

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

**SUI MEZZI POROSI:
TERMODINAMICA E
PROPAGAZIONE ONDOSA**

Tesi di Laurea in Meccanica dei Continui

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Franca Franchi

Presentata da:
Riccardo Pascuzzo

II Sessione
Anno Accademico 2010/2011

A Sara e David

Introduzione

I mezzi porosi sono dei materiali solidi che contengono fluidi; questi composti sono ben noti a tutti quanti perché abbiamo a che fare con essi ogni giorno: dai materiali da costruzione (ad esempio sabbia, cemento e mattoni) ai nostri stessi tessuti biologici (ad esempio ossa e pelle), dal terreno su cui camminiamo a molti generi alimentari e da tanti altri oggetti comuni. I diversi tipi di mezzi porosi a cui possiamo pensare sono praticamente illimitati, come lo sono le loro applicazioni nella vita reale: sono infatti impiegati nella costruzione di dispositivi per il trasferimento o la conservazione del calore, vengono studiati per stimare la propagazione sonora negli edifici e negli impianti di scarico, sono utilizzati per comprendere lo scioglimento dei ghiacci e il deposito di diossido di carbonio dovuti al riscaldamento globale, vengono analizzati per studiare la propagazione ondosa nei terremoti o per individuare giacimenti minerari al di sotto dei fondali marini. Sono state menzionate solo alcune delle più importanti applicazioni dei mezzi porosi, che comunque sono sufficienti per capire quanto sia interessante la ricerca di modelli matematici che ben descrivano il comportamento di questi materiali.

In questa tesi viene presentato un modello per lo studio della propagazione di onde acustiche e termiche in un mezzo poroso. Per fare questo, nel capitolo 1 vengono date le informazioni di base per comprendere i mezzi porosi, quali la porosità, la velocità e l'equazione di Darcy, che ci permetteranno fra l'altro di derivare l'equazione di evoluzione della densità di un mezzo poroso, in breve PME (*'porous medium equation'*), come esempio di equazione non lineare formalmente di carattere parabolico. Ci sono parec-

chie applicazioni fisiche, dove questo modello molto semplice appare in modo naturale per descrivere processi che coinvolgono diffusione o trasferimento di calore. Altre applicazioni sono state proposte nella biologia matematica, nell'infiltrazione delle acque e in altri campi. Va ricordato che, malgrado la semplicità dell'equazione e delle tante applicazioni e forse a causa del suo carattere non lineare e degenere, solo negli anni '90 del secolo scorso si è sviluppata una teoria matematica per le PME (si veda ad esempio [1]).

Sono inoltre evidenziate delle osservazioni tratte da [2], in cui si pone l'accento sulla distinzione tra la velocità del fluido considerata su tutto il mezzo poroso o solo nella parte fluida. Ciò risulta importante dato che in diversi articoli di ricerca, anche attuali, alcuni autori non fanno distinzione tra le due velocità, nonostante la loro palese differenza. Inoltre vengono forniti alcuni esempi di estensioni del modello di Darcy per fluidi con grande portata (modello di Forchheimer), per mezzi porosi con parte solida quasi assente (modello di Brinkman) e per mezzi porosi anisotropi. Infine si trovano le equazioni evolutive per determinare la temperatura e la concentrazione di un sale, che nelle applicazioni può essere pensato, ad esempio, come un inquinante che penetra nel suolo.

Nel capitolo 2, dopo aver discusso sull'equazione classica di Fourier e sull'equazione alternativa iperbolica di Cattaneo, viene presentato il modello termoporoacustico e se ne studia la compatibilità con la termodinamica. Infine si affronta il problema della propagazione di onde sia acustiche che termiche in un mezzo poroso attraverso la tecnica delle onde di discontinuità, per concludere con qualche osservazione sulla legge di evoluzione per le ampiezze di discontinuità.

0.1 Notazioni

Le principali notazioni usate sono quelle tipiche della Meccanica dei Continui (si confronti ad esempio [3]), nel contesto della termodinamica, classica e non, e della teoria della propagazione ondosa (si confronti ad esempio [4])

e [5]). Elenchiamo quelle che verranno utilizzate più di frequente nel corso della trattazione: la derivata parziale della funzione u rispetto alla grandezza x è espressa da

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1)$$

indicheremo inoltre con t la variabile temporale, mentre con la scrittura

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) u \quad (2)$$

la derivata materiale (o convettiva) di u , tipica dei fluidi. Inoltre useremo il simbolo Δ per indicare l'operatore di Laplace, ∇u per il gradiente di un campo scalare u , $\nabla \mathbf{u}$ per il gradiente di un campo vettoriale \mathbf{u} e $\nabla \cdot \mathbf{u}$ per la divergenza del vettore \mathbf{u} (in generale l'operazione \cdot è il prodotto scalare di \mathbb{R}^n).

Indice

Introduzione	i
0.1 Notazioni	ii
1 I mezzi porosi	1
1.1 Porosità e modello di Darcy	1
1.2 Equazione del mezzo poroso	3
1.3 I modelli di Forchheimer e di Brinkman	5
1.4 Modello di Darcy anisotropo	6
1.5 Equazioni per altri campi	7
1.5.1 Temperatura	7
1.5.2 Sale disciolto	8
2 Modello termo-poro-acustico	9
2.1 Aspetti termodinamici	9
2.1.1 Equazione del calore	9
2.1.2 Equazione di Maxwell-Cattaneo	10
2.2 Costruzione del modello	11
2.3 Giustificazione termodinamica	13
2.4 Propagazione ondosa	17
2.4.1 Cenni sulla teoria tridimensionale delle onde di discontinuità	18
2.4.2 Onde termiche e acustiche nel modello	19
Bibliografia	25

Capitolo 1

I mezzi porosi

1.1 Porosità e modello di Darcy

Diamo ora il concetto fondamentale della teoria dei mezzi porosi: la porosità. Essa è definita come il rapporto tra la frazione occupata dal fluido e il volume totale del mezzo poroso, in simboli

$$\varphi = \frac{\text{volume del fluido}}{\text{volume totale del mezzo poroso}}. \quad (1.1)$$

Chiaramente $0 \leq \varphi \leq 1$. Definendo φ in questo modo stiamo assumendo che tutti i pori siano connessi tra loro, perché altrimenti dovremmo introdurre una "porosità effettiva" definita come il rapporto tra la frazione dei pori connessi e il volume totale.

Per i mezzi naturali, φ generalmente non supera 0.6, mentre per i materiali artificiali, come il metallo espanso, la porosità è vicina a 1. Nella tabella (1.1) sono riportati alcuni esempi di materiali con la loro relativa porosità.

