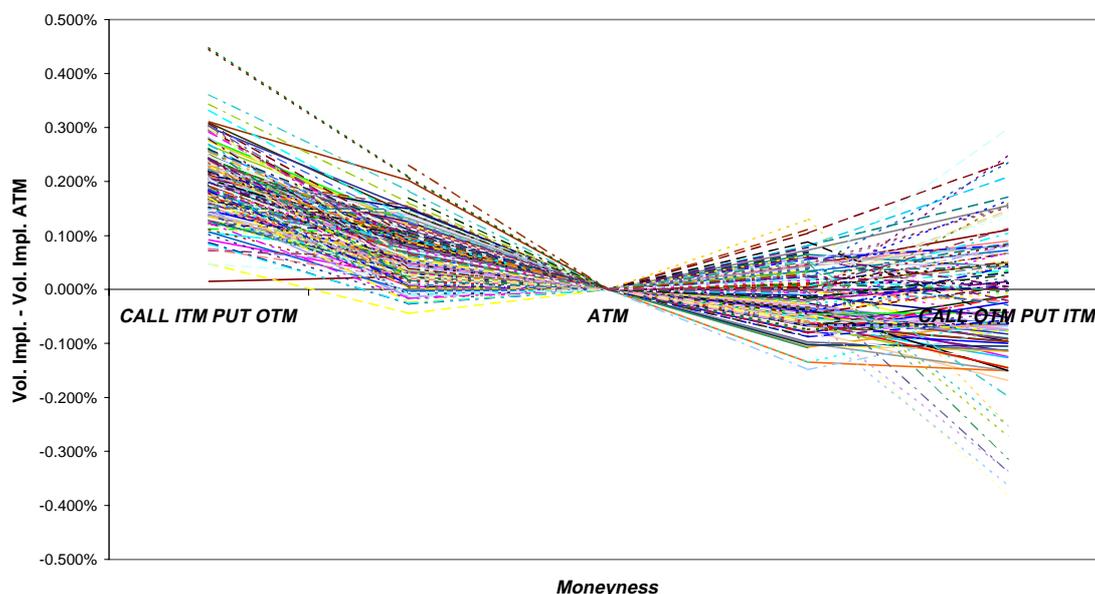


Figura 18: Funzione della volatilità implicita per opzioni su *Eurodollar future*.

Si rappresentano le funzioni della volatilità implicita rispetto alla *moneyness* per opzioni quotate nel periodo compreso tra febbraio e novembre 1998, con durata residua compresa tra 97 e 32 giorni. Come negli esempi precedenti, per escludere l'effetto della variazione del livello della volatilità nel tempo, si considera la differenza rispetto alla misura di volatilità *ATM*. La volatilità implicita è stata calcolata come media delle volatilità di opzioni *call* e *put* per lo stesso grado di *moneyness*.

(elaborazioni su dati fonte Datastream)

Verifichiamo a questo punto se il livello dell'asimmetria negativa è riconducibile alla vita residua dell'opzione, come avveniva in effetti per i tassi d'interesse a lungo termine, oppure se è riscontrabile in questo caso un'evoluzione che corrisponde a cambiamenti nelle aspettative per eventi specifici.

Dall'analisi della vita residua non emergono apprezzabili differenze nell'asimmetria dello *smile*; si osservano diversi profili della funzione della volatilità indipendentemente dalla scadenza dell'opzione. Analizziamo dunque alcune giornate significative nell'ambito del periodo considerato, allo scopo di rilevare potenziali effetti sulle aspettative degli operatori determinati da particolari eventi economici.

Consideriamo ad esempio le quotazioni delle opzioni *EuroIira* nel periodo immediatamente precedente e successivo alla dichiarazione, avvenuta il 3 maggio 1998 da parte del Consiglio dell'Unione Europea, degli Stati membri che, avendo rispettato le condizioni previste dal trattato di Maastricht, avrebbero partecipato dall'inizio alla terza fase dell'Unione economica e monetaria. Osservando le funzioni della volatilità rappresentate in figura 19 (sinistra), si nota un incremento della curvatura dello *smile* prima della dichiarazione ed un ritorno sui livelli precedenti dopo il 3 maggio; in termini di funzione di densità del sottostante, questo determina un incremento della curtosi della distribuzione che corrisponde ad una percezione di maggiore probabilità di eventi estremi. Considerando peraltro la ridotta entità delle differenze di volatilità, è possibile interpretare questa evidenza empirica come partecipazione in gran parte scontata dell'Italia all'Unione economica e monetaria.

Un altro evento che potrebbe aver avuto effetti apprezzabili sulle aspettative degli operatori può essere considerato l'annuncio, in data 13 ottobre 1998 da parte del Consiglio direttivo della Banca Centrale Europea, dei principali elementi della strategia di politica monetaria. Analizziamo le funzioni della volatilità nel periodo precedente e successivo; si nota in questo caso un incremento dell'asimmetria negativa. Interpretando questa evidenza empirica in termini di funzione di densità del sottostante, possiamo immaginare che gli operatori di mercato dopo l'annuncio abbiano assegnato implicitamente una minore probabilità di accadimento a riduzioni dei tassi d'interesse a breve.

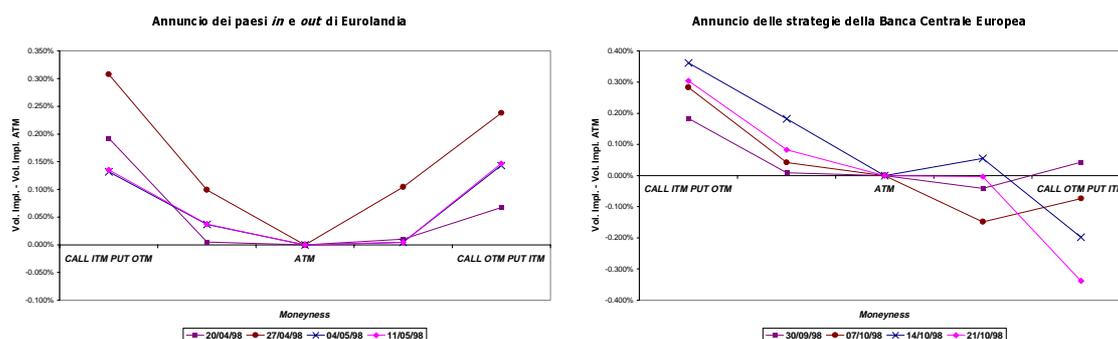


Figura 19: Funzione della volatilità implicita per opzioni su *EuroIira future*.

Si rappresentano le funzioni della volatilità implicita rispetto alla *moneyness* per opzioni quotate nelle due settimane precedenti e successive agli eventi considerati: 3 maggio 1998 nel grafico di sinistra e 13 ottobre 1998 nel grafico di destra. La durata residua delle opzioni considerate è compresa nel primo caso tra 96 e 41 giorni, nel secondo caso tra 54 e 39 giorni.

(elaborazioni su dati fonte Datastream)

4.3 Estrazione della distribuzione di probabilità implicita

Nell'ambito di questo paragrafo si esemplificano, mediante alcuni test empirici, le modalità attraverso le quali è possibile tradurre nella forma della distribuzione di probabilità dei prezzi del sottostante i fenomeni già osservati descrivendo la funzione di volatilità rispetto alla *moneyness* dell'opzione. Si concentra l'attenzione sugli approcci che, pur richiedendo elaborazioni quantitative di semplice implementazione, forniscono risultati significativi.

Il primo approccio utilizzato nei test empirici corrisponde a quello che è stato definito nella sezione precedente come "approccio degli istogrammi"; l'intensità di dati di mercato necessaria per un'implementazione significativa dal punto di vista economico ne limita il campo d'applicazione ad attività finanziarie sottostanti rappresentate da indici di mercato azionario.

Il secondo approccio corrisponde alla costruzione di una distribuzione di probabilità che interpreti la volatilità implicita come funzione deterministica della *moneyness* dell'opzione; per ottenere una funzione di densità completa, soprattutto considerando l'importanza che riveste una corretta definizione delle probabilità nelle code della distribuzione, è necessario disporre di rilevazioni che rappresentino un ampio *range* di livelli di *moneyness*. Per questi motivi, anche per questo approccio, ci si riferirà innanzitutto al mercato azionario; le peculiarità del mercato delle opzioni valutarie *OTC*, che quotano abitualmente le combinazioni *risk reversal* e *strangle* riferite a livelli di *moneyness* standard, permetteranno peraltro di proporre una versione dello stesso approccio al mercato dei cambi, nonostante siano disponibili solamente tre rilevazioni.

