

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

**EQUIVALENZA MASSA-ENERGIA:  
CONSEGUENZE A LIVELLO NUCLEARE E  
SUBNUCLEARE**

Tesi di Laurea in Fisica Matematica

**Relatore:**  
**Chiar.mo Prof.**  
**Sandro Graffi**

**Presentata da:**  
**Silvia Ceccacci**

**II Sessione**  
**Anno Accademico 2011-2012**



*Ai miei genitori.*



# Indice

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introduzione</b>   | <b>1</b>  |
| <b>1 Meccanica Lagrangiana</b>                                  | <b>3</b>  |
| 1.1 Calcolo delle variazioni . . . . .                          | 3         |
| 1.2 Le equazioni di Lagrange . . . . .                          | 6         |
| 1.3 Le equazioni di Hamilton . . . . .                          | 8         |
| <b>2 Equivalenza massa-energia di un corpo in quiete</b>        | <b>13</b> |
| 2.1 Perché $E = mc^2$ ? . . . . .                               | 13        |
| 2.2 Cosa significa $E = mc^2$ ? . . . . .                       | 17        |
| <b>3 Conseguenze dell'equivalenza massa-energia</b>             | <b>19</b> |
| 3.1 Disintegrazione, radioattività e difetto di massa . . . . . | 19        |
| 3.1.1 Energia di legame . . . . .                               | 23        |
| 3.2 Fissione nucleare . . . . .                                 | 26        |
| 3.2.1 Il modello a goccia . . . . .                             | 26        |
| 3.3 Fusione nucleare . . . . .                                  | 27        |
| 3.3.1 Reattore a fusione termonucleare controllata . . . . .    | 28        |
| <b>A La bomba atomica</b>                                       | <b>33</b> |
| <b>Bibliografia</b>   | <b>37</b> |



# Introduzione

Il 23 settembre 2011 un comunicato del CERN diffuso su tutti i giornali contiene una notizia 'shock': i neutrini sono più veloci della luce.

Il gruppo di ricercatori dell'esperimento *OPERA* annuncia infatti di aver rilevato che il fascio di neutrini inviato dal CERN di Ginevra ai Laboratori dell'INFN al Gran Sasso è arrivato a destinazione circa 60 nanosecondi prima del previsto se la velocità dei neutrini fosse pari a quella della luce, come ci si doveva attendere in base alla teoria della relatività ristretta.

Se corretto, il risultato implica dunque che i neutrini viaggierebbero ad una velocità superiore quella della luce nel vuoto, che è la velocità massima raggiungibile in natura secondo la teoria della relatività ristretta. Infatti la Teoria della Relatività Ristretta formulata da Einstein nel 1905 si basa sui seguenti due postulati:

1. **Primo postulato (principio di relatività):** le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
2. **Secondo postulato (costanza della velocità della luce):** la velocità massima raggiungibile da tutti i segnali è quella della luce, che si propaga nel vuoto con velocità  $c$  indipendente dalla velocità della sorgente o dell'osservatore.

Fortunatamente, però, nel febbraio 2012 la notizia 'shock' viene smentita. L'errore non sta nella relatività, bensì è dovuto ad una connessione sbagliata nel cavo di fibra ottica tra un rilevatore GPS e un pc usato per calcolare il tempo impiegato dai neutrini per raggiungere il Gran Sasso dal CERN di Ginevra.

D'altra parte, se risultati del genere dovessero essere confermati, in un futuro

più o meno prossimo, tramite esperimenti indipendenti ripetuti più volte, si tratterebbe, senza dubbio, della più importante scoperta scientifica degli ultimi 100 anni.

Comunque, dopo avere constatato che il pilastro fondamentale della fisica moderna , la Teoria della Relatività Speciale, è sempre ben solido, in questa tesi ricorderemo alcune delle leggi che ne conseguono per poi illustrare alcune delle più importanti conseguenze che esse comportano.

# Capitolo 1

## Meccanica Lagrangiana

In questo capitolo ricorderemo alcune nozioni fondamentali di meccanica Lagrangiana, dalle quali poi ricaveremo la formulazione Hamiltoniana della meccanica. Utilizzeremo tali richiami per ricavare l'espressione dell'energia in meccanica relativistica.

### 1.1 Calcolo delle variazioni

Il calcolo delle variazioni si occupa della ricerca degli estremi di funzioni il cui dominio di definizione è uno spazio di dimensione infinita: lo spazio delle curve. Tali funzioni sono chiamate *funzionali*. In generale, un funzionale è una qualunque applicazione dello spazio delle curve nell'asse reale.

**Definizione 1.1.1.** Sia  $L(x_1, x_2, x_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione almeno  $C^2$  rispetto a  $(x_1, x_2, x_3)$ . Consideriamo l'insieme  $S[x_1, x_2]$  formato da tutte le curve piane regolari (cioè almeno  $C^2$ )  $\gamma$  di equazione  $y = f(x) : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  definite su  $[x_1, x_2]$ .

Sia  $L(x, \dot{x}, t)$  la funzione  $L(x_1, x_2, x_3)$  valutata su  $x_1 = x(t), x_2 = \dot{x}(t), x_3 = t$ . Allora risulta definita l'applicazione  $\gamma \mapsto \Phi(\gamma) : S[x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t) dx.$$

Essa è un caso particolare di *funzionale*.

**Definizione 1.1.2.** Il *funzionale*  $\Phi$  si dice *differenziabile* se

$$\Phi(\gamma + h) - \Phi(h) = F + R$$

dove  $F$  dipende linearmente da  $h$  (cioè per un  $\gamma$  fissato  $F(h_1 + h_2) = F(h_1) + F(h_2)$  e  $F(ch) = cF(h)$ ), mentre  $R(h, \gamma) = O(h^2)$ , nel senso che da  $|h| < \epsilon$  e  $|\frac{dh}{dt}| < \epsilon$  consegue  $|R| < C\epsilon^2$ .

$F(h)$ , parte lineare dell'incremento si chiama *differenziale*.

Il differenziale di un funzionale si chiama anche *variazione*, e  $h$  viene chiamato *variazione della curva*.

**Teorema 1.1.1.** *Il funzionale  $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt$  è differenziabile e il suo differenziale è dato dalla formula*

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] h dt + \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma + h) - \Phi(h) &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ L(x + h, \dot{x} + \dot{h}, t) - L(x, \dot{x}, t) \right] dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right] dt + O(h^2) = F(h) + R, \end{aligned}$$

dove  $F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt$ ,  $R = O(h^2)$ . Integrando per parti otteniamo

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} dt = - \int_{t_0}^{t_1} h \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) dt + \left( h \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \Big|_{t_0}^{t_1}$$

□

**Definizione 1.1.3.** Un *estremale* di un funzionale differenziabile  $\Phi(\gamma)$  è una curva  $\gamma$ , tale che  $F(h, \gamma) = 0$  per ogni  $h$ .

(Esattamente come quando diciamo che  $\gamma$  è un punto stazionario per una funzione, se ivi si annulla il differenziale.)

Il seguente teorema fornisce un criterio per stabilire se una curva è estrema per il funzionale. Tale risultato potrà poi essere generalizzato, in dimensione  $n$ .

