ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Specialistica in Matematica

# LA CORRISPONDENZA GAGA DI SERRE

Tesi di Laurea in Geometria Algebrica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
LUCA MIGLIORINI

Presentata da:
ANNALISA LOVIGLIO

Sessione II
Anno Accademico 2009/2010

# Indice

# Introduzione

La geometria algebrica studia le varietà algebriche, spazi che si possono descrivere localmente come luoghi di zeri di polinomi. La geometria analitica si occupa invece delle varietà analitiche, o più in generale degli spazi analitici, definiti localmente dall'annullarsi di famiglie di funzioni olomorfe. Tra questi due ambiti di studio sussistono relazioni profonde, che permettono di applicare tecniche algebriche allo studio degli spazi analitici e, viceversa, tecniche analitiche allo studio delle varietà algebriche.
Poiché i polinomi a valori nel campo dei complessi sono funzioni olomorfe le varietà algebriche possono infatti essere pensate anche come spazi analitici: si prova che ad ogni varietà algebrica $X$ può essere associato in maniera univoca uno spazio analitico $X^h$. Analogamente i morfismi regolari tra varietà algebriche possono essere interpretati come morfismi olomorfi tra spazi analitici. In generale non è però sempre possibile andare nell'altra direzione, interpretando oggetti analitici in modo algebrico. Consideriamo un caso semplice, il grafico $C = \{f(x, y) = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ di una funzione olomorfa intera, ponendo ad esempio $f = y - \exp x$. Si tratta di una varietà analitica che non è sicuramente rappresentabile come insieme di zeri di un polinomio, come si vede ad esempio intersecando $C$ con una retta $y = a$.
Nello spazio proiettivo, invece, si prova che qualsiasi sottovarietà analitica di codimensione 1 è della forma $\{f = 0\}$, con $f$ polinomio omogeneo, quindi la sottovarietà analitica è anche una sottovarietà algebrica. Questo fatto, conseguenza del teorema di Chow, è indicativo di una corrispondenza molto più generale tra geometria algebrica e analitica nel proiettivo, che ha cominciato a essere studiata approfonditamente negli anni Cinquanta, in particolare dal matematico francese Jean Pierre Serre. Nel suo maggior articolo sull'argomento, "Géométrie algébrique et géométrie analytique", spesso abbreviato in GAGA, egli utilizza come principale strumento la teoria dei fasci, formalizzata nel precedente "Faisceaux algébriques cohérents", provando per una varietà proiettiva $X$ tre fondamentali risultati:

1. Un fascio algebrico coerente su $X$ e il fascio analitico ad esso associato su $X^h$ hanno gli stessi gruppi di coomologia.

2. Dati due fasci algebrici coerenti $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ su $X$, un morfismo analitico da $\mathcal{F}^h$ a $\mathcal{G}^h$ proviene da uno e un solo morfismo algebrico da $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$.

3. Per ogni fascio analitico coerente $\mathcal{M}$ su $X^h$ esiste un fascio algebrico coerente $\mathcal{F}$ su $X$, unico a meno di isomorfismi, tale che $\mathcal{M} \cong \mathcal{F}^h$.

La teoria dei fasci analitici coerenti su $X^h$ perciò coincide essenzialmente con quella dei fasci algebrici coerenti su $X$. Ne consegue che nel proiettivo ogni spazio analitico compatto è anche una varietà algebrica, varietà biolomorfe sono anche algebricamente isomorfe, i morfismi analitici sono anche morfismi regolari.

Nel primo capitolo si introducono la nozione di fascio e le sue proprietà fondamentali, mostrando in particolare l'equivalenza tra la definizione di Serre e quella oggi più comunemente usata. Si prosegue illustrando i concetti di varietà algebrica, con particolare riferimento a quelle proiettive, e di spazio analitico.
Nel secondo capitolo si danno le definizioni di fascio di $\mathcal{A}$-moduli, di fascio localmente libero (in relazione a quella di fibrato vettoriale) e di fascio coerente, evidenziando che il fascio $\mathcal{O}$ dei germi di funzioni regolari e il fascio $\mathcal{H}$ dei germi di funzioni olomorfe sono coerenti. Inoltre si introduce la coomologia di fasci, ponendo in rilievo i risultati riguardanti le varietà proiettive.
Nella prima parte del terzo capitolo si spiega come associare a una varietà algebrica $X$ uno spazio analitico $X^h$ e si analizzano alcuni esempi di corrispondenze di tipo GAGA. In particolare si discutono i casi in cui i concetti di chiusura, densità, aderenza, connessione secondo la topologia di $X^h$ corrispondono a quelli di Z-chiusura, Z-densità, Z-aderenza, Z-connessione secondo la topologia di $X$ e si prova che il concetto algebrico di completezza equivale a quello analitico di compattezza. Nella seconda parte, dopo aver spiegato come associare a un fascio algebrico su $X$ un fascio analitico su $X^h$, si dimostrano dettagliatamente i tre teoremi di Serre.
Nel quarto capitolo si esaminano alcune conseguenze e applicazioni di quanto provato nel precedente.