4.3.1 Approccio degli istogrammi

Il pregio dell'approccio degli istogrammi, che in questo paragrafo viene utilizzato per estrarre la funzione di densità *risk neutral* dai prezzi delle opzioni sull'indice Mib30, è relativo alla sua natura non parametrica. Infatti l'implementazione è del tutto indipendente da qualsiasi ipotesi sul processo stocastico di prezzo del sottostante e dunque sull'evoluzione della volatilità; si tratta di effettuare semplici operazioni utilizzando esclusivamente i prezzi di mercato delle opzioni. Infatti, come è noto dalla sezione precedente, è possibile costruire una distribuzione di probabilità discreta impiegando un insieme di valori di combinazioni *butterfly*; questo non costituisce altro che un modo per ottenere un'approssimazione della derivata seconda del prezzo dell'opzione rispetto allo *strike price*.

Le distribuzioni di probabilità discrete ottenute con l'approccio degli istogrammi sono rappresentate in figura 20. In entrambi i casi non sembra che esse siano agevolmente approssimabili con una distribuzione di tipo lognormale; in effetti le probabilità per le possibili realizzazioni di prezzo del sottostante sono assegnate in modo piuttosto irregolare ed è evidente una pronunciata asimmetria. Appare peraltro abbastanza problematico esprimere un giudizio sull'evoluzione delle aspettative degli operatori nell'arco di tempo considerato sulla base dell'analisi delle rappresentazioni ottenute; il pregio dell'approccio degli istogrammi, associato alla sua natura non parametrica, si deve dunque mettere a confronto con un *output* poco raffinato e molto sensibile a problemi di sincronia nella rilevazione dei dati di *input*.

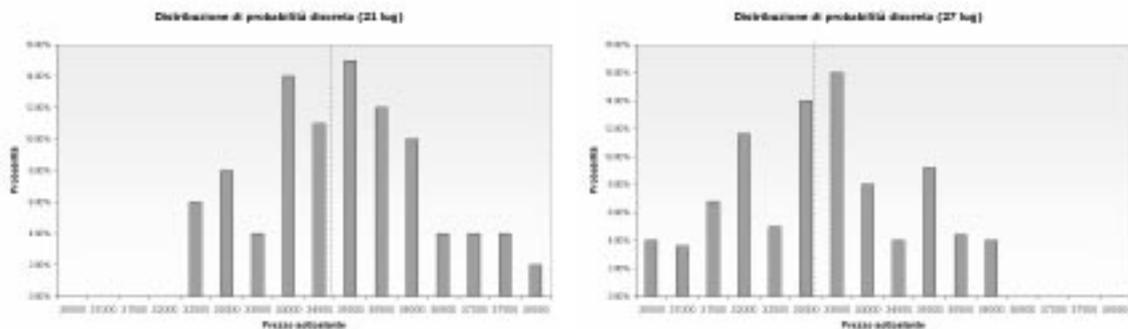


Figura 20: Distribuzioni di probabilità implicite nei prezzi delle opzioni Mib30.

Le aree di probabilità rappresentate dagli istogrammi si determinano dal valore delle combinazioni *butterfly* impostate utilizzando prezzi di opzioni *put (call)* per prezzi d'esercizio uguali o inferiori (superiori) rispetto al prezzo *forward*. Le rilevazioni si riferiscono a quotazioni di mercato *intraday* (sono stati esclusi prezzi non sincroni o illiquidi) registrate il 21 luglio ed il 27 luglio 1999; la retta verticale tratteggiata in entrambi i grafici rappresenta il prezzo di mercato del contratto *future* sull'indice Mib30.

La sommatoria delle aree di probabilità descritte da ogni specifico istogramma è pari nella distribuzione del 21 luglio al 90% e nella distribuzione del 27 luglio al 94%; il residuo 10% e 6%, attribuibile alle code delle distribuzioni, non è suddivisibile in termini oggettivi tra prezzi del sottostante estremamente alti o estremamente bassi.

(elaborazione su dati fonte Reuters)

Per ottenere dall'approccio degli istogrammi utili elementi interpretativi sull'evoluzione nel tempo delle aspettative degli operatori è necessario implementare un'ulteriore fase di analisi volta a sintetizzare in termini più intelligibili le evidenze emerse; a questo scopo possono rivelarsi utili le tipiche misure di statistica descrittiva, nell'ambito delle quali è indicato il campo di variazione interquartile, oppure rappresentazioni grafiche più compatte, che raggruppino le rilevazioni per classi⁵.

In figura 21 si osserva un esempio di quest'ultima elaborazione; le stesse aree di probabilità degli istogrammi di figura 20 sono state raggruppate in base alla *moneyness* del prezzo del sottostante a cui si riferiscono. L'obiettivo è quello di individuare in primo luogo un'area di prezzi del sottostante tendenzialmente *ATM*, in secondo luogo due aree intermedie *OTM* e *ITM* ed infine due aree estreme *OTM* e *ITM*. Mentre dalle rappresentazioni analitiche era difficile ottenere elementi utili per interpretare l'evoluzione del mercato, il grafico per classi evidenzia subito in modo chiaro utili termini di confronto tra le due distribuzioni; in particolare si nota come, nell'arco di una settimana, le probabilità assegnate a realizzazioni di prezzo del sottostante al ribasso siano aumentate.

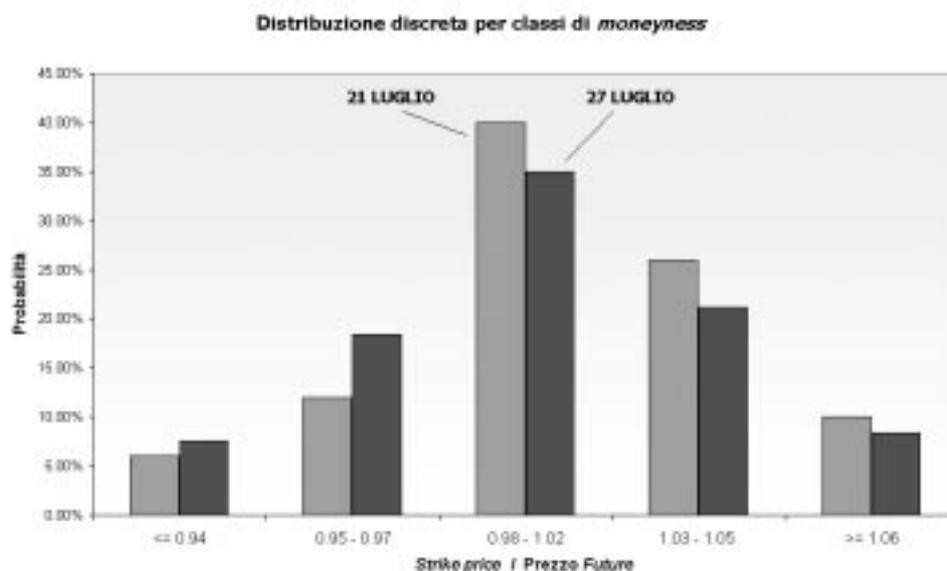


Figura 21: Distribuzione di probabilità discreta per classi dell'indice Mib30.

Le probabilità implicite nelle combinazioni di opzioni *butterfly* osservate il 21 ed il 27 luglio 1999 vengono raggruppate in cinque classi di *moneyness*; in questo caso specifico il livello di *moneyness* dell'opzione si ottiene rapportandone il prezzo d'esercizio alla quotazione del contratto *future* sul sottostante. La rappresentazione utilizza gli stessi dati di *input* del grafico di figura 20.