**Teorema 1.1.2.** *Affinchè la curva  $\gamma : x = x(t)$  sia estrema per il funzionale  $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt$  nello spazio delle curve passanti per i punti  $x(t_0) =$*

$x_0$  e  $x(t_1) = x_1$ , è necessario e sufficiente che lungo la curva  $x(t)$  valga l'equazione

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

**Lemma 1.1.1.** *Se la funzione continua  $f(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , è tale che*

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt = 0$$

per ogni funzione continua  $h(t)$ , per la quale  $h(t_0) = h(t_1) = 0$ , allora  $f(t) \equiv 0$ .

*Dimostrazione.* (Del Lemma (1.1.1))

Per assurdo: sia  $f(t^*) > 0$ ,  $t_0 < t^* < t_1$ . Per la continuità sarà  $f(t) > c$  in un intorno  $\Delta$  del punto  $t^*$ :  $t_0 < t^* - d < t < t^* + d < t_1$ ; sia,  $h(t) = 0$  fuori di  $\Delta$ ,  $h(t) > 0$  in  $\Delta$  e  $h(t) = 1$  in  $\frac{\Delta}{2}$  ( $t^* - \frac{d}{2} < t < t^* + \frac{d}{2}$ ).

Allora evidentemente  $\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt \geq dc > 0$ . La contraddizione ottenuta mostra che  $f(t^*) = 0$  per ogni  $t_0 < t^* < t_1$ .  $\square$

*Dimostrazione.* (Del Teorema (1.1.2))

Per il teorema precedente si ha:

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right] h dt + \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Il secondo termine della somma è uguale a zero, dato che  $h(t_0) = h(t_1) = 0$ .

Se  $\gamma$  è un estremales, allora  $F(h) = 0$  per ogni  $h$  per la quale  $h(t_0) = h(t_1) = 0$ .

Pertanto per ogni  $h(t)$  di questa classe  $\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt = 0$ , dove  $f(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x}$ . Per il Lemma (1.1.1) allora  $f(t) \equiv 0$ .

Viceversa, se  $f(t) \equiv 0$  allora, evidentemente,  $F(t) \equiv 0$ .  $\square$

**Definizione 1.1.4.** L'equazione

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

si chiama **Equazione di Eulero-Lagrange per il funzionale (d'azione)**

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt.$$

Siano ora  $x = (x_1, \dots, x_n)$  un vettore dello spazio  $n$ -dimensionale delle coordinate  $\mathbb{R}^n$ ,  $\gamma = t, x : x = x(t), t_0 \leq t \leq t_1$  una curva nello spazio  $n+1$  dimensionale  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  e  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di  $2n+1$  variabili. Possiamo, dunque, generalizzare il Teorema (1.3.1) con il seguente enunciato:

**Teorema 1.1.3.** *Affinchè la curva  $\gamma$  sia un estremo del funzionale  $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt$  nello spazio delle curve  $x(t)$  che congiungono due punti fissati  $(t_0, x_0)$  e  $(t_1, x_1)$ , è necessario e sufficiente che lungo di essa siano verificate le equazioni di Eulero-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \iff \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Questo è un sistema di  $n$  equazioni del *secondo* ordine e la soluzione dipende da  $2n$  costanti arbitrarie. Per individuarle occorrono le  $2n$  condizioni  $x(t_0) = x_0$  e  $x(t_1) = x_1$ .

*Osservazione 1.1.1.* La proprietà di una curva di essere estremo di un funzionale non dipende dal sistema di coordinate.

## 1.2 Le equazioni di Lagrange

In questo paragrafo illustriamo il principio variazionale, le cui curve estremali sono le soluzioni delle equazioni del moto di Newton per un sistema meccanico conservativo.

Confrontiamo le equazioni della dinamica newtoniana

$$\frac{d}{dt} (m_i \dot{r}_i) + \frac{\partial U}{\partial r_i} = 0 \quad (1.2.1)$$

con le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

**Teorema 1.2.1.** *I moti del sistema dinamico (1.2.1) coincidono con gli estremali del funzionale  $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L dt$ , dove  $L = T - U$  è la differenza tra l'energia cinetica e l'energia potenziale.*

*Dimostrazione.* Poichè  $U = U(r)$  e  $T = \sum m_i \frac{\dot{\mathbf{r}}_i^2}{2}$  abbiamo  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$  e  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}$ .  $\square$

**Osservazione** Tale teorema è un caso particolare del principio di minima azione nella forma di Hamilton. Infatti spesso il moto  $\mathbf{q}(t)$  è non solo un estremo, ma è tale da far assumere il valore *minimo* al funzionale dell'azione  $\int_{t_0}^{t_1} L dt$ .

Enunciamo ora senza dimostrazione il seguente risultato fondamentale, esso afferma che le equazioni di Lagrange hanno la stessa forma in un qualunque sistema di coordinate.

**Corollario 1.2.1.** *Siano  $(q_1, \dots, q_{3n})$  coordinate arbitrarie nello spazio delle configurazioni di un sistema di  $n$  punti materiali. Allora la variazione di  $\mathbf{q}$  nel tempo verifica le equazioni di Eulero-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad \text{dove } L = T - U.$$

Introduciamo ora una terminologia assai utilizzata in meccanica.

**Definizione 1.2.1.** Definiamo, ora, la seguente terminologia utilizzata in meccanica:

- *funzione di Lagrange (o lagrangiana):*  $L(q, \dot{q}, t) = T - U$  ;
- *coordinate generalizzate:*  $q_i$  ;
- *velocità generalizzate:*  $\dot{q}_i$  ;
- *impulsi generalizzati:*  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$  ;
- *forze generalizzate:*  $\frac{\partial L}{\partial q_i}$  ;
- *azione:*  $\int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt$  ;

- **equazioni di Lagrange:**  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ .

**Definizione 1.2.2.** La coordinata  $q_i$  si chiama *ciclica* se non compare esplicitamente nella lagrangiana:  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ .

**Teorema 1.2.2.** L'impulso generalizzato corrispondente ad una coordinata ciclica si conserva:  $p_i = \text{cost}$ .

*Dimostrazione.* Per l'equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{=p_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

dove l'ultima uguaglianza è proprio la definizione di coordinata ciclica.  $\square$

### 1.3 Le equazioni di Hamilton

Presentiamo, ora, il sistema delle *equazioni di Hamilton* (o delle *equazioni canoniche*). Prima di fare ciò, è però necessario definire la *trasformazione di Legendre*. Si tratta di un algoritmo matematico ausiliario, che consiste nel passare dalle funzioni definite su uno spazio lineare alle funzioni definite sullo spazio duale.

**Definizione 1.3.1.** Sia  $y = f(x) \in C^2(\mathbb{R})$  una funzione convessa:  $f''(x) > 0$ . Si chiama *trasformata di Legendre* della funzione  $f$  una nuova funzione  $g$  di una nuova variabile reale  $p$ , costruita nel seguente modo.

Tracciamo sul piano  $x, y$  il grafico della funzione  $f$ . Sia dato il numero  $p$ . Consideriamo la retta  $y = px$ . Prendiamo il punto  $x = x(p)$  nel quale la distanza tra la curva e la retta lungo la verticale è massima. Se definiamo la funzione  $F(p, x)$  delle due variabili  $(p, x)$  nel modo seguente  $F(p, x) := px - f(x)$  la funzione  $g(p)$  cercata sarà:

$$g(p) := \max_{x \in \mathbb{R}} F(p, x) = \max_{x \in \mathbb{R}} [px - f(x)].$$

$g(p)$  ha massimo in  $x$ , per  $p$  fissato, nel punto  $x(p)$ .