Prima di arrivare a scrivere l'equazione per il mezzo poroso dobbiamo compiere una distinzione tra la velocità del fluido in un volume di mezzo poroso (che comprende sia la parte solida sia la parte fluida) e quella ristretta alla sola parte di fluido. La prima, che indicheremo con \mathbf{v} , detta velocità di Darcy, è legata alla seconda, detta velocità intrinseca e denotata con \mathbf{V} ,

Materiale	Porosità
Arenaria	0.08-0.38
Calcare	0.04-0.10
Carbone	0.02-0.12
Lana di vetro	0.88-0.93
Mattone	0.12-0.34
Pelle	0.56-0.59
Pelo di gatto	0.95-0.99
Sabbia	0.37-0.50

Tabella 1.1: Porosità di alcuni materiali comuni

attraverso la relazione di Dupuit-Forchheimer

$$\mathbf{v} = \varphi \mathbf{V} \quad (1.2)$$

dove φ è la porosità del mezzo.

Introduciamo ora l'equazione alla base della teoria dei mezzi porosi: la legge di Darcy. Essa afferma che la portata di un fluido in un mezzo poroso è proporzionale al gradiente di pressione:

$$\mu u = -k \frac{dp}{dx} \quad (1.3)$$

dove μ è la viscosità e k è la permeabilità, entrambe costanti positive. La (1.3) si generalizza al caso 3-dimensionale e spesso si considera la presenza di forze esterne come la gravità: denotando la forza agente con \mathbf{f} la (1.3) si scrive

$$0 = -\nabla p - \frac{\mu}{k} \mathbf{v} + \rho \mathbf{f} \quad (1.4)$$

dove ρ è la densità del fluido. L'equazione (1.4) descrive il flusso di un fluido in un mezzo poroso saturo, purché la portata sia sufficientemente bassa. Osserviamo infine che, come già ricordato nell'introduzione, per alcuni autori l'utilizzo della velocità di Darcy assieme alla pressione intrinseca è una possibile fonte di confusione. Per questo motivo può risultare conveniente

riscrivere la legge di Darcy utilizzando solo quantità intrinseche, nel seguente modo

$$\nabla p + \mu R \mathbf{V} = 0 \quad (1.5)$$

dove $R = \frac{\varphi}{k}$ denota la "ritardabilità". Chiaramente la porosità φ non appare esplicitamente nell'equazione (1.5), ma è incorporata nel fattore R . Altri termini intrinseci, come gli effetti di una rotazione rappresentati dalla forza di Coriolis o altri effetti inerziali, possono essere aggiunti ed espressi in termini di \mathbf{V} .

1.2 Equazione del mezzo poroso

Siamo ora pronti per scrivere l'equazione di continuità per un mezzo poroso: supponiamo che il fluido sia comprimibile; allora, per la conservazione della massa, la densità soddisfa la seguente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.6)$$

Notiamo che se il fluido dovesse essere incomprimibile, allora invece della (1.6) avremmo

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

perché varrebbe la condizione di incomprimibilità

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.7)$$

da cui, sotto la condizione di omogeneità del fluido, si avrebbe $\rho = \rho_0 > 0$ costante.

Riscrivendo la (1.4) con $\mathbf{f} = 0$ e considerando p funzione di ρ otteniamo

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla p \quad (1.8)$$

che, sostituita nella (1.6), porta a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \nabla \cdot (\rho \nabla p) = 0$$

o anche

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \nabla \cdot (\rho p'(\rho) \nabla \rho) = 0.$$

Sia $\Phi(\rho)$ una funzione (potenziale integrale) tale che

$$\nabla \Phi = \Phi'(\rho) \nabla \rho = \frac{k \rho p'(\rho)}{\mu} \nabla \rho,$$

così che l'ultima equazione si possa riscrivere come

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \Delta \Phi(\rho) = 0, \quad (1.9)$$

che non è altro che l'equazione di continuità per un mezzo poroso.

Nel caso di un gas ideale politropico, valgono le equazioni (1.4), (1.6) e l'equazione di stato

$$p = p_0 \rho^\gamma \quad (1.10)$$

dove $p_0 > 0$, mentre l'esponente γ , detto invariante adiabatico, è sempre ≥ 1 , in particolare $\gamma = 1$ per processi isotermici e $\gamma > 1$ per quelli adiabatici. Nel caso p_0 costante, inserendo la (1.10) nella (1.4) con $f = 0$, otteniamo

$$\mu \mathbf{v} = -p_0 k \gamma \rho^{\gamma-1} \nabla \rho \quad (1.11)$$

quindi, sostituendo la (1.11) nella (1.6) si ha

$$\begin{aligned} \rho_t + \nabla \cdot \left(-\frac{k p_0 \gamma}{\mu} \rho^\gamma \nabla \rho \right) &= 0 \\ \rho_t - \frac{k p_0 \gamma}{\mu(\gamma+1)} \nabla \cdot (\nabla \rho^{\gamma+1}) &= 0 \end{aligned}$$

e infine

$$\rho_t = c \Delta(\rho^m), \quad (1.12)$$

dove $m = 1 + \gamma$ e $c = \frac{k p_0 \gamma}{\mu(\gamma+1)} > 0$ è una costante, che può essere normalizzata a 1. L'equazione (1.12) descrive l'evoluzione nel tempo della densità di un fluido ideale politropico in un mezzo poroso ed è un'equazione parabolica non lineare che appare nella descrizione di differenti fenomeni naturali legati alla diffusione del calore. Altre applicazioni sono state proposte nella biologia matematica, nell'infiltrazione delle acque e in altri campi. Va ricordato che,

malgrado la semplicità dell'equazione e forse a causa del suo carattere non lineare e degenere, solo negli anni '90 del secolo scorso si è sviluppata una teoria matematica per le PME.

1.3 I modelli di Forchheimer e di Brinkman

Se la portata dovesse eccedere un certo valore allora la relazione lineare di (1.3), o di (1.4), non sarebbe adeguata per descrivere accuratamente la velocità del fluido. Nel 1901 Forchheimer propose di modificare la legge di Darcy, utilizzando una delle tre seguenti relazioni non lineari

$$\alpha = au + bu^2, \quad \alpha = mv^n, \quad \alpha = au + bu^2 + cu^3,$$

dove α denota il primo membro dell'equazione (1.3). L'utilizzo della prima formula portò alla seguente generalizzazione della (1.4) con

$$0 = -\nabla p - \frac{\mu}{k} \mathbf{v} - b |\mathbf{v}| \mathbf{v} + \rho \mathbf{f}, \quad (1.13)$$

nota comunemente come equazione di Forchheimer. Per fluidi incomprimibili si accompagna a questa anche l'equazione (1.7).