4.3.2 Funzioni deterministiche della volatilità

Nell'ambito di questo paragrafo viene stimata la distribuzione di probabilità dei prezzi del sottostante, implicita nei prezzi di mercato delle opzioni, impiegando l'approccio che, tra quelli proposti dalla letteratura ed approfonditi nelle sezioni precedenti, si avvicina maggiormente alle

⁵ In realtà la distinzione tra campo di variazione interquartile e grafico per classi è artificiosa, in quanto in entrambi i casi si misura la probabilità associata ad uno specifico intervallo di prezzi del sottostante. La differenza è relativa semplicemente alla rappresentazione: infatti nel primo caso viene generalmente monitorata l'evoluzione nel tempo della probabilità in uno specifico intervallo, mentre nel secondo caso si rappresenta graficamente la probabilità per tutti gli intervalli di prezzo sull'asse delle ascisse.

metodologie di valutazione tipiche degli operatori di mercato. Questi ultimi utilizzano generalmente i modelli di *pricing* classici, apportando tuttavia correzioni sostanziali alla misura di volatilità impiegata in base alla scadenza e soprattutto alla *moneyness* dell'opzione da valutare; allo scopo di formalizzare questa consuetudine operativa, si tratta di impostare innanzitutto una funzione deterministica della volatilità i cui parametri vengono ottimizzati in base alle rilevazioni di mercato. Successivamente questa funzione può essere inserita nel modello classico per sostituire la variabile relativa alla volatilità, ottenendo in questo modo una formula di valutazione coerente con le evidenze empiriche⁶. Infine il passaggio dal modello di *pricing* alla distribuzione di probabilità *risk neutral* dei prezzi del sottostante avviene calcolandone la derivata seconda rispetto al prezzo d'esercizio, come si è visto più volte nel corso della trattazione.

Questa impostazione sarà utilizzata in quanto segue per ottenere la funzione di densità sul mercato azionario e sul mercato dei cambi.

Un esempio per il mercato azionario

Il primo *step* consiste nel determinare una funzione della volatilità che rappresenti in termini formalizzati il comportamento tipico di un operatore di mercato. Le evidenze riscontrate nella letteratura e nei test empirici del precedente paragrafo 4.2.1 ci inducono ad impiegare una funzione parabolica rispetto allo *strike price*, nell'ambito della quale avrà ridotta rilevanza, considerando la tipica impostazione asimmetrica negativa, il termine di secondo grado; in termini formali possiamo scrivere:

$$\hat{\sigma}(K) = A_0 + A_1K + A_2K^2$$

Il valore dei parametri viene determinato mediante un algoritmo di minimizzazione degli errori costituiti dalla differenza tra la volatilità implicita teorica calcolata con la funzione rispetto alle rilevazioni implicite nei prezzi di mercato, come avviene ad esempio in Shimko (1993).

Questa impostazione viene utilizzata nel test empirico relativo ad opzioni sull'indice Mib30. Le rilevazioni si riferiscono a due giornate campione, per le quali i prezzi di mercato vengono filtrati allo scopo di ottenere quotazioni liquide e sincrone; il calcolo della volatilità implicita dà origine all'insieme di punti rappresentato in figura 22. Nello stesso grafico si descrivono le funzioni paraboliche interpolanti che minimizzano la distanza dai valori di mercato.

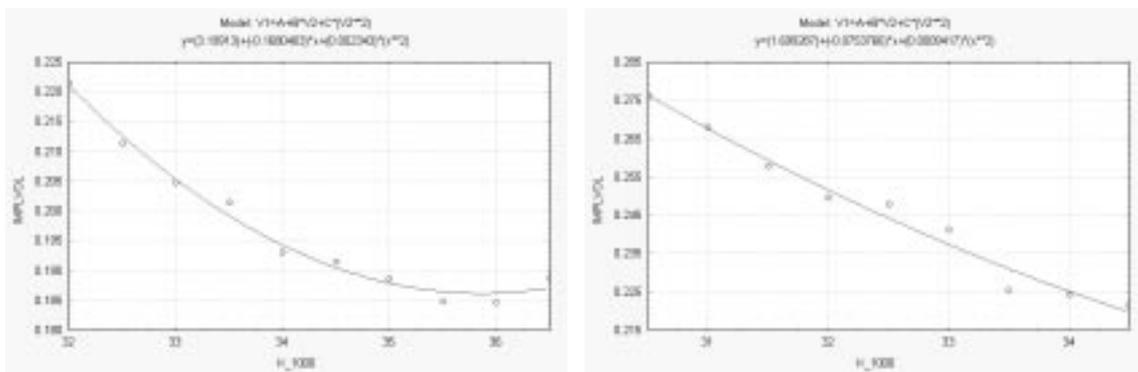


Figura 22: Funzioni della volatilità implicita per opzioni sull'indice Mib30.

Le volatilità implicite sono state calcolate a partire dai prezzi osservati il 21 ed il 27 luglio 1999 durante le contrattazioni sull'opzione *MIBO30* agosto 1999; per migliorare la significatività delle

⁶ L'approccio alla valutazione delle opzioni che segue questa logica è stato definito in Dumas, Fleming e Whaley (1998) "approccio *ad hoc*"; gli stessi presupposti sono ravvisabili, in termini generali, anche nell'approccio "semiparametrico" proposto in Ait-Sahalia e Lo (1998).

rilevazioni sono state utilizzate le quotazioni di opzioni put (call) per prezzi d'esercizio uguali o inferiori (superiori) al livello *ATM*, escludendo i contratti poco liquidi ed i prezzi non sincroni. Il procedimento di *fitting* utilizza la funzione quadratica proposta da Shimko (1993).

(elaborazioni su dati fonte Reuters)

Come si nota chiaramente in figura 22 la funzione parabolica della volatilità implicita è in grado di approssimare accuratamente, in entrambi i casi, i dati di mercato; la varianza della variabile dipendente spiegata dal modello, espressa nel coefficiente di determinazione *R*², è pari nel primo caso al 98,8% e nel secondo caso al 97,7%. Inoltre, come si anticipava poco sopra, l'importanza della componente quadratica è trascurabile rispetto alla componente lineare per l'evidente asimmetria negativa che caratterizza lo *smile*. A questo punto possiamo giudicare concluso il primo *step*, in quanto disponiamo di una funzione deterministica della volatilità rispetto al livello di *moneyness* rappresentato dallo *strike price*.

Il secondo *step* consiste nel sostituire la funzione deterministica alla variabile relativa alla volatilità nell'ambito del modello classico di *pricing*; utilizzando ad esempio i dati per la prima giornata campione si ottiene:

$$C(K, \tau) = S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + \left(r + \frac{1}{2} (3,1991 - 0,1680K + 0,0023K^2) \right) \tau}{(3,1991 - 0,1680K + 0,0023K^2) \sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = d_1 - (3,1991 - 0,1680K + 0,0023K^2) \sqrt{\tau} .$$

A questo punto va implementato il terzo *step* che consiste nel derivare due volte la formula di *pricing* rispetto al prezzo d'esercizio per ottenere la distribuzione di probabilità del prezzo del sottostante. Prima di procedere è necessaria peraltro una precisazione: la funzione deterministica della volatilità è in grado di descrivere il metodo di valutazione delle opzioni che il mercato implicitamente impiega esclusivamente per il *range* di prezzi del sottostante che corrisponde ai prezzi d'esercizio per i quali sono rilevabili delle quotazioni. Al di fuori di questo *range* è necessario formulare delle ipotesi aggiuntive: una prima alternativa, proposta in Shimko (1993), consiste nell'adottare l'ipotesi di volatilità costante; una seconda strada può essere quella di estendere la funzione deterministica della volatilità per un intervallo nell'ambito del quale possa ancora essere ritenuta significativa, come si propone in Campa, Chang e Reider (1998) e successivamente considerarla costante; infine è possibile semplicemente estendere la funzione stimata ad ogni livello di prezzo, ipotizzando che gli operatori di mercato continueranno a variare la volatilità rispetto alla *moneyness* dell'opzione seguendo la stessa regola di proporzionalità.

Nei primi due casi la distribuzione di probabilità risultante è formata da tre componenti; solo la parte centrale costituisce peraltro un'interpretazione delle evidenze di mercato attraverso la funzione deterministica della volatilità stimata. Dunque è evidente che tale componente centrale dovrà essere sufficientemente estesa da ricomprendere anche le code della distribuzione, considerando l'importanza di queste ultime nel descrivere le anomalie rispetto ai casi canonici.