Il punto  $x(p)$  è individuato dalla condizione di essere un estremo:  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ ,

cioè  $f'(x) = p$ . Per la convessità di  $f$  la funzione  $x \mapsto f'(x)$  è invertibile e il punto  $x(p)$  è univocamente determinato.

Tramite una trasformazione di Legendre il sistema di equazioni differenziali del secondo ordine di Lagrange si trasforma in un sistema di  $2n$  equazioni del primo ordine, dotato di una notevole simmetria: il sistema delle *equazioni di Hamilton* (o delle *equazioni canoniche*).

Consideriamo il sistema di equazioni di Lagrange  $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ , dove  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ , definito da una funzione di Lagrange  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che supporremo convessa rispetto al secondo argomento  $\dot{q}$ .

**Teorema 1.3.1.** *Il sistema delle equazioni di Lagrange è equivalente ad un sistema di  $2n$  equazioni del primo ordine, le equazioni di Hamilton*

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$

Qui  $H(p, q, t) = \max_{\dot{q} \in \mathbb{R}^n} [p \cdot \dot{q} - L(q, \dot{q}, t)]$  è la trasformata di Legendre rispetto alle  $\dot{q}$  della funzione di Lagrange. Si assume qui che la matrice Hessiana di  $L$  rispetto alle  $\dot{q}$  sia definita positiva  $\forall (q, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.* Per definizione, la trasformata di Legendre in  $\dot{q}$  di  $L(q, \dot{q}, t)$  è una funzione  $H(p) = p \cdot \dot{q} - L(q, \dot{q}(p))$  nella quale  $\dot{q}$  è legato a  $p$  dalla formula invertibile  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$  e che dipende inoltre dai parametri  $q$  e  $t$ .

Questa funzione  $H$  si chiama **funzione di Hamilton** (o *hamiltoniana*).

Il differenziale totale della funzione di Hamilton

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

è uguale al differenziale totale di  $p\dot{q} - L(q, \dot{q}(p), t)$  con  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ :

$$dH = \dot{q} dp - \frac{\partial L}{\partial q} dq - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Le due espressioni per  $dH$  devono coincidere. Pertanto

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Ricordando le equazioni di Lagrange  $\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}$  otteniamo le equazioni di Hamilton.

Quindi se  $q(t)$  soddisfa alle equazioni di Lagrange,  $(p(t), q(t))$  soddisfa alle equazioni di Hamilton. Analogamente si dimostra l'inverso. In definitiva i sistemi di Lagrange e di Hamilton sono equivalenti.  $\square$

Supponiamo, ora, di considerare le equazioni della meccanica, con la funzione di Lagrange della solita forma,  $L = T - U$ , dove l'energia cinetica è una forma quadratica in  $\dot{q}$ :

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad a_{ij} = a_{ji}(q, t); \quad U = U(q).$$

**Teorema 1.3.2.** *Per queste ipotesi la funzione di Hamilton  $H$  è uguale all'energia totale  $H = E$  ( $= T + U$ ).*

La dimostrazione si basa su un lemma sulla trasformata di Legendre di una forma quadratica.

**Lemma 1.3.1.** *Il valore di una forma quadratica  $f(x)$  e della sua trasformata di Legendre  $g(p)$  coincidono nei punti corrispondenti:  $f(x) = g(p)$ .*

*Dimostrazione.* (Del lemma 1.3.1) Per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee

$$\frac{\partial f}{\partial x} x = 2f.$$

Di conseguenza  $g(p(x)) = px - f(x) = \frac{\partial f}{\partial x} x - f = 2f(x) - f(x) = f(x)$ .  $\square$

*Dimostrazione.* (Del teorema 1.3.2) Ripetendo il ragionamento del lemma, ponendo  $f = L$  e  $x = \dot{q}$ , troviamo  $H = p\dot{q} - L = 2T - (T - U) = T + U$ .  $\square$

**Corollario 1.3.1.** *Vale l'uguaglianza  $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$  e in particolare, per sistemi in cui l'hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ , vale la legge della conservazione della funzione di Hamilton:  $H(p(t), q(t)) = \text{cost}$ .*

*Dimostrazione.* Calcoliamo la variazione  $H$  lungo una traiettoria  $H(p(t), q(t), t)$ . Allora per le equazioni di Hamilton

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

derivato rispetto al tempo si ottiene:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \underbrace{\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right)}_{=dp=\dot{p}} + \frac{\partial H}{\partial q} \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)}_{=dq=\dot{q}} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

□



## Capitolo 2

# Equivalenza massa-energia di un corpo in quiete

In questo capitolo dimostreremo la celebre equazione  $E = mc^2$  che stabilisce l'equivalenza materiale tra l'energia ( $E$ ) e la massa ( $m$ ) di un sistema fisico. Essa fu scoperta nel 1905 da Albert Einstein.

L'equazione prende in considerazione le seguenti tre grandezze:

- $E$ : rappresenta l'energia meccanica, potenziale piú cinetica, espressa in *joule* ( $= N \cdot m = W \cdot s = kg \cdot m^2/s^2$ );
- $m$ : rappresenta la massa a riposo, espressa in chilogrammi (kg);
- $c$ : rappresenta la velocità della luce, espressa in  $m/s$  ( $299792458m/s$ , generalmente approssimata a  $300000000m/s = 300000km/s$ ). Pertanto  $c^2 = 9 \cdot 10^{16}m^2/s^2$ .

### 2.1 Perché $E = mc^2$ ?

Iniziamo la dimostrazione col riprendere la distanza infinitesimale di Minkowski:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Nello spazio di Minkowski consideriamo la curva d'universo

$$\begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \\ z = z(u) \\ t = t(u) \end{cases}$$

Consideriamo la parametrizzazione mediante ascissa curvilinea  $s$ , che deve essere calcolata tramite la distanza iperbolica:

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \\ t = t(s) \end{cases}$$

Una curva parametrizzata mediante ascissa curvilinea misurata con la distanza iperbolica é detta **linea d'Universo**. Sia  $u$  la velocità del punto sulla linea d'universo:

$$u = \left( \frac{dt}{ds}, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right).$$

Il modulo della velocità sarà dunque:

$$|u| = \sqrt{c^2 \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 - \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 - \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 - \left( \frac{dz}{ds} \right)^2}.$$

Usando la notazione:

$$t = x_0, \quad x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3$$

si può scrivere così:

$$|u| = \sqrt{c^2 \left( \frac{dx_0}{ds} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{ds} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{ds} \right)^2 - \left( \frac{dx_3}{ds} \right)^2}.$$

Questa notazione é invariante per l'invarianza della distanza iperbolica.

La distanza spazio-temporale infinitesima di Minkowski sarà:

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

da cui

$$ds = c\sqrt{1 - \left(\frac{dx}{cdt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{cdt}\right)^2 - \left(\frac{dz}{cdt}\right)^2} dt = c\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt$$

dove  $v$  é il modulo della velocità tridimensionale, cioè  $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ . Ricordando lo sviluppo di Taylor  $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x + O(x^2)$  risulta, per  $x = \left(\frac{v}{c}\right)^2$ :

$$ds = c \left[ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right) \right] dt.$$

Poniamo allora

$$ds = c \left[ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right] dt.$$

Consideriamo ora l'integrale d'azione  $\int_{t_0}^{t_1} mc^2 ds$ . Per quanto precede si ha:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} mc^2 ds &= \int_{t_0}^{t_1} mc^3 dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} cmv^2 dt = \\ &= mc^3(t_1 - t_0) - \int_{t_0}^{t_1} cT dt = \\ &= \underbrace{mc^3(t_1 - t_0)}_{cost} - \int_{t_0}^{t_1} cL dt \end{aligned}$$

dove  $\frac{1}{2}mv^2$  é la lagrangiana della particella libera in meccanica non relativistica.