Se la porosità φ del mezzo poroso è vicina ad 1, ossia la parte solida è quasi assente, allora i modelli sopra illustrati sono soltanto delle descrizioni molto approssimative di quello che realmente succede. Il modello che invece più si avvicina a questa situazione è quello in cui si sostituisce alla (1.4) la seguente

$$0 = -\nabla p - \frac{\mu}{k} \mathbf{v} + \lambda \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{f}, \quad (1.14)$$

dove $\lambda > 0$ è un'altra viscosità, detta *viscosità effettiva*. Questa equazione è detta di Brinkman (1947) e in essa si può notare che il terzo termine è analogo al Laplaciano che appare nel modello del fluido viscoso incomprimibile di Navier-Stokes.

Osserviamo infine che nei modelli descritti in questa sezione la velocità considerata è quella di Darcy. Se invece avessimo voluto scriverle solo con quantità intrinseche, avremmo utilizzato la ritardabilità R come nella sezione 1.2.

1.4 Modello di Darcy anisotropo

I modelli discussi nelle sezioni precedenti si basano su una situazione di isotropia, ma molti mezzi porosi esibiscono forti caratteristiche anisotrope, come ad esempio il legno o gli strati di roccia, le cui proprietà fisiche dipendono dalla direzione in cui si analizzano le sostanze stesse. Per studiare accuratamente questi materiali è dunque necessario modificare i modelli precedenti: in questo paragrafo siamo interessati ai cambiamenti della (1.4). Le modifiche anisotrope per gli altri modelli seguiranno in maniera analoga. Solitamente la permeabilità del fluido varia se la frazione solida del mezzo poroso mostra una forte anisotropia. Tenendo conto di questo fatto, sostituiamo alla permeabilità k in (1.4) un tensore di permeabilità \mathbf{K} , così da ottenere l'equazione

$$\mathbf{K}\nabla p = -\mu\mathbf{v} + \rho\mathbf{K}\mathbf{f}. \quad (1.15)$$

Introduciamo ora un tensore \mathbf{M} tale che, per una costante positiva c , si abbia $\mathbf{M} = c\mathbf{K}^{-1}$; con questa relazione la (1.15) diventa

$$0 = -\nabla p - \frac{\mu}{c}\mathbf{M}\mathbf{v} + \rho\mathbf{g}, \quad (1.16)$$

la quale si accompagna alla (1.7). La forma precisa di \mathbf{K} dipende dalla struttura della matrice solida sottostante: ad esempio, se la permeabilità nella direzione verticale è diversa da quella nella direzione orizzontale, allora per $k \neq k_3, k, k_3 > 0$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}$$

e, scegliendo $c = k_3$, avremo

$$M = \begin{pmatrix} \frac{k_3}{k} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_3}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5 Equazioni per altri campi

Vediamo ora come sia possibile determinare la temperatura o la concentrazione di una sale in un punto del fluido all'interno di un mezzo poroso: allo scopo presentiamo una derivazione appropriata dell'equazione che governa questi campi.

1.5.1 Temperatura

Supponiamo che la temperatura della parte solida coincida con quella della parte fluida: è una approssimazione, ma ci semplifica il problema. Ora, sia Ω un piccolo volume di un mezzo poroso, contenente il punto \mathbf{x} . Indichiamo con la lettera s le quantità riferite alla parte solida e con la lettera f quelle riferite alla parte fluida; in Ω indichiamo i due volumi con Ω_s e Ω_f . Siano inoltre κ_s e κ_f le diffusività termiche, ρ_{0s} e ρ_{0f} le densità, c_s il calore specifico del solido, c_{pf} il calore specifico a pressione costante del fluido, \mathbf{v} la velocità di Darcy nel punto \mathbf{x} e \mathbf{V} la velocità intrinseca in \mathbf{x} , legata alla \mathbf{v} dalla (1.2). Considerando separatamente la componente solida da quella fluida, abbiamo per la temperatura θ le equazioni

$$(\rho_0 c)_s \frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa_s \Delta \theta, \quad (1.17)$$

$$(\rho_0 c_p)_f \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \theta \right) = \kappa_f \Delta \theta. \quad (1.18)$$

Sommando la (1.17) moltiplicata per $(1 - \varphi)$ e la (1.18) moltiplicata per φ , otteniamo

$$[\varphi(\rho_0 c_p)_f + (\rho_0 c)_s(1 - \varphi)] \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\rho_0 c_p)_f \varphi \mathbf{V} \cdot \nabla \theta = [\kappa_s(1 - \varphi) + \kappa_f \varphi] \Delta \theta. \quad (1.19)$$

Denotando con $M = \frac{(\rho_0 c_p)_s}{(\rho_0 c)_m}$, dove $(\rho_0 c)_m = \varphi(\rho_0 c_p)_f + (\rho_0 c)_s(1 - \varphi)$, con $\kappa = \frac{k_m}{(\rho_0 c_p)_f}$, dove $k_m = \kappa_s(1 - \varphi) + \kappa_f \varphi$, e usando la (1.2), la (1.19) può essere riscritta

$$\frac{1}{M} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \kappa \Delta \theta. \quad (1.20)$$

L'equazione (1.20) descrive il campo della temperatura in un mezzo poroso: possiamo notare che differisce dalla classica equazione per la temperatura in un fluido, per la presenza del fattore $\frac{1}{M}$.

1.5.2 Sale disciolto

Per ricavare l'equazione per la concentrazione C di un sale disciolto in un fluido che si trova in un mezzo poroso dobbiamo adottare una procedura simile a quella precedente. Supponiamo per semplicità che il sale non sia assorbito dalla matrice solida. Allora C , nella parte fluida, soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla C = k_C \Delta \theta. \quad (1.21)$$

Usando la (1.2), troviamo immediatamente l'equazione che descrive C :

$$\varphi \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla C = \varphi k_C \Delta \theta. \quad (1.22)$$

Capitolo 2

Modello termo-poro-acustico

2.1 Aspetti termodinamici

In questa sezione consideriamo il caso di un corpo rigido conduttore di calore e, sotto l'ipotesi della classica legge di Fourier, deduciamo l'equazione parabolica di diffusione del calore. Viene sviluppata poi una breve discussione sul cosiddetto *paradosso del calore* che, a causa della parabolicità del modello, si propaga con velocità infinita. Si presenta quindi il modello alternativo di Cattaneo introdotto proprio per superare tale paradosso.