Tenendo presenti queste considerazioni, si imposta il calcolo della derivata seconda per la formula di *pricing* che comprende la funzione della volatilità implicita di opzioni Mibo30. Volendo peraltro rispettare il vincolo di considerare valida la distribuzione con volatilità deterministica solo per l'intervallo di *strike prices* effettivamente quotati sul mercato, si ottiene la funzione di densità rappresentata nei primi due riquadri di figura 23; è evidente la limitazione posta a questo approccio dalla scarsa ampiezza del mercato delle opzioni italiano.

L'alternativa di completare la distribuzione di probabilità considerando costante la volatilità per l'intervallo di prezzi d'esercizio non coperto dalle quotazioni, ovvero impiegando in quegli intervalli la densità lognormale, non costituisce una soluzione accettabile, dal momento che lo scopo principale dell'impostazione della funzione della volatilità deterministica è proprio quello di monitorare l'area di probabilità sottesa alle code della distribuzione. E' probabilmente più opportuno considerare valide le relazioni tra volatilità e *strike prices* dell'opzione espresse dal mercato anche per livelli di *moneyness* non esplicitamente considerati; procedendo in questo modo si ottengono le funzioni di densità caratterizzate da asimmetria negativa e *fat tails* del terzo e quarto riquadro di figura 23.

L'opportunità di questa scelta è stata verificata, seppur indirettamente, attraverso un test empirico sul mercato che garantisce la maggiore ampiezza, ovvero quello di opzioni sull'indice azionario *S&P500 (CBOE)*. Dapprima si è stimata la funzione deterministica della volatilità implicita su tutte le rilevazioni a disposizione e di questa si è calcolata l'entità della varianza spiegata, espressa nel coefficiente di determinazione *R2*. Successivamente è stato ripetuto lo stesso procedimento impiegando però solo un intervallo di dati corrispondente all'ampiezza riscontrabile sul mercato italiano. Di questa nuova funzione si è calcolata la capacità di spiegare la varianza di tutte le rilevazioni, comprendendo anche quelle non utilizzate nel procedimento di stima; il nuovo coefficiente di determinazione ottenuto è risultato inferiore al precedente del 2%. Questa evidenza suggerisce che l'estensione della funzione di volatilità deterministica ad intervalli di prezzi del sottostante più ampi rispetto a quelli sulla base dei quali è stata stimata può rappresentare un approccio accettabile.

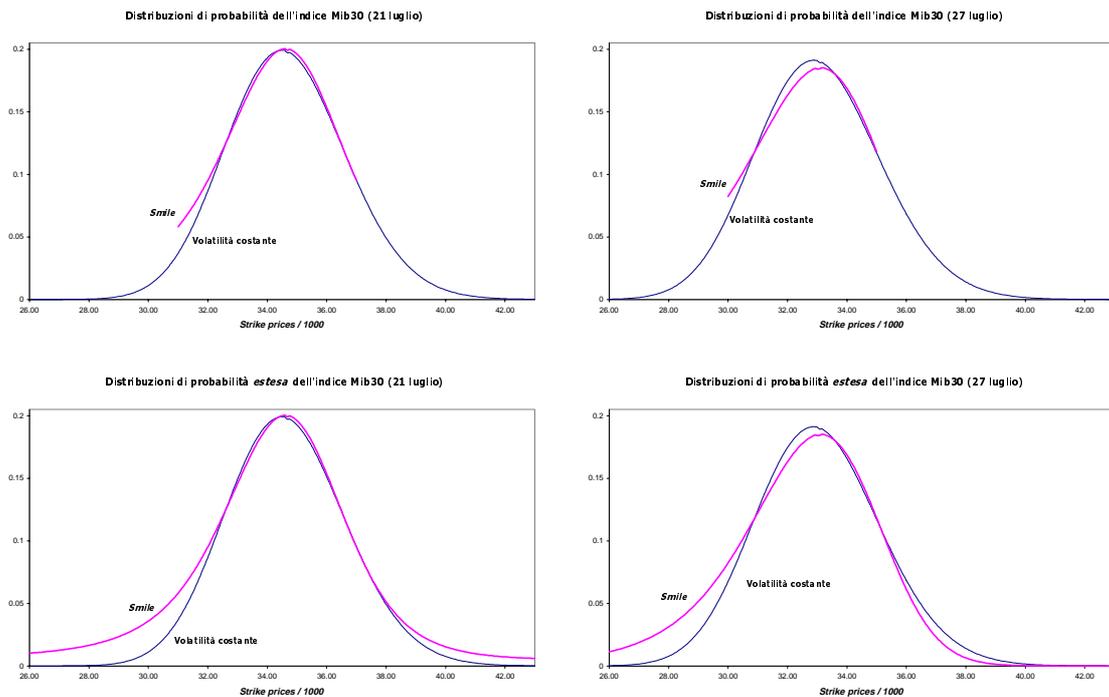


Figura 23: Confronto tra distribuzioni di probabilità a volatilità costante e deterministica.

Nei primi due riquadri le distribuzioni di probabilità ottenute impiegando la funzione di volatilità deterministica sono incomplete, in quanto si limitano a rappresentare la densità nell'intervallo di prezzi del sottostante corrispondente agli *strike prices* quotati il 21 e 27 luglio 1990 per opzioni Mibo30. Nel terzo e quarto riquadro si estendono tali distribuzioni probabilistiche a quotazioni dell'indice azionario sottostante molto più ampie. In ogni caso il confronto avviene con una funzione di densità determinata utilizzando un livello di volatilità costante corrispondente alle rilevazioni di prezzi di opzioni *ATM*.

(elaborazioni su dati fonte Reuters)

Un esempio per il mercato dei cambi

Come più volte si è fatto notare, le opzioni valutarie sono trattate in misura del tutto prevalente, in termini di volumi, nel mercato *OTC*; le quotazioni disponibili per le diverse scadenze sono generalmente il livello di volatilità implicita *ATM forward*, la combinazione *risk reversal 25Delta* e la combinazione *strangle 25Delta*⁷. Nonostante ogni approccio di estrazione della distribuzione di probabilità richieda un numero abbastanza esteso di rilevazioni per ottenere risultati significativi, nel caso delle opzioni valutarie possono essere sufficienti le tre quotazioni menzionate; in questo caso infatti i prezzi di mercato si riferiscono a livelli del tasso di cambio sottostante ben distribuiti al di sotto e al di sopra del *forward* in quel momento, ovvero a gradi di *moneyness* corrispondenti a livelli di *Delta* pari a -0,25 e 0,25 per opzioni rispettivamente *put OTM* e *call OTM*.

La funzione deterministica della volatilità utilizzata per costruire la distribuzione di probabilità implicita corrisponde al modello proposto da Malz (1998a) ed approfondito nella sezione precedente (paragrafo 3.1.2):

$$\sigma(\Delta, ATM_t, RR_t, STR_t) = ATM_t - 2RR_t(\Delta - 0,50) + 16STR_t(\Delta - 0,50)^2$$

In questo caso non è necessario un procedimento di *fitting* come avveniva per il mercato azionario, in quanto le rilevazioni sono situate sulla funzione della volatilità; è sufficiente sostituire ai parametri ATM_t , RR_t , e STR_t le rispettive quotazioni di mercato.

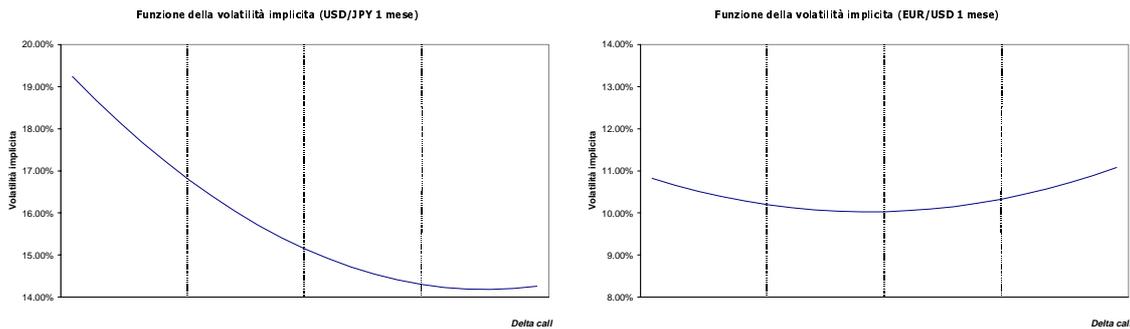


Figura 24: Funzioni della volatilità implicita per i tassi di cambio dollaro/yen ed euro/dollaro.