Dunque, procedendo per analogia, a meno di una costante possiamo definire la lagrangiana di una particella libera in meccanica relativistica come

$$\int_{t_0}^{t_1} mc^2 ds = - \int_{t_0}^{t_1} cL dt \Rightarrow L := -mc \frac{ds}{dt} = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

L cosí definita é una grandezza invariante, e si riduca (a meno di costanti) alla lagrangiana classica quando  $c \rightarrow \infty$ .

Ora ricaviamo l'hamiltoniana. Grazie al Teorema (1.3.1) sará data l'espressione dell'energia. Scriviamo la velocità in questo modo  $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ ; si ottiene allora:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}\right)}.$$

Ponendo  $\beta = \frac{v}{c}$ , ricaviamo gli impulsi hamiltoniani:

$$\begin{cases} p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \\ p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \\ p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \end{cases} \implies \begin{cases} p_x = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ p_y = \frac{m\dot{y}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ p_z = \frac{m\dot{z}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \quad (2.1.1)$$

$$\begin{aligned} E = H &= p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - L = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + m\dot{z}^2) + mc^2 \sqrt{1-\beta^2} = \\ &= \frac{mv^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + mc^2 \sqrt{1-\beta^2} = \frac{mv^2 + mc^2(1-\beta^2)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \\ &= \frac{mc^2 \frac{v^2}{c^2} + mc^2(1-\beta^2)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{mc^2(\beta^2 + 1 - \beta^2)}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \quad (2.1.2)$$

e quindi in conclusione, se  $v = 0$  :

$$E = mc^2. \quad (2.1.3)$$

Ora, a partire dall'espressione relativistica degli impulsi hamiltoniani e dell'energia di un corpo, è possibile ricavare l'espressione di una nuova quantità invariante.

L'impulso hamiltoniano in forma vettoriale è dato dall'equazione:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

e la sua energia è, secondo quanto appena visto nell'equazione (2.1.2):

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

ove  $m$  rappresenta la massa a riposo del corpo. Moltiplicando il modulo della prima espressione per  $c$ , elevando al quadrato e sottraendo membro a

membro le due equazioni (la prima dalla seconda) si ottiene:

$$E^2 - p^2c^2 = \frac{m^2c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{m^2c^2v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m^2c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}(c^2 - v^2) = \frac{m^2c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m^2c^4.$$

Pertanto il termine:

$$m^2c^4 = E^2 - p^2c^2 \quad (2.1.4)$$

é detto *invariante energia-quantità di moto* del corpo ed é invariante perché é il prodotto di due quantità invarianti:  $m$ , massa a riposo, e  $c$ , velocità della luce.

É una combinazione lineare di due grandezze non invarianti, l'energia e la quantità di moto (impulso), così come l'invariante spazio temporale é la combinazione delle coordinate spaziali e del tempo che, in relatività ristretta, non sono piú invarianti se considerati singolarmente.

Inoltre, dalla (2.1.4) si può ricavare l'energia come funzione dell'impulso:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$$

e quindi ancora  $E = mc^2$  per  $p = 0$ .

## 2.2 Cosa significa $E = mc^2$ ?

La nozione intuitiva fisica di *energia* é la capacità che ha un corpo di compiere lavoro.

La teoria della relatività ristretta ha introdotto una generalizzazione di tale concetto, che consente di interpretare la massa come una forma di energia; infatti nei processi in cui avviene una variazione di massa, si osserva una corrispondente variazione di energia. Queste due variazioni sono legate dalla *relazione di equivalenza* di Einstein, appena dimostrata:  $E = mc^2$ .

Ogni trasformazione microscopica di un sistema da uno stato in un altro di massa-energia inferiore libera una quantità di energia che va ad accrescere l'energia osservabile del macrosistema. Viceversa, ogni trasformazione in uno stato di massa-energia superiore necessita dall'esterno l'immissione di energia (dal calore al bombardamento nucleare) e quindi il compimento di un lavoro. La formula si fonda sul concetto che *un corpo a riposo possiede la capacità di*

*trasmutare tutta la sua massa, o una parte, in energia, in particolare sotto forma di radiazione elettromagnetica.*

È questo il nuovo paradigma einsteiniano che si contrappone a quello newtoniano, fino a quel tempo ritenuto saldo. Newton affermava che il tempo doveva essere tenuto separato dallo spazio, in quanto assoluto; pertanto la cinematica era separata dalla dinamica, e perciò un corpo fermo non possedeva alcuna energia cinetica. L'innovazione sta nel fatto che  $mc^2$ , l'energia a riposo, è posseduta da un qualunque corpo o sistema fisico, a qualsiasi livello (microscopico, macroscopico, cosmico), ed  $E$  è l'energia totale meccanica del corpo.

Inoltre, da un punto di vista dimensionale, la (2.1.3) può essere resa plausibile osservando che una energia  $E$  è dimensionalmente corrispondente ad una quantità di moto  $p$  moltiplicata per una velocità, in questo caso quella della luce. Possiamo dunque scrivere  $[E] = [pc]$ . Essendo anche  $p = mc$  si ottiene  $E = mc^2$ . A questo punto avendo posto  $p = mc$  è ragionevole domandarsi: come può un'onda elettromagnetica muoversi a velocità  $c$  se associamo ad essa una massa  $m$ ? In realtà non esiste alcuna incongruenza, in quanto tutta la massa della luce è 'puramente cinetica' e quindi la sua massa a riposo è rigorosamente nulla.

## Capitolo 3

# Conseguenze dell'equivalenza massa-energia

L'equivalenza massa-energia può essere sperimentalmente verificata in modo quantitativo nei decadimenti radioattivi, nelle disintegrazioni artificiali, nella fissione nucleare e in molti altri fenomeni riguardanti la fisica dei nuclei e delle particelle.

In questo capitolo andremo ad analizzare alcuni di questi fenomeni.

### 3.1 Disintegrazione, radioattività e difetto di massa

La radioattività naturale fu scoperta da Becquerel verso la fine dell'ottocento, e poi studiata intensamente da Madame Curie che identificò per prima le sostanze radioattive, come per l'appunto il radio.

#### Il decadimento radioattivo

Qualunque sia la natura del decadimento, la sua caratteristica più saliente è che avviene secondo la medesima legge generale. In generale, appunto, se un campione contiene  $N$  nuclei radioattivi, si può affermare che il processo di decadimento, scrivendo che il rapporto della frequenza dei decadimenti

$R(= dN/dt)$ , rispetto al numero dei nuclei presenti é uguale ad una costante:

$$\frac{-dN/dt}{N} = \lambda, \quad (3.1.1)$$

ove  $\lambda$ , la *costante di disintegrazione*, ha un valore caratteristico differente per ogni nuclide radioattivo. Possiamo scrivere la (3.1.1) cosí:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

che si integra immediatamente in

$$\frac{1}{N}dN = -\lambda dt \Rightarrow \log N = -\lambda t \Rightarrow N = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (3.1.2)$$

Qui  $N_0$  é il numero dei nuclei radioattivi nel campione al tempo  $t = 0$ .