2.1.1 Equazione del calore

Nel caso di un corpo rigido statico conduttore di calore con densità costante ρ_0 , deve essere soddisfatta l'equazione di bilancio dell'energia che assume la forma:

$$\rho_0 \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = r \quad (2.1)$$

All'equazione (2.1) si associa classicamente l'equazione costitutiva di Fourier:

$$\mathbf{q} = -\chi \nabla \theta \quad (2.2)$$

Inoltre, supponendo che $e = e(\theta)$ e $\chi = \chi(\theta)$ e sostituendo la (2.2) nella (2.1) si ottiene:

$$\rho_0 c_V \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot (\chi \nabla \theta) = r \quad (2.3)$$

avendo indicato con $c_V = e'(\theta) = \frac{de}{d\theta} > 0$ il calore specifico a volume costante. La (2.3), applicando una nota identità, può essere riscritta:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \mu \Delta \theta - \nu (\nabla \theta)^2 = r \quad (2.4)$$

dove si è indicato $\mu(\theta) = \frac{\chi(\theta)}{\rho_0 c_V(\theta)}$, $\nu(\theta) = \frac{\chi'(\theta)}{\rho_0 c_V(\theta)}$ e $\chi'(\theta) = \frac{d\chi(\theta)}{d\theta}$.

L'equazione (2.4) prende il nome di *equazione del calore* e governa l'evoluzione della temperatura nel conduttore rigido. Nel caso semplice in cui sia χ sia c_V sono costanti ed $r = 0$, otteniamo la classica equazione di diffusione parabolica lineare:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \mu \Delta \theta = 0. \quad (2.5)$$

Se assegniamo la temperatura al tempo iniziale come funzione dello spazio

$$\theta(\mathbf{x}, 0) = \theta_0(\mathbf{x}), \quad (2.6)$$

si può verificare che la soluzione di (2.5) che soddisfa la (2.6) è

$$\theta(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi\mu t)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_0(\mathbf{y}) \exp\left(-\frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x})^2}{4\mu t}\right) d\mathbf{y}. \quad (2.7)$$

Una caratteristica di (2.7) è quella che $\theta(\mathbf{x}, t) \neq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ appena $t > 0$ anche se $\theta_0(\mathbf{x}) \neq 0$ solo in una regione limitata $D \in \mathbb{R}^3$. Questo fatto è noto come il *paradosso del calore*: una perturbazione localizzata al tempo $t = 0$ in D si propaga istantaneamente in tutto lo spazio. Si tratta di un fenomeno tipico delle equazioni paraboliche e, per eliminare il paradosso, è necessario modificare l'equazione, in modo da renderla iperbolica.

2.1.2 Equazione di Maxwell-Cattaneo

Cattaneo, riprendendo un'idea di Maxwell, osservò che nel non equilibrio la temperatura cambia al variare del tempo e quindi ipotizzò che il flusso del calore non dipendesse solo dal gradiente della temperatura, ma anche dal gradiente della derivata della temperatura:

$$\mathbf{q} = -\chi \nabla \theta + \chi \tau \nabla \dot{\theta} \quad (2.8)$$

dove il coefficiente $\tau > 0$ ha le dimensioni di un tempo. La (2.8) si può anche scrivere come:

$$\mathbf{q} = -\chi \left(1 - \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla \theta. \quad (2.9)$$

Se τ è molto piccolo, l'operatore inverso è

$$\left(1 - \tau \frac{\partial}{\partial t} \right)^{-1} = 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.10)$$

e quindi dalle (2.9) e (2.10), si ha

$$\left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{q} = -\chi \nabla \theta$$

ovvero si ricava la nuova equazione

$$\tau \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{q} = -\chi \nabla \theta. \quad (2.11)$$

Una prima differenza fra la (2.11) e la (2.2) si può notare quando θ è costante; nel caso di Fourier (2.2) il flusso di calore \mathbf{q} è identicamente nullo, mentre nel caso di Cattaneo dalla (2.11) si ha

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(0) e^{-t/\tau}$$

e quindi occorre del tempo prima che \mathbf{q} diventi trascurabile; per questo motivo τ è detto *tempo di rilassamento*.

In generale anche $\tau = \tau(\theta)$; nel caso semplice di $\tau = \text{costante}$, differenziando rispetto al tempo la (2.1) con $r = 0$ e tenendo conto di (2.11), si ha l'equazione

$$\tau \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\partial \theta}{\partial t} - \mu \Delta \theta = 0. \quad (2.12)$$

Questa è un'equazione iperbolica ed è nota in letteratura come *equazione dei telegrafisti*, così il 'paradosso' del calore viene risolto se $\tau > 0$. Per $\tau \rightarrow 0$ la (2.12) viene invece a coincidere con la classica equazione del calore (2.5).

2.2 Costruzione del modello

Consideriamo ora il caso di un mezzo poroso, in cui siamo interessati a studiare contemporaneamente la propagazione del calore e quella delle onde

sonore. Iniziamo prendendo in esame le equazioni che descrivono classicamente un fluido perfetto, nell'ordine equazione di continuità, di conservazione della quantità di moto e dell'energia:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.13)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{F} \quad (2.14)$$

$$\rho \dot{e} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (2.15)$$

dove ρ , \mathbf{v} ed $e = e(\rho, \theta)$ sono rispettivamente la densità, la velocità e l'energia interna del fluido nel mezzo poroso, mentre \mathbf{F} , $p = p(\rho, \theta)$ e \mathbf{q} sono rispettivamente una forza esterna, la pressione agente e il vettore flusso di calore. Modifichiamo ora la (2.14) aggiungendo un termine (detto di Darcy) della forma $-k\mathbf{v}$, dove k è una costante positiva, dipendente dal mezzo considerato, e la (2.15) includendo un "supply" di calore esterno r :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{F} - k\mathbf{v} \quad (2.16)$$

$$\rho \dot{e} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r. \quad (2.17)$$

Le equazioni (2.13), (2.16) e (2.17) formano la base per il modello termo-poro-acustico che vogliamo studiare. Manca l'equazione costitutiva per il flusso di calore \mathbf{q} , la quale tipicamente viene individuata nella legge di Fourier (2.2), che però, come si è visto nella sezione precedente, porta al paradosso della velocità infinita della propagazione del calore. Per evitare questo problema, si preferisce prendere l'equazione di Cattaneo (2.11) che invece conduce ad un'equazione iperbolica compatibile, come vedremo, con la propagazione ondosa.