# Capitolo 1

# Fasci, varietà algebriche, spazi analitici

## 1.1 Fasci

### 1.1.1 Definizioni a confronto

**Definizione 1.1.** Sia $X$ un spazio topologico. Un prefascio $\mathcal{F}$ di gruppi abeliani su $X$ consiste dei dati seguenti:

1. per ogni aperto $U \subset X$, un gruppo abeliano $\mathcal{F}(U)$;

2. per tutte le coppie di aperti $V \subset U$, un morfismo di gruppi abeliani (detto di "restrizione")

$$\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$$

in modo tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1. $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$, dove $\emptyset$ è l'insieme vuoto,

2. $\rho_{UU}$ è la mappa identità,

3. se $W \subset V \subset U$ sono tre aperti, allora $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

Si definiscono un prefascio di anelli, un prefascio di insiemi o un prefascio a valori in una fissata categoria in maniera del tutto analoga.

**Definizione 1.2.** Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono fasci su $X$, un morfismo $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è una collezione di mappe (morfismi di gruppi abeliani o di anelli, etc)

$\phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ per ogni aperto $U$, tale che se $V \subset U$, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_{UV} \downarrow & & \downarrow \rho'_{UV} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow[\phi(V)]{} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

dove $\rho$ e $\rho'$ sono le mappe di restrizione di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, è commutativo.

**Definizione 1.3.** Un prefascio $\mathcal{F}$ su uno spazio topologico $X$ è un fascio se soddisfa le seguenti condizioni supplementari per ogni aperto $U \subset X$ e ogni ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di $U$ :

1. se $x_1$, $x_2 \in \mathcal{F}(U)$ e per ogni $i$, $\rho_{UU_i}(x_1) = \rho_{UU_i}(x_2)$, allora $x_1 = x_2$;
2. se si ha una collezione di elementi $x_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tali che $\rho_{U_iU_i\cap U_j}(x_i) = \rho_{U_jU_i\cap U_j}(x_j)$ per ogni $i$ e $j$, allora esiste un elemento $x \in \mathcal{F}(U)$ tale che $\rho_{UU_i}(x) = x_i$ per ogni $i$.

La prima condizione richiede che gli elementi siano determinati univocamente dai dati locali, la seconda che se i dati locali sono compatibili allora si possa formare un elemento di $\mathcal{F}(U)$ incollandoli insieme. Nel complesso la definizione equivale a richiedere che sia esatto il diagramma

$$\mathcal{F}(U) \to \prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

cioè che la mappa

$$\prod \rho_{UU_i} : \mathcal{F}(U) \to \prod \mathcal{F}(U_i)$$

sia iniettiva e la sua immagine sia l'insieme sul quale

$$\prod \rho_{U_iU_i\cap U_j} : \prod_i \mathcal{F}(U_i) \to \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

e

$$\prod \rho_{U_jU_i\cap U_j} : \prod_j \mathcal{F}(U_j) \to \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

sono uguali.

**Definizione 1.4.** Sia $\mathcal{F}$ un fascio su $X$, $x \in X$. La spiga $\mathcal{F}_x$ di $\mathcal{F}$ in $x$ è il limite diretto dei gruppi $\mathcal{F}(U)$ per tutti gli aperti $U$ contenenti $x$, tramite le mappe di restrizione $\rho$.