Si é spesso piú interessati a conoscere l'*attività*, ossia la frequenza di decadimento  $R(= dN/dt)$  del campione, che non il numero dei nuclei radioattivi  $N$  contenuti. Differenziando (rispetto a  $dt$ ) la (3.1.2) si ottiene:

$$R = R_0 e^{-\lambda t}, \quad (3.1.3)$$

ove  $R_0(= \lambda N_0)$  rappresenta la frequenza di decadimento al tempo  $t = 0$ .

Di particolare rilievo é il tempo  $t_{1/2}$ , chiamato *tempo di dimezzamento*, al termine del quale sia  $R$  sia  $N$  sono ridotti a metà del loro valore iniziale. Ponendo  $R = \frac{1}{2}R_0$  nell'equazione (3.1.3) si ha:

$$\frac{1}{2}R_0 = R_0 e^{-\lambda t_{1/2}},$$

che diventa facilmente:

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda},$$

che esprime la relazione fra il tempo di dimezzamento e la costante di disintegrazione.

### Tipi di radioattività

La radioattività naturale emessa dalle sostanze radioattive si divide in tre tipi, a seconda delle particelle emesse:

- **Radioattività  $\alpha$** : emissione di nuclei di elio  ${}^4He$ ; un nucleo formato da due protoni e due neutroni;
- **Radioattività  $\beta$** : emissione di elettroni
- **Radioattività  $\gamma$** : emissione di fotoni di altissima energia (cioè radiazione elettromagnetica di frequenza elevatissima, molto maggiore anche dei raggi X).

Fu provato sperimentalmente che la radioattività può avvenire come un fenomeno di disintegrazione del nucleo dell'atomo. In generale si parla di decadimento, o disintegrazione spontanea di un corpo di massa (a riposo)  $M$  quando si osserva che esso dopo un certo tempo si trasforma in  $N$  corpi di masse a riposo  $m_1, \dots, m_N$ .

Nel processo fondamentale di decadimento beta, un neutrone si trasforma in un protone:



ove  $n$  e  $p$  sono rispettivamente neutrone e protone,  $e^-$  l'elettrone, ed infine  $\nu$  rappresenta il *neutrino*.

In qualsiasi processo di decadimento, la quantità di energia liberata è unicamente determinata dalla differenza tra l'energia a riposo del nucleo primitivo e quella complessiva del nucleo finale e dei protoni di decadimento. Per poco tempo si è supposto che parte dell'energia andasse perduta nel corso del processo di decadimento beta. La soluzione dell'enigma fu presentata da Pauli nel 1931 ed è l'emissione del neutrino che assorbe parte dell'energia di decadimento.

### Difetto di massa

Poiché le particelle elementari (neutroni, protoni, ecc.) si muovono a velocità relativistiche, è necessario studiare i loro moti attraverso la meccanica relativistica. Se, come detto precedentemente, la particella di massa  $M$  si disintegra in  $N$  particelle di masse  $m_1, \dots, m_N$ , in generale si avrà

$m_1 + \dots + m_N \neq M$  poiché non vale la legge di conservazione della massa, ma solo quella dell'energia:

$$E = E_1 + \dots + E_N. \quad (3.1.4)$$

Scegliamo un sistema di unità di misura in cui  $c = 1$  (cioè assumiamo la velocità della luce come unità di misura delle velocità). Dato che nel sistema in cui la massa  $m$  è a riposo si ha  $E = mc^2$ , se l'unità di misura della velocità è la velocità della luce, l'energia di una particella qualsiasi a riposo coincide con la sua massa. È, dunque, possibile misurare massa ed energia con la medesima unità. Solitamente per misurare la massa a riposo si utilizza il cosiddetto *elettronvolt* ( $eV$ ).

**Definizione 3.1.1.** *1 eV (elettronvolt)* è l'energia cinetica acquisita da un elettrone che parte da fermo sotto l'azione di una differenza di potenziale pari a 1 Volt.

$$\begin{aligned} \underline{\text{Multipli}} : & -1 \text{ Megaelettronvolt (MeV)} = 10^6 \text{ eV}; \\ & -1 \text{ Gigaelettronvolt (GeV)} = 10^9 \text{ eV}; \\ & -1 \text{ Teraelettronvolt (TeV)} = 10^{12} \text{ eV}. \end{aligned}$$

Conversione energia:

$$1eV = 1,6 \times 10^{-19} \text{ Joule} = 1,6 \times 10^{-12} \text{ erg}.$$

Conversione massa:

$$1m_e = 9 \times 10^{-31} \text{ kg} \Rightarrow E = mc^2 \sim 0,810^{-13} \text{ J} \sim 0,5 \text{ MeV}.$$

Consideriamo d'ora in poi solo il caso  $N = 2$ , e scegliamo un sistema di unità di misura in cui  $c = 1$ . Come preannunciato sopra, se consideriamo la massa  $M$  a riposo, si avrà  $E = M$  e la (3.1.4) diventa:

$$M = E_1 + E_2 \quad (3.1.5)$$

dove  $E_1$  e  $E_2$  sono le energie delle particelle di massa  $m_1$  e  $m_2$  nel sistema in cui  $M$  è a riposo. Notiamo ora che  $E_1 > m_1$  e  $E_2 > m_2$ . Pertanto la (3.1.5) può sussistere se e solo se

$$M > m_1 + m_2.$$

Quindi se  $M < m_1 + m_2$  non può esservi disintegrazione spontanea del corpo di massa  $M$  nei due frammenti di massa  $m_1$  e  $m_2$ , equivalentemente, il corpo di massa  $M$  è stabile rispetto a questa disintegrazione.

### 3.1.1 Energia di legame

**Definizione 3.1.2.** La differenza

$$\Delta_M := M - m_1 - m_2 > 0$$

si dice *energia di legame* di  $M$  rispetto alla disintegrazione nei frammenti di massa  $m_1$  e  $m_2$ .

$\Delta_M$  si dice energia di legame perché è l'energia che occorre fornire dall'esterno al sistema per separare la particella composta di massa  $M$  nei suoi costituenti  $m_1$  e  $m_2$ , cioè per rimuovere il legame.

La forza nucleare, chiamata *interazione forte*, ha un raggio d'azione cortissimo, dell'ordine di  $10^{-15}m$  ed è talmente potente da vincere la repulsione elettrostatica di Coulomb, che agisce tra i protoni, e da costringere neutroni e protoni a rimanere nel microscopico volume del nucleo. Questo consente l'esistenza e la stabilità dei nuclei con molti protoni (in numero di  $Z$ , *numero atomico*, perché pari al numero degli elettroni dell'atomo corrispondente al nucleo) e un numero uguale o maggiore di neutroni. Il numero totale dei nucleoni (cioè protoni e neutroni) si dice *numero di massa* e si indica con  $A$ . Nuclei aventi uguale  $Z$  ma differente  $A$  si dicono *isotopi*.

*Osservazione 3.1.1.* (Datazione radioattiva)

Sono noti tre isotopi del carbonio:

- Carbonio 12 ( $C_6^{12}$ ):  $Z = 6, A = 12$ .

Questo isotopo è quello di gran lunga più diffuso, ed è quello stabile;

- Carbonio 13 ( $C_6^{13}$ ):  $Z = 6, A = 13$ .

- Carbonio 14 ( $C_6^{14}$ ):  $Z = 6, A = 14$ .

Questo isotopo é detto anche radiocarbonio ed é radioattivo; pertanto é usato nella datazione dei reperti fossili.