Le funzioni della volatilità implicita rispetto al *Delta* dell'opzione sono state ottenute inserendo nella funzione deterministica specificata poco sopra le rilevazioni di volatilità implicita *ATM*, combinazioni *risk reversal* e combinazioni *strangle* del 18 agosto 1999 per opzioni con scadenza mensile.

(elaborazioni su dati fonte Reuters - BBA)

Ora si tratta di sostituire nel modello di *pricing* classico di Garman e Kohlhagen (1983) la variabile relativa alla volatilità con la funzione deterministica della stessa, che si rappresenta nella formulazione seguente con il simbolo $\hat{\sigma}$:

$$\hat{C} = e^{-r_f \tau} SN \left(\frac{\ln \left(\frac{S}{K} \right) + \left(r_d - r_f + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \right) \tau}{\hat{\sigma} \sqrt{\tau}} \right) - e^{-r_d \tau} KN \left(\frac{\ln \left(\frac{S}{K} \right) + \left(r_d - r_f - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \right) \tau}{\hat{\sigma} \sqrt{\tau}} \right)$$

⁷ In realtà alcuni *market maker* quotano le combinazioni *risk reversal* e *strangle* anche per livelli di *Delta* pari a 0,10. Per una verifica empirica sulle distribuzioni di probabilità implicite in opzioni valutarie *OTC* che utilizzi anche questi dati di mercato, ci si può riferire a Campa, Chang e Reider (1998).

La derivata seconda rispetto allo *strike price* della formula di *pricing* così modificata consentirà di ottenere la distribuzione di probabilità implicita nelle rilevazioni di mercato.

A questo punto è necessario affrontare un problema di tipo metodologico: la volatilità implicita è una funzione del *Delta* dell'opzione, che però è una variabile a sua volta dipendente dalla stessa volatilità. Il modo più semplice per risolvere questo riferimento circolare consiste in primo luogo nel fissare in modo esogeno tutti i valori che *Delta* può assumere; ipotizzando di considerare opzioni *put (call) OTM* per *strike* inferiori (superiori) al livello *ATM*, i valori di *Delta* sono compresi tra -0,50 e 0,50. Ora, utilizzando la funzione deterministica di Malz (1998a) specificata poco sopra, è possibile ottenere una misura di volatilità implicita nelle quotazioni di mercato, per ogni livello di *Delta* prestabilito.

Disponiamo dunque di una misura per *Delta* e per la volatilità, oltre ai dati di mercato relativi al tempo a scadenza e alla quotazione del *forward*; possiamo ottenere dalla formula di Grabbe (1983)⁸, in modo iterativo con l'algoritmo di Newton-Raphson, il valore implicito dello *strike price*. In questo modo abbiamo a disposizione tutte le variabili necessarie per costruire la formula di *pricing* delle opzioni per ogni livello di *moneyness*; il calcolo della derivata seconda del valore dell'opzione rispetto al prezzo d'esercizio, che com'è noto dalle sezioni precedenti definisce una misura di densità probabilistica *risk neutral*, si imposta in termini numerici.

Le distribuzioni di probabilità ottenute, rappresentate in figura 25, confermano le evidenze emerse nei test empirici del paragrafo precedente relativo alla funzione della volatilità. In particolare, dal confronto con l'ipotesi dei modelli classici descritta dalla distribuzione lognormale, è individuabile in ogni caso un livello non trascurabile di asimmetria negativa che si esprime in un'area di probabilità maggiore sottesa alla coda di sinistra; questo fenomeno è particolarmente evidente per i tassi di cambio contro yen, soprattutto per un orizzonte temporale mensile, ed è associato ad aspettative relative all'apprezzamento della valuta giapponese. In secondo luogo si nota un prevalente eccesso di curtosi, indotto in parte dal valore della combinazione *strangle*, che rende comunque più probabili rispetto al caso classico gli eventi estremi.

⁸ Il modello di Grabbe (1983) definisce il valore di opzioni valutarie di stile europeo in funzione del cambio *forward*; nella formulazione non compaiono dunque né il cambio *spot*, né il tasso d'interesse sulla valuta merce r_f perché le informazioni relative a queste due variabili sono incorporate nel cambio a termine. Per una semplice dimostrazione delle relazioni di equivalenza tra il modello di Garman e Kohlhagen (1983) ed il modello di Grabbe (1983) si veda Erzegovesi (1997:96-100).

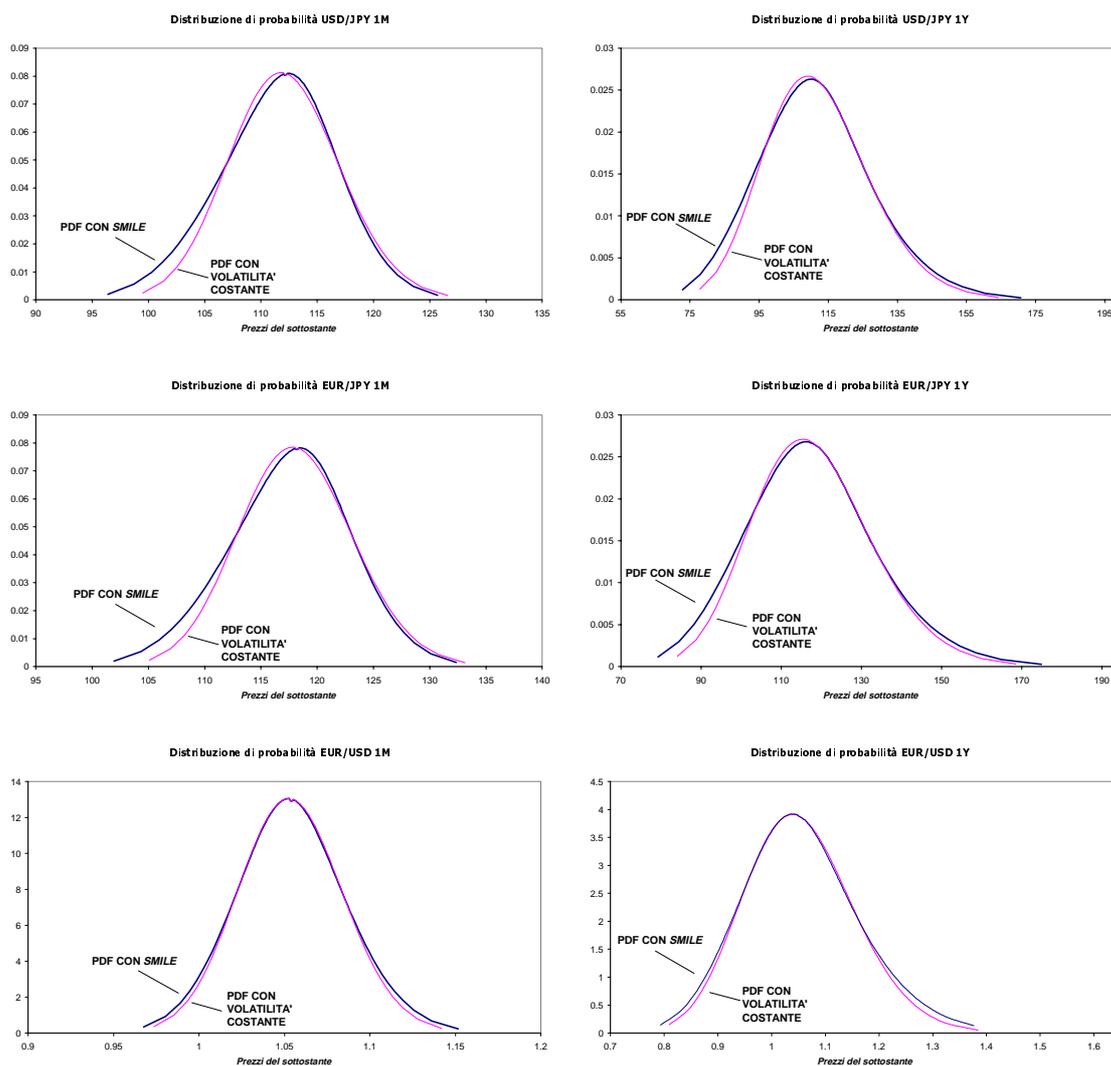


Figura 25: Distribuzioni di probabilità implicite per tassi di cambio rappresentativi.