Osserviamo infine come si possa ricavare la (2.11) in maniera alternativa alla precedente con il seguente ragionamento: supponiamo che nella (2.2) ci sia un piccolo ritardo nel tempo $\tau > 0$ tale che:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t + \tau) = -\chi \nabla \theta(\mathbf{x}, t). \quad (2.18)$$

Sviluppando in serie di Taylor otteniamo

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) + \tau \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \tau^2 \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) + o(\tau^3) = -\chi \nabla \theta(\mathbf{x}, t)$$

così, troncando al primo ordine, ritroviamo l'equazione (2.11) per τ piccolo

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) + \tau \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \approx -\chi \nabla \theta(\mathbf{x}, t).$$

che si può generalizzare al caso di un corpo in moto, sostituendo la derivata convettiva a quella parziale nel tempo, nel seguente modo

$$\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{\tau} \mathbf{q} = -\frac{\chi}{\tau} \nabla \theta. \quad (2.19)$$

Riassumendo, il modello termo-poro-acustico è governato dalle seguenti equazioni:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.20a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{F} - k \mathbf{v}, \quad (2.20b)$$

$$\rho \dot{e} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r, \quad (2.20c)$$

$$\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{\tau} \mathbf{q} = -\frac{\chi}{\tau} \nabla \theta, \quad (2.20d)$$

a cui si deve aggiungere la relazione di stato $p = p(\rho, \theta)$.

2.3 Giustificazione termodinamica

Presentiamo ora una giustificazione del modello appena introdotto, attraverso argomenti di termodinamica del non equilibrio, adottando lo stesso procedimento di [7], nell'ambito della termodinamica con variabili interne. Consideriamo preliminarmente la disuguaglianza dell'entropia che traduce localmente il *secondo Principio della termodinamica*, nella sua forma classica

$$\rho \dot{\eta} \geq -\nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{\theta} + \rho \frac{r}{\theta} \quad (2.21)$$

dove η è la densità specifica di entropia, $\frac{\mathbf{q}}{\theta}$ rappresenta il flusso di entropia e $\frac{r}{\theta}$ il "supply" di entropia. Moltiplichiamo ora la (2.21) per la temperatura e usiamo la nota identità

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{\theta} = \frac{1}{\theta} \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{\theta^2} \nabla \theta \cdot \mathbf{q}$$

così da ottenere

$$\begin{aligned} \rho \theta \dot{\eta} &\geq -\theta \frac{1}{\theta} \nabla \cdot \mathbf{q} + \theta \frac{1}{\theta^2} \nabla \theta \cdot \mathbf{q} + \rho \frac{r}{\theta} \\ &= -\nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{1}{\theta} \nabla \theta \cdot \mathbf{q} + \rho r. \end{aligned}$$

Se introduciamo l'energia libera di Helmholtz $\psi = e - \theta \eta$, considerando che $\dot{\psi} = \dot{e} - \dot{\theta} \eta - \theta \dot{\eta}$, allora abbiamo

$$\rho \dot{e} - \rho(\dot{\psi} + \dot{\theta} \eta) \geq -\nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{1}{\theta} \nabla \theta \cdot \mathbf{q} + \rho r.$$

Così, usando la (2.20c), possiamo riscrivere la disequazione precedente nel seguente modo

$$-p \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r - \rho(\dot{\psi} + \dot{\theta} \eta) \geq -\nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{1}{\theta} \nabla \theta \cdot \mathbf{q} + \rho r.$$

quindi, semplificando e portando tutto al primo membro, arriviamo alla forma

$$-\rho(\dot{\psi} + \dot{\theta} \eta) - \frac{1}{\theta} \nabla \theta \cdot \mathbf{q} - p \nabla \cdot \mathbf{v} \geq 0, \quad (2.22)$$

nota come disuguaglianza di Clausius-Duhem.

A questo punto definiamo una variabile interna ξ tale che soddisfi la seguente equazione di evoluzione

$$\dot{\xi} = -m \nabla \theta - n \xi, \quad (2.23)$$

dove m ed $n > 0$ sono scalari dipendenti dalle variabili indipendenti della teoria costitutiva; qui consideriamo quella che prevede che le quantità ψ , η , e , p e \mathbf{q} possono dipendere dalle variabili indipendenti che costituiscono lo stato termodinamico classico $(\rho, \theta, \nabla \theta)$ e dalla nuova variabile ξ . Possiamo differenziare l'energia libera, scelto come potenziale termodinamico, tenendo conto delle sue dipendenze, scrivendo

$$\dot{\psi} = \psi_\rho \dot{\rho} + \psi_\theta \dot{\theta} + \psi_{\nabla \theta} \cdot \dot{\nabla \theta} + \psi_\xi \cdot \dot{\xi}$$

e sostituendola nella (2.22) risulta

$$-\rho\psi_\rho\dot{\rho} - \rho\dot{\theta}(\psi_\theta + \eta) - \rho\psi_{\nabla\theta} \cdot \dot{\nabla\theta} - \rho\psi_\xi \cdot \dot{\xi} - \frac{1}{\theta}\nabla\theta \cdot \mathbf{q} - p\nabla \cdot \mathbf{v} \geq 0.$$

Osservando che per l'equazione (2.20a) $\dot{\rho} = -\rho\nabla \cdot \mathbf{v}$, allora otteniamo la seguente disequaglianza

$$(\rho^2\psi_\rho - p)\nabla \cdot \mathbf{v} - \rho\dot{\theta}(\psi_\theta + \eta) - \rho\psi_{\nabla\theta} \cdot \dot{\nabla\theta} - \rho\psi_\xi \cdot \dot{\xi} - \frac{1}{\theta}\nabla\theta \cdot \mathbf{q} \geq 0, \quad (2.24)$$

valida per ogni processo termodinamico ammissibile. Una disequaglianza del tipo (2.24) può essere messa nella forma

$$\sum_{i=1}^N a_i x_i + b \geq 0 \quad (2.25)$$

generalizzabile al caso in cui gli a_i e x_i sono vettori o tensori. Supponiamo che la (2.25) sia identicamente soddisfatta per tutti i valori arbitrari di x_i , in qualche range di valori che include i valori $x_i = 0$, con i coefficienti a_i funzioni di altre variabili, indipendenti da tutti gli x_i . Allora il lemma di Coleman dice che la condizione necessaria e sufficiente affinché la (2.25) sia valida è che

$$a_i = 0 \quad \forall i \quad \text{e} \quad b \geq 0.$$

Sfruttando questo lemma nel caso della (2.24), poiché $\nabla \cdot \mathbf{v}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\nabla\theta}$ sono arbitrari e i loro coefficienti sono indipendenti da essi, otteniamo le seguenti equazioni di compatibilità:

$$\psi_{\nabla\theta} = 0, \quad \eta = -\psi_\theta \quad \text{e} \quad p = \rho^2\psi_\rho. \quad (2.26)$$

Così la (2.24) si riduce alla forma

$$-\rho\psi_\xi \cdot \dot{\xi} - \frac{1}{\theta}\nabla\theta \cdot \mathbf{q} \geq 0, \quad (2.27)$$

da cui parte la discussione finale per stabilire la compatibilità del nostro modello con la termodinamica delle variabili interne. Ora, utilizzando la (2.23) nella (2.27), otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\rho\psi_\xi \cdot (-m\nabla\theta - n\xi) - \frac{1}{\theta}\nabla\theta \cdot \mathbf{q} \\ &= \rho\psi_\xi \cdot m\nabla\theta + \rho\psi_\xi \cdot n\xi - \frac{1}{\theta}\nabla\theta \cdot \mathbf{q} \end{aligned}$$

che si può scrivere anche

$$\nabla\theta \cdot \left(m\rho\psi_{\xi} - \frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) + n\rho\psi_{\xi} \cdot \xi \geq 0. \quad (2.28)$$