Esso é presente nell'atmosfera, dove circa 1 atomo di carbonio su  $10^{12}$  é  $C^{14}$  radioattivo. Ogni grammo di carbonio ha un'attività di circa 12 decadimenti per minuto, per effetto della presenza dell'isotopo  $C^{14}$ . Gli organismi assorbono questa attività per inspirazione di  $CO_2$  o per ingestione di vegetali che l'hanno assorbita. Quando l'organismo muore, smette di assorbire  $C^{14}$ , e quello presente nel suo corpo al momento della morte comincia a decadere. Misurando il ritmo di decadimento del  $C^{14}$  é possibile determinare l'età del campione.

Andiamo, ora, ad analizzare l'energia di legame nello specifico.

Detta  $a$  l'energia di legame media per particella nell'interno del nucleo dovuta a forze non elettriche (interazioni forti) l'energia di legame totale sarebbe  $aA$ , dove  $A$  é il numero di massa (numero dei nucleoni), ammesso di poter trascurare gli effetti della superficie. Di fatto c'è una energia di superficie che ha segno opposto, giacché le particelle della superficie hanno i nuclei meno vicini di quelle all'interno e la loro estrazione richiede, quindi, un lavoro minore. Dato che ogni nucleone occupa circa lo stesso spazio (densità costante), la superficie é all'incirca proporzionale ad  $A^{2/3}$ , l'energia di superficie può essere scritta  $-bA^{2/3}$ . Infine l'energia coulombiana (repulsiva, dunque a sfavore del legame) é della forma  $-cZ^2A^{2/3}$ , dove  $Z$  é il numero di protoni (numero atomico) e il raggio medio é proporzionale ad  $A^{1/3}$ .

Sommando i tre contributi e dividendo per  $A$ , otteniamo per l' **energia di legame della particella**:

$$\epsilon = a - bA^{-1/3} - cZ^2A^{-4/3},$$

o anche approssimando  $Z = (1/2)A$ ,

$$\epsilon = a - bA^{-1/3} - \frac{1}{4}cA^{2/3}.$$

Giacché i due termini variabili sono negativi, uno decrescente, l'altro crescente con  $A$ , esisterá un massimo per  $\epsilon$ .

Per confrontare la formula teorica con l'esperienza, introduciamo in luogo della massa  $M$  la cosiddetta *frazione d'impacchettamento*:

$$f = \frac{M - A}{A},$$

che si vede facilmente essere una misura dell'energia di legame media; infatti, se  $m_n$  ed  $m_p$  sono le masse del neutrone e del protone, per la *massa totale* abbiamo:

$$M = m_n(A - Z) + m_p Z - \epsilon A,$$

e con l'approssimazione  $Z = (1/2)A$ ,

$$M = A\left[\frac{1}{2}(m_n + m_p) - \epsilon\right];$$

perció

$$f = \frac{M}{A} - 1 = \left[\frac{1}{2}(m_n + m_p) - \epsilon\right] - 1,$$

dove si devono intendere sostituiti i valori  $m_n = 1,00898$ ,  $m_p = 1,00813$ . L'esistenza del minimo nella curva  $-\epsilon(A)$ , significa che, in linea di principio, tutti i nuclei sono piú o meno instabili, salvo quelli del minimo, con tendenza alla fusione per i nuclei prima del minimo e alla disintegrazione per quelli dopo il minimo.

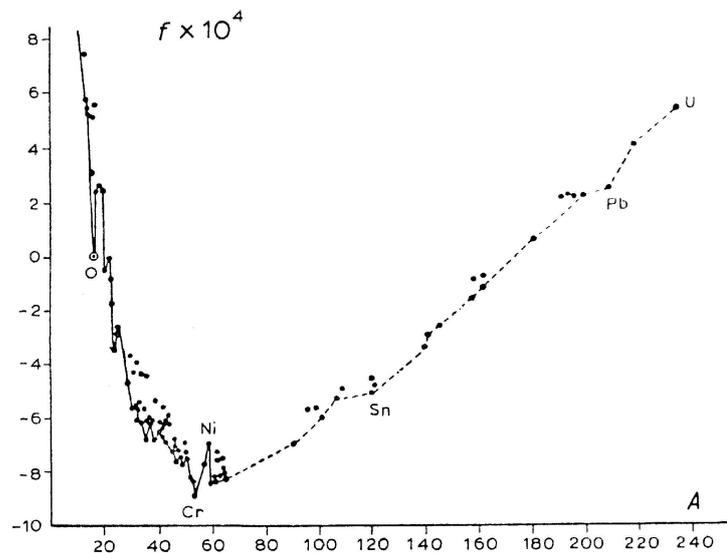


Fig. 54.1. Curva della frazione d'impacchettamento (da Gamow e Critchfield, *Theory of the Atomic Nucleus and Nuclear Energy Sources*).

Di fatto le velocità di reazione per queste trasformazioni sono così piccole da poter essere completamente trascurate a tutti gli effetti pratici. Sono note due sole eccezioni:

1. la fissione di alcuni nuclei molto pesanti (uranio, plutonio) indotta da neutroni;
2. la fusione di nucleoni in un nucleo d'elio, processo che è supposto avvenire nell'interno del sole e delle stelle come reazione a catena in cui il nucleo di carbonio funge da catalizzatore.

## 3.2 Fissione nucleare

Intorno agli anni '30, Fermi scoprì che se alcuni elementi sono sottoposti ad un bombardamento di neutroni si generano nuovi elementi radioattivi. Essendo privo di carica, il neutrone costituisce un utile proiettile nucleare non essendo sottoposto ad alcuna forza elettrostatica repulsiva quando si avvicina alla superficie di un nucleo. I *neutroni termici*, ossia i neutroni in equilibrio con la materia e a temperatura ambiente, sono particelle molto adatte ed efficaci.

Nel 1939 i fisici tedeschi Hahn e Strassmann trovarono che, bombardando l'uranio con neutroni termici, uno degli elementi generati a seguito del bombardamento era il bario.

In seguito a questa scoperta i fisici Lise Meitner e Otto Frisch dimostrarono e dunque confermarono che un nucleo di uranio, avendo assorbito un neutrone, poteva spaccarsi, liberando energia, in due frammenti circa equivalenti, uno dei quali avrebbe facilmente potuto essere il bario. Chiamarono questo processo *fissione nucleare*.

Pertanto, la fissione del nucleo di  $^{235}\text{U}$  da parte di neutroni termici, può essere così rappresentata:



ove  $X$  e  $Y$  stanno ad indicare *frammenti di fissione*, cioè nuclei di massa media, di solito altamente radioattivi, e  $b$  rappresenta il numero di neutroni

liberati.

I frammenti primitivi, formati subito dopo la fissione, risulteranno troppo ricchi in neutroni ed evaporeranno un piccolo numero di neutroni. Ma i frammenti residui  $X$  e  $Y$ , ancora troppo ricchi in neutroni, sono destinati ad avvicinarsi alla stabilità attraverso una serie di decadimenti beta in cascata.

### 3.2.1 Il modello a goccia

Bohr e Wheeler svilupparono una teoria che ben esprime la fissione nucleare, basata sull'analogia fra un nucleo e una goccia di un liquido dotata di carica, il cosiddetto: *modello a goccia*.