Si rappresentano le distribuzioni di probabilità implicite nelle quotazioni di volatilità *ATM*, *risk reversal* e *strangle* rilevate il 18 agosto 1999. Come termine di confronto si costruisce altresì la distribuzione di probabilità corrispondente all'ipotesi di volatilità costante rispetto alla *moneyness*, ovvero considerando valori nulli per le combinazioni *risk reversal* e *strangle*; si tratta dunque di una distribuzione lognormale.

(elaborazioni su dati fonte Reuters - BBA)

Allo scopo di quantificare in termini più precisi l'effetto delle differenze della distribuzione empirica rispetto al caso lognormale sulla probabilità di eventi estremi, è necessario calcolare l'integrale per le due funzioni nell'intervallo di prezzo oggetto d'interesse; in tabella 2 riportiamo i dati più significativi, che si riferiscono al caso di rialzo / ribasso rispetto al prezzo *forward* rispettivamente del 5% e del 10% per l'orizzonte temporale di un mese e di un anno. La diversa percezione da parte degli operatori dell'evento relativo ad un forte rafforzamento dello yen rispetto a dollaro ed euro per entrambe le scadenze non è certamente trascurabile; al contrario le differenze nelle probabilità di deciso apprezzamento/deprezzamento del tasso di cambio euro /dollaro sono maggiormente conciliabili con l'ipotesi di volatilità costante.

Tassi di cambio	Probabilità con volatilità deterministica		Probabilità con volatilità costante		Differenza (Vol. determ. - Vol. cost.)	
	Rialzo	Ribasso	Rialzo	Ribasso	Rialzo	Ribasso
USD/JPY 1 mese	5,26%	2,44%	2,87%	3,67%	2,39%	-1,23%
EUR/JPY 1 mese	5,25%	2,42%	2,42%	3,50%	2,39%	-1,08%
EUR/USD 1 mese	0,65%	1,15%	0,27%	1,08%	0,39%	0,07%
USD/JPY 1 anno	11,67%	10,50%	9,40%	10,39%	2,26%	0,11%
EUR/JPY 1 anno	10,47%	9,12%	8,37%	9,00%	2,10%	0,12%
EUR/USD 1 anno	5,03%	5,75%	4,32%	5,44%	0,70%	0,31%

Tabella 2: Probabilità di rialzo e di ribasso nel caso *classico* e nel caso *empirico*.

Si riportano le probabilità di ottenere prezzi del sottostante superiori o inferiori al prezzo *forward* in misura pari al 5% per l'orizzonte temporale mensile ed al 10% per l'orizzonte temporale annuale. L'evento denominato rialzo (ribasso) si riferisce all'apprezzamento (al deprezzamento) della moneta nella quale è espresso il tasso di cambio, ovvero alle aree di probabilità sottese alla coda sinistra (destra) delle funzioni di densità.

5. Conclusioni

L'obiettivo di questo *paper* è stato quello di mettere in evidenza le potenzialità degli approcci che utilizzano i prezzi delle opzioni per ottenere informazioni ed elementi interpretativi sull'evoluzione attesa del prezzo dell'attività finanziaria sottostante e sull'atteggiamento verso il rischio degli operatori. Dopo l'illustrazione dei presupposti teorici che giustificano un'analisi di questo tipo, si è presa in rassegna la letteratura in materia. Infine sono stati impostati alcuni semplici test empirici sui mercati azionario, dei cambi, dei tassi d'interesse a lungo e a breve termine, allo scopo di chiarire il procedimento di applicazione delle metodologie e di fornire esempi di interpretazione dei dati ottenibili. Le evidenze emerse possono essere così riassunte.

Innanzitutto deve essere sottolineato come solo per il mercato azionario sia possibile raccogliere evidenze sostanzialmente convergenti. Già nella prima sezione del *paper* si riscontrava un pronunciato effetto *smile* con una rilevante asimmetria, dopo il 1987, per il mercato azionario americano; tale evidenza è stata confermata dalla letteratura approfondita nella seconda sezione, nell'ambito della quale le distribuzioni di probabilità estratte dai prezzi delle opzioni erano caratterizzate da una stabile leptocurtosi ed una altrettanto stabile e consistente asimmetria negativa. I test empirici della terza sezione, effettuati su mercati azionari europei, hanno riproposto gli stessi *patterns* nella funzione della volatilità e nelle distribuzioni di probabilità, anche impiegando metodologie di rilevazione diverse.

Gli eventi estremi sono dunque scontati dalle aspettative riflesse nei prezzi delle opzioni come eventi più probabili rispetto al caso lognormale e tra di essi lo sono molto di più gli eventi estremi negativi. Come si è già rilevato in precedenza, le strategie di assicurazione di portafoglio contro i *crash* di mercato hanno determinato, una volta che questo rischio è stato percepito, e cioè dopo il 1987, forti correnti di acquisto di opzioni *put OTM* con corrispondente incremento della relativa volatilità implicita. Tale fenomeno si è dimostrato particolarmente rilevante per lo stretto collegamento tra livello della ricchezza e andamento delle quotazioni azionarie che rende più sentito il bisogno di assicurarsi. Se l'asimmetria negativa deriva in modo preponderante dalla domanda di *hedging* del portafoglio, ne consegue che cali repentini delle quotazioni dovrebbero ridurre mediamente il fabbisogno di ulteriore protezione. Ciò porta ad osservare distribuzioni implicite che non riflettono una meccanica estrapolazione dei movimenti di prezzo storicamente osservati.

Per il mercato dei cambi non è così lineare il collegamento tra andamento delle quotazioni ed entità della ricchezza, non fosse altro che per la variabilità del segno (oltre che dell'ammontare) della posizione netta sulle diverse valute; in effetti le distribuzioni di probabilità implicite non rivelano la presenza di un sistematico livello di asimmetria, così come la pendenza della *term structure* della volatilità implicita è soggetta a cambiamenti con frequenza ravvicinata (tendenzialmente trimestrale nei periodi considerati). Inoltre sono riscontrabili, dal confronto tra livello dell'asimmetria e delle quotazioni, aspettative di tipo estrapolativo; questo fenomeno è apparso evidente per i tassi di cambio contro yen anche nei test empirici proposti. Il mercato dei cambi esprime dunque una situazione che non risulterebbe coerente con modelli nell'ambito dei quali la distribuzione degli *shock* sui tassi di cambio è indipendente dalla storia relativa; il contesto è dunque decisamente diverso rispetto al mercato azionario.

Nell'ambito del mercato dei tassi d'interesse a lungo termine sembra possa essere riscontrata una maggiore affinità con il mercato azionario in termini di relazioni tra quotazioni e livello della ricchezza. In questo caso oltre ai portafogli obbligazionari tendenzialmente privi, escludendo l'esempio italiano, di titoli a tasso variabile, va considerata la problematica altrettanto rilevante dei costi di finanziamento delle imprese; in entrambi i casi è ipotizzabile avversione al rischio di incrementi nei tassi a lungo termine. Si verifica dunque la tendenza ad ottenere distribuzioni di probabilità caratterizzate da asimmetria negativa, che riflettono un comportamento assicurativo contro il rialzo dei tassi, nelle fasi di mercato che palesano potenziali spinte inflazionistiche.

Per quanto riguarda il comparto dei tassi d'interesse a breve termine, stante il collegamento più immediato con le decisioni di politica monetaria, può risultare molto promettente l'analisi delle aspettative riflesse dalla distribuzione implicita in concomitanza al rilascio di dati macroeconomici periodici. A questo proposito i test empirici hanno messo in evidenza come, considerata la ridotta volatilità che caratterizza questo mercato, si ottengano rappresentazioni significative solamente quando le quotazioni impiegate sono espressione di una sufficiente liquidità.