Osserviamo che, sempre per il lemma di Coleman, valgono le restrizioni termodinamiche

$$\mathbf{q} = m\rho\theta\psi_{\xi} \quad \text{e} \quad n\rho\psi_{\xi} \cdot \xi \geq 0. \quad (2.29)$$

Vogliamo capire che cosa rappresenta la variabile ξ che abbiamo introdotto; per questo notiamo che alla stazionarietà si ha

$$\mathbf{q} = -\chi\nabla\theta \quad \text{e} \quad \dot{\xi} = 0 \quad (2.30)$$

così la (2.23) si riduce a

$$\xi = -\frac{m}{n}\nabla\theta \Leftrightarrow \nabla\theta = -\frac{n}{m}\xi$$

quindi, utilizzando la (2.30), si trova il legame cercato per la variabile interna ξ e il vettore flusso di calore \mathbf{q}

$$\mathbf{q} = \frac{n\chi}{m}\xi. \quad (2.31)$$

Infine, usando la prima delle (2.29) e tenendo conto di (2.31)

$$\psi_{\xi} = \frac{1}{\rho m \theta} \mathbf{q} = \frac{n\chi}{\rho \theta m^2} \xi.$$

Quindi la ψ_{ξ} , quando m ed n non dipendono da ξ , dipende linearmente da ξ , ovvero da \mathbf{q} . In base a queste considerazioni, si può adottare come modello costitutivo quello ottenuto dalla seguente scelta di energia libera

$$\psi(\rho, \theta, \xi) = \hat{\psi}(\theta, \rho) + \frac{n\chi}{2\rho\theta m^2} \xi^2, \quad (2.32)$$

che mostra una dipendenza quadratica dalla variabile ψ_{ξ} : $\hat{\psi}(\theta, \rho)$ rappresenta la dipendenza classica detta anche dell'equilibrio, mentre il secondo addendo denota il pezzo del non equilibrio.

Infine possiamo osservare che dalle (2.26) si hanno le seguenti condizioni di compatibilità del modello scelto (2.32) con la termodinamica

$$p = \rho^2 \hat{\psi}_\rho - \frac{n\chi}{2\theta m^2} \boldsymbol{\xi}^2 \quad (2.33)$$

$$\eta = -\hat{\psi}_\theta + \frac{n\chi}{2\rho\theta^2 m^2} \boldsymbol{\xi}^2 \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} e &= \psi + \theta\eta \\ &= \hat{\psi} + \frac{n\chi}{2\rho\theta m^2} \boldsymbol{\xi}^2 - \theta\hat{\psi}_\theta + \frac{n\chi}{2\rho\theta m^2} \boldsymbol{\xi}^2 \\ &= \hat{\psi} - \theta\hat{\psi}_\theta + \frac{n\chi}{\rho\theta m^2} \boldsymbol{\xi}^2. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Usando la (2.31) nelle relazioni precedenti otteniamo, come relazioni di stato del non equilibrio:

$$p = \rho^2 \hat{\psi}_\rho - \frac{\mathbf{q}^2}{2\theta n} \quad (2.36)$$

$$\eta = -\hat{\psi}_\theta + \frac{\mathbf{q}^2}{2\rho\theta^2 n\chi} \quad (2.37)$$

$$e = \hat{\psi} - \theta\hat{\psi}_\theta + \frac{\mathbf{q}^2}{\rho\theta n\chi}. \quad (2.38)$$

Infine esplicitando $\boldsymbol{\xi}$ nella (2.31) e sostituendola nell'equazione (2.23), notiamo che si ha la seguente generalizzazione iperbolica dell'equazione di Maxwell-Cattaneo:

$$\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{n\chi} \right) + \frac{m}{\xi} \right) \mathbf{q} + \left(\frac{m}{n\chi} \right) \dot{\mathbf{q}} = -m\nabla\theta$$

che risulta molto interessante quando m , n e χ non sono costanti ma dipendono dalla temperatura (in caso contrario si riavrebbe la (2.11)).

2.4 Propagazione ondosa

Dopo aver dato una giustificazione termodinamica alle equazioni del modello (2.20), studiamo ora la propagazione di onde acustiche e termiche, ricorrendo alla teoria delle *onde di discontinuità*, che si applica a sistemi iperbolici (lineari e non lineari). Mettiamoci nel caso semplificato in cui $e = e(\theta)$

e $p = p(\rho, \theta)$; inoltre siano τ e χ delle costanti positive. Prima di procedere, premettiamo alcune osservazioni e definizioni che saranno utili nella parte successiva (cfr. ad esempio [4]).

2.4.1 Cenni sulla teoria tridimensionale delle onde di discontinuità

Consideriamo una superficie regolare $\Sigma \in \mathbb{R}^3 \times \mathbf{I}$, dove $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}^+$. Si definisce il *salto* di una funzione f su Σ

$$[f] = f^+ - f^-$$

dove f^+ e f^- sono i limiti di f su Σ da sinistra e da destra rispettivamente. Osserviamo che le funzioni continue hanno salto nullo. Inoltre il salto del prodotto di due funzioni f e g non è il prodotto dei salti, ma vale

$$[fg] = f^+[g] + g^+[f] - [f][g]$$

ed in particolare, se g è continua:

$$[fg] = g^+[f] = g[f]. \quad (2.39)$$

Se $\gamma(\mathbf{x}, t) = 0$, con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ e $t \in \mathbf{I}$, è una funzione almeno di classe C^2 che descrive localmente Σ , allora derivando rispetto al tempo si ha

$$\frac{d}{dt}\gamma(\mathbf{x}, t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\gamma(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\gamma(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0.$$

Chiamando $\mathbf{n} = \frac{\nabla\gamma}{\|\nabla\gamma\|}$ il versore normale in un punto di Σ , da

$$\frac{d}{dt}\gamma(\mathbf{x}, t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\gamma(\mathbf{x}, t) + \nabla\gamma(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{x}} \frac{\|\nabla\gamma\|}{\|\nabla\gamma\|} = 0$$

si pone

$$\lambda = \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{\|\nabla\gamma\|} \frac{\partial}{\partial t}\gamma(\mathbf{x}, t)$$

e si dice che λ è la *velocità normale di avanzamento* con cui si muove il fronte d'onda attraverso la superficie. Infine, pensando a δ come operatore differenziale (normale) tale che

$$\delta f = \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right],$$

si hanno le seguenti *sostituzioni formali* di G. Boillat:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial f}{\partial t} \right] &\longrightarrow -\lambda \delta f \\ [\nabla f] &\longrightarrow \delta f \mathbf{n} \\ [\nabla \cdot \mathbf{g}] &\longrightarrow \delta \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \\ \left[\frac{df}{dt} \right] &\longrightarrow (-\lambda + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \delta f = U \delta f \end{aligned} \tag{2.40}$$