Quando un nucleo pesante, ad esempio  $^{235}\text{U}$ , assorbe un neutrone lento, quest'ultimo cade nella buca di potenziale associata con le potenti forze nucleari che agiscono all'interno del nucleo. La sua energia potenziale si trasforma allora in energia di eccitazione interna. La quantità di energia di eccitazione che un neutrone lento trasporta dentro il nucleo che lo assorbe equivale al lavoro che sarebbe richiesto per estrarre dal nucleo il neutrone, ossia l'energia di legame  $E_n$  del neutrone all'interno del nucleo. Ora, il nucleo, comportandosi come una goccia di liquido carica che oscilla con molta energia, comincerà ad allungarsi formando un corto 'collo' tra due 'globi' carichi. Questi due globi andranno ad allontanarsi fra loro, per effetto della forza elettrostatica di repulsione agente fra di essi, fino a strappare il collo. I due frammenti, portando ancora ciascuno una certa energia di eccitazione, schizzano in direzioni opposte: è avvenuta la fissione.

Osserviamo che la fissione potrà avvenire soltanto se il neutrone assorbito dal nucleo è in grado di fornire un'energia di eccitazione  $E_n$  abbastanza elevata da superare la barriera di potenziale  $E_b$ , o da presentare una ragionevole probabilità di riuscire ad attraversarla per effetto tunnel. Abbiamo, quindi, due casi:

- $E_n > E_b$  : per tali nuclei si può prevedere che la fissione per assorbimento avvenga;

- $E_n < E_b$  : non é disponibile energia sufficiente a superare la barriera o a tentare efficacemente di perforarla. In tal caso, il nucleo eccitato, invece di spaccarsi, si libera dell'energia di eccitazione emettendo un raggio gamma.

### 3.3 Fusione nucleare

Abbiamo osservato, a proposito della frazione d'impacchettamento, legata all'energia di legame, che si può avere liberazione di energia quando nuclei leggeri si combinano formando nuclei con numero di massa maggiore. Tale processo é chiamato *fusione nucleare*. Esso é però ostacolato dalla reciproca repulsione elettrostatica, che tende ad impedire che due particelle di ugual carica (positiva), entrino nel campo d'azione delle forze nucleari di attrazione reciproca, e arrivino a fondersi.

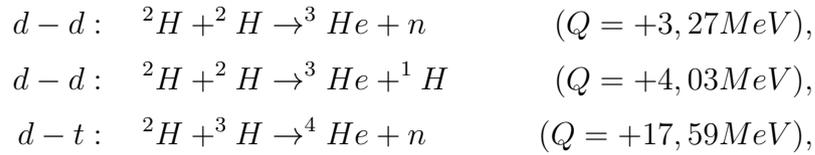
Un sistema per ottenere che due nuclei leggeri riescano a superare la loro reciproca barriera dovuta alla forza di Coulomb consiste nell'utilizzare una delle due particelle leggere come bersaglio, contro il quale va ad urtare l'altra particella. Ora, per estrarre dal processo di fusione un'energia utilizzabile in pratica, é necessario che il processo sia controllato e si svolga all'interno di una massa estesa di qualche sostanza. La prospettiva piú attraente a tali fini é quella di elevare la temperatura della sostanza ad un punto tale da consentire alle particelle di acquisire un'energia sufficiente a superare la barriera per effetto della sola agitazione termica. Questo processo si chiama *fusione termonucleare*.

Tale meccanismo é anche quello che alimenta il Sole e le altre stelle, e si presume che si sia svolto nell'universo dal momento della sua creazione, il presunto *big bang* cosmico di 15 miliardi di anni fa.

#### 3.3.1 Reattore a fusione termonucleare controllata

La realizzazione di un reattore a fusione termonucleare controllata può costituire una fonte di energia affidabile e regolabile, ma risulta essere un'impresa piuttosto difficile.

Le due reazioni piú promettenti per usi terrestri sono quelle che interessano i nuclei di deuterio+deuterio (d-d) e di deuterio+trizio (d-t):



ove  ${}^2H$  é il nucleo dell'isotopo d'idrogeno con  $A = 2$  che prende il nome di *deuterio*, mentre  ${}^3H$  é il nucleo dell'isotopo d'idrogeno con  $A = 3$  che prende il nome di *trizio*. Il primo é disponibile in quantità illimitate come componente dell'acqua di mare; il secondo é radioattivo e non é facilmente rintracciabile nell'idrogeno naturale.

Tre sono i requisiti fondamentali per il buon funzionamento di un reattore termonucleare:

1. *Elevata densità numerica  $n$  delle particelle:* deve garantire una frequenza adeguata delle collisioni deuterone-deuterone. Alle alte temperature richieste, il gas di deuterio si trova completamente ionizzato in un *plasma* neutro consistente di deuteroni ed elettroni.
2. *Elevata temperatura  $T$  del plasma:* i deuteroni che si scontrano non avrebbero altrimenti energia sufficiente a penetrare le barriere coulombiane che li separano.
3. *Lungo tempo di confinamento  $\tau$ :* c'è la necessità di trattenere in un certo volume il plasma, per un tempo abbastanza lungo, alla temperatura e alla densità volute.

Inoltre, per il buon funzionamento di un reattore nucleare, occorre che sia soddisfatto il **criterio di Lawson**, che si esprime con la condizione seguente:

$$n\tau \geq 10^{20} s \cdot m^{-3} \quad (3.3.1)$$

*Dimostrazione.* Per elevare la temperatura di un plasma ad un livello conveniente, e mantenerla facendo fronte alle perdite, si deve somministrare una

energia al plasma impiegando una potenza  $P_r$  per unità di volume. Quanto piú denso é il plasma tanto maggiore dev'essere la potenza riscaldante, con la legge proporzionale:

$$P_r = C_r n,$$

dove  $C_r$  é un'opportuna costante. Se nel plasma avviene una fusione termonucleare, si genera una potenza  $P_f$  per unità di volume, proporzionale al tempo di confinamento  $\tau$ . Ora, se  $n$  rappresenta la densità delle particelle,  $P_f$  é proporzionale a  $n^2$ . Infatti supponendo di raddoppiare la densità delle particelle, verrà raddoppiato il numero delle collisioni e il numero delle particelle vaganti. Pertanto:

$$P_f = C_f n^2 \tau.$$

Per ottenere un bilancio energetico, dev'essere:

$$P_f > P_r \Rightarrow C_f n^2 \tau > C_r n \Rightarrow n\tau > \frac{C_r}{C_f}$$

che con un'opportuna stima delle costanti  $C_r$  e  $C_f$  porta direttamente all'equazione (3.3.1).

La condizione per cui  $P_f = P_r$  é chiamata *condizione di pareggio*.  $\square$

Oltre a rispettare questo criterio, é anche necessario che la temperatura del plasma si mantenga sufficientemente alta. Per ottenere ciò si conoscono due tecniche: il *confinamento magnetico* e il *confinamento inerziale*. Esaminiamole singolarmente:

### (I) *Confinamento magnetico.*

Si utilizzano campi magnetici per tenere insieme il plasma mentre se ne aumenta la temperatura. Questo é possibile poiché un plasma consiste di particelle cariche, pertanto il suo movimento puó essere controllato da campi magnetici. Variando opportunamente l'intensità del campo, é possibile formare uno 'specchio magnetico' dal quale le particelle siano riflesse. Un altro schema ricorre ad una geometria toroidale, facendo muovere le particelle su una spirale il cui asse é curvato fino a descrivere un cerchio all'interno di una camera a vuoto a forma di toro. Un reattore a fusione basato su questo principio, realizzato per la prima

volta in Russia, ha preso il nome di *tokamak*, dalle sillabe iniziali in russo di 'camera magnetica toroidale'. In un tokamak esistono due componenti del campo magnetico:

- i) *componente toroidale*  $B_t$ . É normalmente associata a un avvolgimento toroidale di conduttori elettrici. Ma poiché l'intensità del campo toroidale decresce al crescere del raggio, per un corretto confinamento delle particelle é necessario aggiungere al campo magnetico una seconda componente:
- ii) *componente poloidale*  $B_p$ . Questa si somma con la i) per conferire al campo risultante  $B$  una struttura ad elica. Il campo poloidale é generato da una corrente  $\vec{i}$  interna allo stesso plasma, che é a sua volta indotta da una serie di avvolgimenti esterni. Questa corrente  $\vec{i}$  serve anche a riscaldare il plasma. Per ottenere la temperatura richiesta é però indispensabile ricorrere ad altri artifici, come il bombardamento del plasma dall'esterno con particelle neutre.