L'utilità dell'approccio di estrazione della distribuzione di probabilità implicita nei prezzi delle opzioni non si esaurisce nella definizione dei tratti caratteristici di ogni mercato oggetto di studio. Sono numerose le implicazioni empiriche di un approccio che riesca a derivare la funzione di densità neutrale al rischio. In primo luogo si possono individuare applicazioni da parte degli organi di politica monetaria; è possibile quantificare istantaneamente l'impatto sulle aspettative di mercato di uno specifico provvedimento di natura monetaria, fiscale o politica e dunque avere a disposizione un meccanismo di *feedback* che può offrire opportune indicazioni alle autorità competenti. In secondo luogo sono importanti i suggerimenti che la conoscenza della distribuzione di probabilità di un'attività finanziaria sottostante all'opzione può fornire al settore privato; si può immaginare ad esempio l'utilità per aziende esportatrici di quantificare il rischio di cambio percepito dal mercato per definire le politiche di investimento e di prezzo sui mercati esteri o per decisioni di *capital budgeting*. Allo stesso modo è evidente come per le istituzioni finanziarie sia importante la disponibilità di queste informazioni su tutti i mercati per opportune politiche di gestione del rischio e per la stessa attività di *market making* in opzioni.

Bibliografia

Abken, P.A. (1995), "Using Eurodollar futures options: gauging the market's view of interest rate movements", in *Federal Reserve Bank of Atlanta - Economic Review*, vol. 16, pagg. 10-30.

Aït-Sahalia, Y. e A.W. Lo (1998), "Nonparametric Estimation of State-Price Densities Implicit in Financial Asset Prices", in *Journal of Finance*, vol. 53, nr. 2, April, pagg. 499-548.

Aït-Sahalia, Y., Y. Wang e F. Yared (1998), *Do Option Markets Price the Probabilities of Movement of the Underlying Asset?*, University of Chicago, Chicago, mimeo.

Akaike, H. (1973), "Information Theory and the Extension of the Maximum Likelihood Principle", in Petrov, B.N. e F. Csaki (1973), *2nd International Symposium on Information Theory*, Akademia Kiado, Budapest, pagg. 267-281.

Arrow, K. (1964), "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing", in *Review of Economic Studies*, vol. 31, pagg. 91-96.

Backus, D., S. Foresi, K. Li e L. Wu (1997), *Accounting for Biases in Black-Scholes*, Stern School of Business, New York.

Bahra, B. (1997), *Implied risk-neutral probability density functions from option prices: theory and application*, Bank of England, Working Paper, London, ISSN 1368-5562.

Bank for International Settlements (1996), *Central Bank Survey of Foreign Exchange and Derivatives Market Activity 1995*, Bank for International Settlements, Basle.

Bank of Japan (1995), *Empirical Analysis of the Information Content of Implied Volatilities*, Bank of Japan, Quarterly Bulletin.

Barle, S. e N. Cakici (1995), "Growing a Smiling Tree", in *Risk*, vol. 8, nr. 10, October, pagg. 76-81.

Bates, D.S. (1991), "The Crash of '87: Was It Expected? The Evidence from Options Markets", in *Journal of Finance*, vol. 46, nr. 3, July, pagg. 1009-1044.

Bates, D.S. (1995), *Testing Option Pricing Models*, National Bureau of Economic Research, Working Paper, 5129.

Bates, D.S. (1996a), "Dollar Jump Fears, 1984-1992: Distributional Anomalies Implicit in Currency Futures Options", in *Journal of International Money and Finance*, vol. 15, pagg. 65-93.

Bates, D.S. (1996b), "Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options", in *Review of Financial Studies*, vol. 9, pagg. 69-107.

Baxter, M. e A. Rennie (1996), *Financial Calculus. An Introduction to Derivative Pricing*, Cambridge University Press, Cambridge.

Black, F. (1976a), "The Pricing of Commodity Contracts", in *Journal of Financial Economics*, vol. 3, nr. 3, pagg. 167-179.

Black, F. (1976b), *Studies of Stock Price Volatility Changes*, American Statistical Association, Proceedings of the 1976 Meetings, 177-181.

- Black, F. e M. Scholes (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", in *Journal of Political Economy*, vol. 81, May-June, pagg. 637-654.
- Breeden, D. e R.H. Litzenberger (1978), "Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices", in *Journal of Business*, vol. 51, nr. 4, pagg. 621-651.
- Brock, W.A., D.A. Hsieh e B. LeBaron (1991), *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*, MIT Press, Cambridge.
- Campa, J.M. e P.H.K. Chang (1995), "Testing the Expectations Hypothesis on the Term Structure of Volatilities in Foreign Exchange Options", in *Journal of Finance*, vol. 50, nr. 2, June, pagg. 529-547.
- Campa, J.M. e P.H.K. Chang (1998), *The Forecasting Ability of Correlations Implied in Foreign Exchange Options*, Stern School of Business, New York.
- Campa, J.M., P.H.K. Chang e R. Reider (1998), "Implied Exchange Rate Distributions: Evidence from OTC Option Markets", in *Journal of International Money and Finance*, vol. 17, nr. 1, Feb, pagg. 117-160.
- Campbell, J.Y., A.W. Lo e A.C. MacKinlay (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Canina, L. e S. Figlewski (1993), "The Informational Content of Implied Volatility", in *Review of Financial Studies*, vol. 6, nr. 3, pagg. 659-681.
- Chiras, D.P. e S. Manaster (1978), "The Information Content of Option Prices and a Test of Market Efficiency", in *Journal of Financial Economics*, vol. 6, pagg. 213-234.
- Corrado, C. e T. Miller (1996), "Volatility Without Tears", in *Risk*, vol. 9, nr. 7, July, pagg. 49-52.
- Cox, J.C. e S.A. Ross (1976), "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", in *Journal of Financial Economics*, vol. 3, pagg. 145-166.
- Cox, J.C., S.A. Ross e M. Rubinstein (1979), "Option Pricing: A Simplified Approach", in *Journal of Financial Economics*, vol. 7, July, pagg. 229-263.
- Cox, J.C. e M. Rubinstein (1985), *Options Markets*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Das, S. e K.R. Sundaram (1999), "Of Smiles and Smirks: A Term-Structure Perspective", in *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, nr. Forthcoming.
- Day, T. e C.M. Lewis (1995), "Stock Market Volatility and the Information Content of Stock Index Options", in *Journal of Econometrics*, vol. 52, pagg. 289-311.
- Debreu, G. (1959), *Theory of Value*, John Wiley & Sons, New York.
- Derman, E. e I. Kani (1994), "Riding on a Smile", in *Risk*, vol. 7, nr. 2, February, pagg. 32-39.
- Dumas, B., J. Fleming e R.E. Whaley (1998), "Implied Volatility Functions: Empirical Tests", in *Journal of Finance*, vol. 53, nr. 6, December, pagg. 2059-2106.
- Dupire, B. (1994), "Pricing with a Smile", in *Risk*, vol. 7, nr. 1, January, pagg. 18-20.
- Erzegovesi, L. (1997), *Ingegneria finanziaria. Principi e applicazioni standard nei mercati del debito e dei tassi*, Università di Trento, Trento.
- Erzegovesi, L. (1999), *Capire la volatilità con il modello binomiale*, ALEA - Centro di ricerca sui rischi finanziari, Università di Trento, Tech Reports, Trento, Nr. 4, luglio.