2.4.2 Onde termiche e acustiche nel modello

Fatte queste premesse, supponiamo ora che le variabili ρ , \mathbf{v} , θ e \mathbf{q} siano continue attraverso Σ (con valori limiti definiti sui due lati della superficie), mentre le loro derivate parziali siano discontinue. Ciò equivale a dire che Σ è una *superficie di discontinuità del I ordine*. Mettiamoci nel caso semplificato in cui $e = e(\theta)$, $p = p(\rho, \theta)$, $r = 0$ e $\mathbf{F} = 0$; inoltre siano τ e χ delle costanti. Allora sotto tali ipotesi, prendendo i "salti" delle equazioni del modello, lungo un fronte d'onda Σ e ricordando la (2.39), otteniamo

$$\begin{aligned} [\rho_t] + [\nabla \rho] \cdot \mathbf{v} + \rho [\nabla \cdot \mathbf{v}] &= 0, \\ \rho [\dot{\mathbf{v}}] + [\nabla p] &= 0, \\ \rho e_\theta [\dot{\theta}] + p [\nabla \cdot \mathbf{v}] + [\nabla \cdot \mathbf{q}] &= 0, \\ \tau [\dot{\mathbf{q}}] + \chi [\nabla \theta] &= 0. \end{aligned}$$

Utilizzando le sostituzioni formali (2.40) si ha il sistema di Cramer per $\delta\rho$, $\delta\mathbf{v}$, $\delta\theta$ e $\delta\mathbf{q}$:

$$U\delta\rho + \rho\delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (2.41a)$$

$$\rho U\delta\mathbf{v} + p_\rho\delta\rho\mathbf{n} + p_\theta\delta\theta\mathbf{n} = 0, \quad (2.41b)$$

$$\rho U e_\theta\delta\theta + p\delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + \delta\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (2.41c)$$

$$\tau U\delta\mathbf{q} + \chi\delta\theta\mathbf{n} = 0. \quad (2.41d)$$

A questo punto trattiamo separatamente i casi $U = 0$ e $U \neq 0$.

Sia $U = 0$, siamo quindi nel caso di un'onda materiale o di contatto. Dalla (2.41a) ricaviamo che $\delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$, mentre dalla (2.41b) proiettata sul piano ortogonale a \mathbf{n} , troviamo che può essere $\delta\mathbf{v} \times \mathbf{n} \neq 0$ essendo $U = 0$, cioè abbiamo un'onda di discontinuità trasversale. Dalla (2.41d) proiettata lungo \mathbf{n} , si ha $\delta\theta = 0$, quindi l'onda non trasporta discontinuità termiche. Dalla (2.41b) proiettata lungo \mathbf{n} si ottiene $\delta\rho = 0$ per quanto osservato prima. La (2.41c) ci dice subito che $\delta\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$; infine dalla (2.41d), proiettata sul piano ortogonale a \mathbf{n} , può valere che $\delta\mathbf{q} \times \mathbf{n} \neq 0$, in quanto $U = 0$. Dunque, scrivendo il vettore discontinuità in \mathbb{R}^8 (cioè l'ampiezza di discontinuità) per il caso $U = 0$, si ha

$$\boldsymbol{\delta}_{U=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta\mathbf{v} \times \mathbf{n} \\ 0 \\ 0 \\ \delta\mathbf{q} \times \mathbf{n} \end{pmatrix}$$

che, come si vede, dipende dai vettori indipendenti $\delta\mathbf{v} \times \mathbf{n}$ e $\delta\mathbf{q} \times \mathbf{n}$ di \mathbb{R}^2 .

Sia ora $U \neq 0$; dalla (2.41a) si trova

$$\delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -\frac{U}{\rho}\delta\rho. \quad (2.42)$$

Prendendo la (2.41b) e proiettandola sul piano perpendicolare a \mathbf{n} , si ottiene $\delta\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0$, cioè le onde di discontinuità termoporoacustiche sono

longitudinali; invece proiettandola lungo \mathbf{n} si ottiene la relazione

$$\rho U \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + p_\rho \delta \rho + p_\theta \delta \theta = 0$$

che, per la (2.42) ed esplicitando $\delta \theta$, diventa

$$\delta \theta = \frac{U^2 - U_S^2}{p_\theta} \delta \rho, \quad (2.43)$$

dove $U_S^2 = p_\rho > 0$. Infine dalla (2.41d), proiettata sul piano perpendicolare a \mathbf{n} , si trova $\delta \mathbf{q} \times \mathbf{n} = 0$; invece proiettandola lungo \mathbf{n} e ricorrendo alla (2.43), si ha

$$\delta \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\chi}{\tau U} \delta \theta = -\frac{\chi(U^2 - U_S^2)}{\tau p_\theta U} \delta \rho. \quad (2.44)$$

Lungo una generica onda termoporoacustica, dalle relazioni (2.42), (2.43) e (2.44), si deduce che l'ampiezza di discontinuità trasportata nel caso $U \neq 0$ è di questo tipo

$$\delta_{U \neq 0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{U}{\rho} \\ \mathbf{0} \\ \frac{U^2 - p_\rho}{p_\theta} \\ -\frac{\chi(U^2 - p_\rho)}{\tau p_\theta U} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \delta \rho \quad \forall \delta \rho$$

dunque l'autospazio relativo ha dimensione 1.