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{x\in U} \mathcal{F}(U)$$

In altri termini, un elemento di $\mathcal{F}_x$ è rappresentato da una coppia $\langle U, s\rangle$ (con $U$ intorno aperto di $x$ , $s \in \mathcal{F}(U)$). Due di queste coppie $\langle U, s\rangle$ e $\langle V, t\rangle$ definiscono lo stesso elemento di $\mathcal{F}_x$ se e solo se esiste un intorno aperto $W$ di $x$, con $W \subset U \cap V$, tale che $\rho_{U,W}(s) = \rho_{V,W}(t)$. Chiamiamo gli elementi della spiga $\mathcal{F}_x$ "germi" degli elementi di $\mathcal{F}$ al punto $x$.
Fissato un aperto $U$ contenente $x$, è ben definita la mappa di restrizione $\rho_{U,x}$ che a $s \in \mathcal{F}(U)$ associa $\langle U, s\rangle \in \mathcal{F}_x$.
Un morfismo $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ di prefasci induce un morfismo $\phi_P : \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ sulle spighe per ogni punto $P \in X$. La seguente proposizione, in generale falsa per un prefascio, illustra la natura locale di un fascio.[1]

**Proposizione 1.1.** *Sia $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci sullo spazio topologico $X$. Allora $\phi$ è un isomorfismo se e solo se la mappa indotta sulla spiga $\phi_P : \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ è un isomorfismo per ogni $P \in X$.*

Dato un prefascio $\mathcal{F}_0$ su $X$ è possibile costruire un fascio $\mathcal{F}$ che gli "assomigli" più di qualsiasi altro. Per farlo occorre innanzitutto identificare le cose che hanno la stessa restrizione e poi aggiungere tutti gli oggetti che è possibile ottenere per incollamento. Più formalmente[2]:

**Proposizione 1.2.** *Dato un prefascio $\mathcal{F}_0$ esistono un fascio $\mathcal{F}$ e un morfismo di prefasci $f : \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}$ tali che se $g : \mathcal{F}_0 \to \mathcal{G}$ è un qualsiasi morfismo di prefasci con $\mathcal{G}$ fascio, allora c'è un unico morfismo di fasci $h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ tale che $g = h \circ f$. Inoltre la coppia $(\mathcal{F}, h)$ è unica a meno di isomorfismi; $\mathcal{F}$ è chiamato il fascio associato a $\mathcal{F}_0$.*

*Osservazione* 1. Le spighe di un prefascio e del fascio ad esso associato sono uguali.

Le definizioni di prefasci e fasci appena date sono quelle solitamente utilizzate dai testi recenti di geometria algebrica. Serre, nell'articolo del 1954 "*Faisceaux algébriques cohérents*", ha un approccio un po' diverso, che è spesso conservato nell'ambito dell'analisi complessa quando si trattano i fasci analitici. Riportiamo anche le definizioni di Serre e diamo brevemente una dimostrazione dell'equivalenza delle due teorie, non solo per il loro interesse da un punto di vista storico, ma soprattutto perché può essere utile per agevolare la comprensione di alcuni argomenti. Per chiarezza fino a quando non avremmo provato l'equivalenza tra le due nozioni chiameremo S-fasci gli oggetti costruiti secondo la definizione di Serre.

**Definizione 1.5.** Sia $X$ uno spazio topologico. Un S-fascio di gruppi abeliani (o più brevemente un S-fascio) su $X$ è costituito da:

[1]La dimostrazione si può trovare in [Hartshorne], capitolo 2, paragrafo 1.
[2]ibidem.

1. una funzione $x \mapsto \mathcal{F}_x$ che fa corrispondere a ogni $x \in X$ un gruppo abeliano $\mathcal{F}_x$,
2. una topologia sull'insieme $\mathcal{F}$ unione disgiunta degli insiemi $\mathcal{F}_x$.

Se $f$ è un elemento di $\mathcal{F}_x$ si pone $\pi(f) = x$, l'applicazione $\pi$ è chiamata proiezione di $\mathcal{F}$ su $X$. Il sottoinsieme di $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ formato dalle coppie $(f, g)$ tali che $\pi(f) = \pi(g)$ sarà indicato con $\mathcal{F} + \mathcal{F}$
I dati 1. e 2. sottostanno ai seguenti assiomi:

I. per ogni $f \in \mathcal{F}$ esiste un intorno $V$ di $f$ e un intorno $U$ di $\pi(f)$ tali che la restrizione di $\pi$ a $V$ sia un omeomorfismo di $V$ su $U$ (in altri termini $\pi$ è un omeomorfismo locale);

II. l'applicazione $f \mapsto -f$ è un'applicazione continua di $\mathcal{F}$ in $\mathcal{F}$ e l'applicazione $(f, g) \mapsto f + g$ è un'applicazione continua di $\mathcal{F} + \mathcal{F}$ in $\mathcal{F}$.