- Evans, M.D.D. (1996), "Peso Problems: Their Theoretical and Empirical Implications", in Maddala, G.S. e C.R. Rao (1996), *Statistical Methods in Finance - Handbook of Statistics Volume 14*, North Holland-Elsevier, Amsterdam, pagg. 613-646.
- Fama, E.F. (1965), "Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market", in *Management Science*, vol. 11, pagg. 404-419.
- Fleming, J. (1998), *The Quality of Market Volatility Forecasts Implied by S&P100 Index Option Prices*, Rice University, Working Paper, Houston.
- Fleming, J. (1999), "The Economic Significance of the Forecast Bias of S&P100 Index Option Implied Volatility", in *Advances in Futures and Options Research*, vol. forthcomin.
- Fornari, F. e R. Violi (1998), *Distribuzioni di probabilità dei tassi di interesse implicite nei prezzi delle opzioni.*, Banca d'Italia, Conferenza "Mercati dei derivati, controllo monetario e stabilità finanziaria", Roma, 17 e 18 novembre.
- Galati, G. e K. Tsatsaronis (1996), "The information content of implied volatility from currency options", in Bank for International Settlements (1996), *Financial Market Volatility: Measurement, Causes and Consequences*, , , pagg. 179-205.
- Garman, M.B. e S. Kohlhagen (1983), "Foreign Currency Option Valuation", in *Journal of International Money and Finance*, vol. 2, December, pagg. 231-237.
- Grabbe, J. (1983), "The Pricing of Call and Put Options on Foreign Exchange", in *Journal of International Money and Finance*, vol. 2, December, pagg. 239-253.
- Harrison, J.M. e D.M. Kreps (1979), "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", in *Journal of Economic Theory*, nr. 20, February, pagg. 381-408.
- He, H. e H. Leland (1993), "On Equilibrium Asset Price Processes", in *Review of Financial Studies*, vol. 6, nr. 3, pagg. 593-617.
- Heston, S.L. (1993), "A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options", in *Review of Financial Studies*, vol. 6, nr. 2, pagg. 327-343.
- Hull, J.C. e A. White (1987), "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", in *Journal of Finance*, vol. 42, nr. 2, June, pagg. 281-300.
- Hutchinson, J.M., A.W. Lo e T. Poggio (1994), *A Nonparametric Approach to Pricing and Hedging Derivative Securities Via Learning Networks*, Massachusetts Institute of Technology, April 1994.
- Jackwerth, J.C. (1997), *Recovering Risk Aversion from Option Prices and Realized Returns*, London Business School, Working Paper, Londra, Version: 31 Oct 1997.
- Jackwerth, J.C. e M. Rubinstein (1996), "Recovering Probability Distributions from Option Prices", in *Journal of Finance*, vol. 51, nr. 5, December, pagg. 1611-1631.
- Jamshidian, F. (1989), "An Exact Bond Option Formula", in *Journal of Finance*, vol. 44, nr. 1, March, pagg. 205-209.
- Johnson, H. e D. Shanno (1987), "Option Pricing When the Variance is Changing", in *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 22, June, pagg. 143-151.
- Jorion, P. (1988), "On Jump Processes in the Foreign Exchange and Stock Markets", in *Review of Financial Studies*, vol. 1988, nr. 4, pagg. 427-445.

- Jorion, P. (1995), "Predicting Volatility in the Foreign Exchange Market", in *Journal of Finance*, vol. 50, June.
- Latané, H.A. e R.J. Rendleman (1976), "Standard Deviations of Stock Price Ratios Implied in Option Prices", in *Journal of Finance*, vol. 31, pagg. 369-381.
- Longstaff, F.A. (1990), *Martingale restriction tests of option pricing models*, University of California, Working Paper, Los Angeles.
- Malz, A. (1998a), "Option Prices and the Probability Distribution of Exchange Rates", in Chen, Z. (a cura di), (1998), *Currency Options and Exchange Rate Economics*, World Scientific, Singapore, pagg. 108-137.
- Malz, A. (1998b), "An Introduction to Currency Option Markets", in Chen, Z. (a cura di), (1998), *Currency Options and Exchange Rate Economics*, World Scientific, Singapore, pagg. 33-46.
- McCauley, R. e W. Melick (1996a), "Risk Reversal Risk", in *Risk*, vol. 9, nr. 11, November, pagg. 54-57.
- McCauley, R. e W. Melick (1996b), "Propensity and Density", in *Risk*, vol. 9, nr. 12, December, pagg. 52-54.
- Melick, W. e C.P. Thomas (1997), "Recovering an Asset's Implied PDF from Option Prices: An Application to Crude Oil During the Gulf Crisis", in *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 32, nr. 1, March, pagg. 91-115.
- Melino, A. e S. Turnbull (1990), "Pricing Foreign Currency Options with Stochastic Volatility", in *Journal of Econometrics*, vol. 45, pagg. 239-265.
- Merton, R.C. (1973), "Theory of Rational Option Pricing", in *Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 4, Spring, pagg. 141-183.
- Merton, R.C. (1976), "Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous", in *Journal of Financial Economics*, nr. 3, January-March, pagg. 125-144.
- Nandi, S. (1998), "How Important is the Correlation between Returns and Volatility in a Stochastic Volatility Model? Empirical Evidence from Pricing and Hedging S&P500 Index Options Markets", in *Journal of Banking and Finance*, vol. 22, nr. 5, May, pagg. 589-610.
- Nelson, D.B. (1990), "ARCH models as Diffusion Approximations", in *Journal of Econometrics*, vol. 45, pagg. 7-38.
- Nelson, D.B. (1991), "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: a New Approach", in *Econometrica*, vol. 59, nr. 2, March, pagg. 347-370.
- Neuhaus, H. (1995), *The Information Content of Derivatives for Monetary Policy*, Deutsche Bundesbank, Discussion Paper, Frankfurt, 3/95, July.
- Pagès, H. (1996), "Is there a premium for currencies correlated with volatility? Some evidence from risk reversals", in Bank for International Settlements (1996), *Financial Market Volatility: Measurement, Causes and Consequences*, . .
- Rosenberg, J. e R.F. Engle (1999), *Empirical pricing kernels*, Stern School of Business, Working Paper, New York, Agosto.
- Rubinstein, M. (1994), "Implied Binomial Trees", in *Journal of Finance*, vol. 49, nr. 3, July, pagg. 771-818.

Rubinstein, M. (1995), "As Simple as One, Two, Three", in Jarrow, R.A. (a cura di), (1995), *Over the Rainbow. Developments in Exotic Options and Complex Swaps*, Risk Publications, London, pagg. 286-290.

Scott, L.O. (1987), "Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation, and an Application", in *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 22, nr. 4, December, pagg. 419-438.

Scott, L.O. (1992), *The Information Content of Prices in Derivative Security Markets*, International Monetary Fund, Staff Papers, Vol. 39 No. 3.

Shimko, D. (1993), "Bounds of Probability", in *Risk*, vol. 6, nr. 4, April, pagg. 33-37.

Söderlind, P. e L. Svensson (1997), "New Techniques to Extract Market Expectations from Financial Instruments", in *Journal of Monetary Economics*, vol. 2, nr. 40, October, pagg. 383-429.

Stein, J.C. (1989), "Overreactions in the Option Markets", in *Journal of Finance*, vol. 44, pagg. 1011-1023.

Taylor, S.J. e X. Xu (1994), "The Term Structure of Volatility Implied by Foreign Exchange Options", in *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 29, nr. 1, pagg. 57-74.

Wand, M.P. e M.C. Jones (1995), *Kernel Smoothing*, Chapman e Hall, London.

Wiggins, J.B. (1987), "Option Values under Stochastic Volatility", in *Journal of Financial Economics*, vol. 19, pagg. 351-372.

Collana ALEA Tech Reports

- Nr. 1 F. Sguera, *Valutazione e copertura delle opzioni binarie e a barriera*, Marzo 1999.
- Nr. 2 A. Beber, *Introduzione all'analisi tecnica*, Marzo 1999.
- Nr. 3 A. Beber, *Il dibattito su dignità ed efficacia dell'analisi tecnica nell'economia finanziaria*, Marzo 1999.
- Nr. 4 L. Erzegovesi, *Capire la volatilità con il modello binomiale*, Luglio 1999.
- Nr. 5 G. Degasperi, *La dinamica delle crisi finanziarie: i modelli di Minsky e Kindleberger*, Agosto 1999
- Nr. 6 L. Erzegovesi, *Rischio e incertezza in finanza: classificazione e logiche di gestione*, Settembre 1999
- Nr. 7 G. Degasperi, L. Erzegovesi, *I mercati finanziari come sistemi complessi: il modello di Vaga*, Settembre 1999.
- Nr. 8 A. Beber e L. Erzegovesi, *Distribuzioni di probabilità implicite nei prezzi delle opzioni*, Dicembre 1999.

I Tech Reports possono essere scaricati gratuitamente dal sito di ALEA: <http://aleasrv.cs.unitn.it>. Dalla Home Page seguire il collegamento [ALEA Tech Reports](#).