Il sistema di Cramer (2.41), tenendo presente che $\delta \mathbf{v} \times \mathbf{n} = \delta \mathbf{q} \times \mathbf{n} = 0$, si può riscrivere in questa forma matriciale ridotta in \mathbb{R}^4 :

$$\begin{pmatrix} U & \rho & 0 & 0 \\ p_\rho & \rho U & p_\theta & 0 \\ 0 & p & \rho e_\theta U & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\chi}{\tau} & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \rho \\ \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \\ \delta \theta \\ \delta \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix} = 0.$$

Quindi condizione necessaria e sufficiente affinché $(\delta\rho, \delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}, \delta\theta, \delta\mathbf{q}\cdot\mathbf{n})^T \neq 0$, per il teorema di Cramer, è che risulti

$$\begin{vmatrix} U & \rho & 0 & 0 \\ p_\rho & \rho U & p_\theta & 0 \\ 0 & p & \rho e_\theta U & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\chi}{\tau} & U \end{vmatrix} = 0$$

ed espandendo il determinante si giunge all'equazione algebrica (detta *caratteristica*)

$$\rho^2 e_\theta U^4 - \left(pp_\theta + \frac{\chi\rho}{\tau} + p_\rho e_\theta \rho^2 \right) U^2 + \frac{\rho p_\rho \chi}{\tau} = 0. \quad (2.45)$$

Assumendo poi, per maggiore semplicità, che l'onda avanzi in una regione di equilibrio, tale che

$$\rho^+ = \text{costante}, \quad \mathbf{v}^+ = 0, \quad \theta^+ = \text{costante} \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{q}^+ = 0$$

si ha che la (2.45) si riduce alla seguente equazione per λ :

$$\lambda^4 - \left(\frac{pp_\theta}{\rho^2 e_\theta} + \frac{\chi}{\tau \rho e_\theta} + p_\rho \right) \lambda^2 + \frac{\chi p_\rho}{\tau \rho e_\theta} = 0. \quad (2.46)$$

Per meglio interpretare la (2.46), separiamo gli effetti in gioco: consideriamo solo la propagazione di un'onda termica, nel caso particolare di un conduttore rigido statico di calore. In tal caso il sistema (2.41) si riduce alle equazioni

$$\begin{aligned} -\rho\lambda e_\theta \delta\theta + \delta\mathbf{q}\cdot\mathbf{n} &= 0, \\ \tau U \delta\mathbf{q} + \chi \delta\theta \mathbf{n} &= 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

e quindi, per $\delta\theta \neq 0$ e $\delta\mathbf{q}\cdot\mathbf{n} \neq 0$, si trova facilmente che l'onda termica si propaga con velocità

$$\lambda^\pm = \pm U_T = \pm \sqrt{\frac{\chi}{\tau \rho e_\theta}}, \quad (2.48)$$

superando quindi il paradosso di velocità infinita di un segnale termico. Ovviamente per $\tau \rightarrow 0^+$, l'equazione di Cattaneo si riduce a quella di Fourier e si ha $|U_T| \rightarrow +\infty$. Si dice anche che U_T^2 sono le velocità al quadrato del *secondo suono*. Trascurando gli effetti termici, si avrebbero solo le onde acustiche, che si muovono con velocità $\pm U_S = \pm \sqrt{p'(\rho)}$, dette *velocità del primo*

suono. Con queste notazioni, in presenza di entrambi gli effetti, la (2.46) si può scrivere come

$$(\lambda^2 - U_T^2) (\lambda^2 - U_S^2) - \frac{pp_\theta}{\rho^2 e_\theta} \lambda^2 = 0. \quad (2.49)$$

Ci aspettiamo che $p_\theta > 0$ (pensiamo ad esempio alla relazione di stato tipica dei gas perfetti $p = R\rho\theta$) e, dal momento che il calore specifico $e_\theta > 0$ per le osservazioni sperimentali, si trova

$$(\lambda^2 - U_T^2) (\lambda^2 - U_S^2) = \left| \frac{pp_\theta}{\rho^2 e_\theta} \right| \lambda^2 > 0.$$

Questa forma ci permette di concludere che la (2.49) ha due soluzioni V_1^2 (onde *rapide*) e V_2^2 (onde *lente*) tali che

$$0 < V_2^2 < \min \{U_S^2, U_T^2\} < \max \{U_S^2, U_T^2\} < V_1^2.$$

Queste onde lente, con velocità $\pm V_2$, e rapide, con velocità $\pm V_1$, sono tipiche del doppio effetto termoacustico e vengono dette onde longitudinali termoporoacustiche, anche se il termine di porosità lineare di Darcy non ha influenzato il risultato.

In conclusione, lavorando per semplicità con il modello unidimensionale, vale la pena di notare che l'equazione di evoluzione di una ampiezza di discontinuità, per esempio $A = [\rho_{\mathbf{x}}]$, lungo un fronte d'onda termoporoacustica, vista la non linearità del modello iperbolico in studio, viene descritta da un'equazione differenziale ordinaria non lineare del tipo Bernoulli, della forma

$$\frac{dA}{dt} + aA + bA^2 = 0 \quad (2.50)$$

dove i coefficienti a e b sono quantità dipendenti dal modello e generalmente molto complicati. Si può osservare anche che qui il materiale poroso, attraverso il termine lineare di Darcy $k\mathbf{v}$, produce un effetto di attenuazione sull'evoluzione dell'ampiezza.

La legge di tipo Bernoulli (2.50) mette in evidenza la possibilità che esista un *tempo critico* $0 < t_c < +\infty$ dipendente dall'ampiezza iniziale $A(0)$, tale

che

$$\lim_{t \rightarrow t_c} |A(t)| = +\infty$$

il che significa un 'blow-up', o catastrofe del gradiente, e quindi la possibilità che l'onda di discontinuità termoporoacustica degeneri in un'onda d'urto.

Bibliografia

- [1] Vazquez, J. L. (1992). An introduction to the Mathematical Theory of the Porous Medium Equation, Chapter 1. *Shape Optimization and Free Boundaries*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1992.
- [2] Nield, D. A. (1999). Modeling the effects of a magnetic field or rotation on flow in a porous medium: momentum equation and anisotropic permeability analogy. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 42:3715-3718.
- [3] Gurtin, M. E. (1981). *An Introduction to Continuum Meccanics*. Academic Press, New York.
- [4] Ruggeri, T. (2007). *Introduzione alla Termomeccanica dei Continui*. Monduzzi Editore, Bologna.
- [5] Straughan, B. (2008). *Stability and Wave Motion in Porous Media*. Springer, New York.
- [6] Nield, D. A. e Bejan, A. (2006). *Convection in Porous Media*. Springer, New York, third edition.
- [7] Caviglia, G., Morro, A. e Straughan, B. (1992). *Int. J. Nonlinear Mech.*, 27:251-263.

Ringraziamenti

Ringrazio immensamente i miei genitori per tutti i sacrifici che hanno fatto e per avermi permesso di raggiungere questo importante traguardo.

Un grande ringraziamento va alla professoressa Franca Franchi, per tutti i preziosi consigli, le correzioni e le spiegazioni che mi ha fornito, sempre con grande passione e disponibilità, e soprattutto per il notevole interesse che mi ha trasmesso per il bellissimo mondo della Fisica Matematica.

Infine un ringraziamento speciale va a tutti i miei amici e a tutto il resto della mia famiglia, a mia sorella Sara e, in particolare, a mio nipote David, ai quali è dedicato questo lavoro, con la speranza che un giorno possa anche io leggere una tesi di David, perché no, di matematica!