**Definizione 1.6.** Dati due S-fasci $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ su uno spazio topologico $X$ un morfismo $\phi$ di S-fasci è il dato, per ogni $x \in X$, di un omomorfismo di gruppi $\phi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$, in modo che l'applicazione $\phi$ definita dalle $\phi_x$ sia continua.

Se $U$ è un sottoinsieme di $X$ si dice sezione di $\mathcal{F}$ su $U$ un'applicazione continua $s : U \to \mathcal{F}$ tale che $\pi \circ s$ sia l'applicazione identica di $U$. Di conseguenza $s(x) \in \mathcal{F}_x$ per ogni $x \in U$. Si indica con $\Gamma(U, \mathcal{F})$ l'insieme delle sezioni di $\mathcal{F}$ su $U$: dall'assioma II. segue che $\Gamma(U, \mathcal{F})$ è un gruppo abeliano.
Se $V \subset U$ la restrizione di $s$ a $V$ è una sezione su $U$, da ciò un omomorfismo $\rho_{UV} : \Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(V, \mathcal{F})$.
Se $U$ percorre una base di aperti di $X$, $s(U)$ percorre una base di aperti di $\mathcal{F}$; è una riformulazione dell'assioma I. Un'altra conseguenza dell'assioma I. è che per ogni $f \in \mathcal{F}_x$ esiste una sezione $s$ su un intorno di $x$ tale che $s(x) = f$ e due sezioni che godono di questa proprietà coincidono in un intorno di $x$. In altri termini $\mathcal{F}_x$ è il limite diretto dei $\Gamma(U, \mathcal{F})$, con $U$ intorno di $x$.
La definizione 1.6 si può esprimere anche dicendo che se $s$ è una sezione di $\mathcal{F}$ su $U$, $x \mapsto \phi_x(s(x))$ è una sezione di $\mathcal{G}$ su $U$.

**Teorema 1.3.** *Dato uno spazio topologico $X$, a un S-fascio $\mathcal{F}'$ su di esso si può far corripondere in maniera naturale un fascio $\mathcal{F}$ e viceversa. La mappa $\mathcal{F}' \mapsto \mathcal{F}$ è un'equivalenza tra la categoria degli S-fasci e quella dei fasci; $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ possono quindi essere identificati.*

*Dimostrazione.* Iniziamo con l'ottenere un fascio a partire da un S-fascio. A ogni aperto $U \subset X$ si associa il gruppo delle sezioni: $\mathcal{F}(U) = \Gamma(U, \mathcal{F}')$. Le funzioni di restrizione sono le $\rho_{UV}$ definite poco sopra; è evidente che $\rho_{UU}$

è l'identità e che se $W \subset V \subset U$ allora $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$ (restringere la funzione continua $s$ prima a $V$ e poi a $W$ è la stessa cosa che restringerla direttamente a $W$). $\mathcal{F}$ così definito è quindi un prefascio, ma è anche un fascio. Infatti se $s_1, s_2 \in \mathcal{F}(U)$ sono due funzioni uguali sugli aperti di un ricoprimento di $U$ allora sono uguali su $U$; se la famiglia $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ (con $\{U_i\}$ ricoprimento aperto di $U$) è tale che $\rho_{U_i U_i \cap U_j}(s_i) = \rho_{U_j U_i \cap U_j}(s_j)$ per ogni $i, j$, allora $s(x) = s_i(x)$ per $x \in U_i$ è una funzione continua ben definita e appartiene a $\mathcal{F}(U)$.
Costruiamo ora un S-fascio $\mathcal{F}'$ a partire da un *prefascio* $\mathcal{F}$. Ad ogni $x \in X$ associamo il gruppo abeliano $\mathcal{F}_x$ e chiamiamo $\mathcal{F}'$ lo spazio dato dall'unione disgiunta delle spighe. Per ogni aperto $U$ di $X$ e ogni $t \in \mathcal{F}(U)$ poniamo