## (II) *Confinamento inerziale.*

Con riferimento al *criterio di Lawson* espresso nell'equazione (3.1.1), questo metodo richiede di lavorare con la densità  $n$  delle particelle estremamente elevate per tempi di confinamento  $\tau$  molto brevi. Si cerca di ottenere tempi di reazione tanto brevi che l'evento di fusione sia già avvenuto prima che le particelle del plasma abbiano avuto il tempo di spostarsi in maniera apprezzabile dalla posizione che occupavano all'inizio della fusione.

La *fusione a laser* é basata su tale principio. L'energia dell'impulso laser é destinata a riscaldare le sferette, ionizzarle in un plasma e portarle ad una temperatura dell'ordine di  $10^8 K$ . Mentre gli strati superficiali di ogni sferetta evaporano ad altissima velocità per effetto termico, la forza di reazione delle particelle che schizzano via comprime la parte centrale della sferetta, aumentandone la densità. Se tutti questi eventi si svolgessero come previsto avrebbe luogo la fusione nella zona centrale della sferetta supercompresa.

Osserviamo che durante l'esercizio di una fusione a laser, si prevede

che le sferette esplodano come minuscole bombe a idrogeno. Le particelle ad alta energia emesse dalla reazione di fusione dovrebbero essere assorbite da un 'mantello' costituito da un flusso di una sostanza (per esempio il litio) adatta a fungere da recipiente e veicolo del calore. In questo modo l'energia interna sarebbe quindi trasferita dal litio a un'altra zona dell'impianto e usata per produrre vapore, proprio come in un reattore a fissione o in una caldaia a combustibile fossile.

# Appendice A

## La bomba atomica

Il processo di fissione è accompagnato dall'emissione di neutroni. Ora, questi neutroni possono essere assorbiti e produrre la fissione in altri nuclei vicini, con una nuova emissione di neutroni, cosicché si sviluppa una valanga. Se era possibile produrre una *reazione a catena* di questo tipo, si sarebbe potuto utilizzare l'energia nucleare per scopi pratici, come propellente per motori o esplosivo per superbombe.

I fatti principali, che portano alla realizzazione di queste idee, nella cosiddetta 'bomba atomica' si basano sulle considerazioni seguenti. Si è scoperto che l'uranio 235 ha una sezione efficace di fissione per neutroni lenti piuttosto che per neutroni veloci. Ora, il problema principale per la reazione a catena è l'innesco: la massa totale di uranio necessaria per l'innesco si chiama *massa critica*, che solitamente non è mai inferiore ad una decina di chilogrammi. In una massa subcritica il numero di neutroni che sfuggono attraverso la superficie è troppo elevato per permettere l'innesco della reazione a catena. La bomba, quindi, consta di almeno due masse subcritiche che devono essere unite in un tempo molto breve; la denotazione al momento del contatto è dovuta a neutroni vaganti che sono sempre presenti.

Se la reazione a catena si innesca, essa ha luogo in brevissimo tempo, nell'ordine del centesimo di secondo. Alla fine della reazione il bilancio energetico è immensamente positivo: l'energia liberata è di decine di ordini di grandezza superiore a quella necessaria per l'innesco.

La possibilità teorica di generare una reazione così esoergica, apriva due

strade: quella bellica/militare (bomba) e quella pacifica (produzione di energia elettrica):

- **Pacifica:** consiste essenzialmente nel rallentare la reazione dopo l'innescamento ad un punto tale da evitare l'esplosione e produrre energia elettrica da mettere in rete. Essa, nella sua fase embrionale, doveva naturalmente precedere l'applicazione bellica. Si doveva infatti ottenere una prova sperimentale della fattibilità della reazione a catena, che ovviamente non poteva essere la situazione esplosiva. Occorreva dunque rallentare la reazione dopo l'innescamento. Il problema tecnico fu risolto per la prima volta nel 1942 da Fermi che realizzò la prima reazione di fissione controllata della storia.

Il metodo consisteva essenzialmente nell'inserire strati di grafite fra gli strati di uranio 235. La grafite agiva da materiale *moderatore*, cioè rallentava la reazione della quantità voluta. Dopo il 1945 la tecnologia di costruzione delle centrali nucleari si è straordinariamente evoluta. Il principio di base rimane, però, lo stesso: reazione di fissione innescata, poi rallentata da materiale moderatore, calore di reazione avviato a gassificare un fluido refrigerante. Il gas aziona le turbine che generano la corrente elettrica.

- **Militare:** la prima applicazione militare ebbe luogo col Progetto Manhattan diretto da J.R. Oppenheimer, la grande impresa scientifica e organizzativa tramite cui gli Stati Uniti programmarono di costruire la bomba atomica, nei nuovi grandi laboratori di Los Alamos, nel Nuovo Messico.

Come si è detto, il problema principale era rappresentato dall'innescamento. Nel caso delle reazioni rallentate, tipicamente lo si risolveva tramite piccoli acceleratori di particelle cariche che inviate su particolari sostanze ricche di neutroni riuscivano a liberare molte di queste particelle che venivano poi avviate sull'uranio. Si trovò che la reazione a catena poteva avere luogo solo quando la massa di uranio superava una certa quantità, come si è già detto la *massa critica*, dell'ordine della decina di chilogrammi. Nel caso della bomba, dove non si potevano certo usa-

re pesanti ed ingombranti acceleratori, si usó il sistema di far collidere l'una contro l'altra masse considerevoli di uranio  $^{235}$ , tramite urti di velocità tali che i nuclei potessero superare la repulsione coulombiana generata dai protoni per far intervenire le forze nucleari.

Con questo sistema, tutt'altro che banale da realizzare in pratica, fu progettata e costruita la prima bomba atomica, che fu fatta esplodere il 16 luglio 1945 ad Alamogordo, nel deserto del Nuovo Messico. Quel giorno segnó l'inizio dell'era nucleare.



# Bibliografia

- [1] V.I.Arnold, Sulla meccanica lagrangiana *Metodi matematici della meccanica classica*, Editori Riuniti, 57-65, 68-70 (1989).
- [2] S.Graffi, Sull'equivalenza massa-energia, Cicli delle lezioni del Prof. Sandro Graffi.
- [3] Max Born, Sull'energia di legame e fissione nucleare *Fisica Atomica*, Editore Boringheri, 297-305, Torino (1978).
- [4] D.Halliday, R.Resnick, Sulla fusione e fissione nucleare *Fisica 2*, 4 edizione, Casa Editrice Ambrosiana, 1272-1280 (1994).