$$[t, U] = \{\rho_{U,x}(t) | x \in U\}$$

La famiglia degli insiemi così definiti è stabile per intersezione: $[t, U] \cap [s, V] = [r, W]$, dove $W$ è l'aperto dei punti $x \in U \cap V$ per i quali $\rho_{U,x}(t) = \rho_{V,x}(s)$ e $r = \rho_{U,W}(t)$. La si può quindi scegliere come base di aperti per definire una topologia su $\mathcal{F}'$.
Osserviamo che la mappa $\pi : \mathcal{F}' \to X$ è un omeomorfismo locale, in particolare è un omeomorfismo tra $[t, U]$ e $U$ (infatti solo l'elemento $\rho_{U,x}(t)$ appartiene a $\mathcal{F}_x \cap [t, U]$ e costituisce quindi la retroimmagine di $x$ in $\pi^{-1}(U)$). Si vede inoltre che anche l'assioma II. è rispettato, $\mathcal{F}'$ è quindi un S-fascio.
A questo punto dal nuovo S-fascio $\mathcal{F}'$ possiamo ottenere un fascio $\overline{\mathcal{F}'}$ secondo il procedimento precedente e, conseguentemente, il morfismo di prefasci $\phi$ dato da

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \overline{\mathcal{F}'}(U) = \Gamma(U, \mathcal{F}'), \qquad s \mapsto \overline{s} : U \to \mathcal{F}', x \mapsto \rho_{U,x}(s)$$

$\overline{\mathcal{F}}$ è canonicamente isomorfo a $\mathcal{F}$ se e solo se $\mathcal{F}$ è un fascio. Proviamo infatti che si ha un isomorfismo se e solo se valgono le condizioni 1. e 2. della proposizione 1.3.
Se $s, t \in U$, $\phi(s) = \phi(t)$ se e solo se per ogni $x \in U$ $\rho_{U,x}(s) = \rho_{U,x}(t)$, ma questo equivale al fatto che per ogni ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di $U$ si abbia $\rho_{U,U_i}(s) = \rho_{U,U_i}(t)$. Quindi $\phi$ è iniettiva se e solo se vale 1.
Consideriamo una sezione $f \in \Gamma(U, \mathcal{F}')$. Per la costruzione precedente $f(U)$ può essere ricoperto da aperti del tipo $[t_i, U_i]$, tali che $U$ sia ricoperto dagli $U_i$. $f_{|U_i}(x)$ in quanto elemento di $[t_i, U_i]$ è della forma $\rho_{U_i,y}(t_i)$ per un qualche $y \in U_i$; d'altra parte $f$ è una sezione e quindi $\pi \circ f(x) = x$, da cui $y = x$. Ne segue che $f_{|U_i} = \overline{t_i}$; ovviamente $\overline{t_i}$ e $\overline{t_j}$ sono uguali su $U_i \cap U_j$ perché entrambe restrizioni di $f$. Allora $f$ appartiene all'immagine di $\phi$ se e solo se valgono 1. e 2. (2. serve per costruire una sezione su $U$ le cui restrizioni siano le $\overline{t_i}$; 1. serve perché grazie all'iniettività si può concludere che la sezione è proprio

$f$).
Si prova anche che a morfismi tra fasci corrispondono in maniera naturale morfismi tra S-fasci e questo completa la dimostrazione dell'isomorfismo tra categorie. □

La dimostrazione è utile anche per capire meglio il processo di fascificazione di un prefascio: dato un prefascio $\mathcal{F}_0$ su X, il fascio associato $\mathcal{F}$ associa a ogni aperto $U$ il gruppo delle sezioni $\Gamma(U, \coprod_{x\in X} \mathcal{F}_{0_x})$.
D'ora in avanti utilizzeremo solo il termine *fascio*, mettendo in rilevo, se necessario, a quale delle definizioni sia preferibile pensare. Di norma useremo come sinonimi $\Gamma(U, \mathcal{F})$ e $\mathcal{F}(U)$, che chiameremo "insieme delle sezioni di $\mathcal{F}$ su $U$". Se $s \in \mathcal{F}(U)$ al posto di $\rho_{U,V}(s)$ si utilizzerà anche $s|_V$ e per il germe $\rho_{U,x}(s)$ in $\mathcal{F}_x$ scriveremo anche $s(x)$.

### 1.1.2 Prime proprietà

Sia $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di prefasci. I prefasci nucleo, conucleo e immagine di $f$ sono i prefasci dati rispettivamente da $U \mapsto \operatorname{Ker} f(U)$, $U \mapsto \operatorname{Coker} f(U)$, $U \mapsto \operatorname{Im} f(U)$. Se $f$ è un morfismo di fasci allora $\operatorname{Ker} f$ è anche un fascio, ma gli altri a priori non lo sono. Di conseguenza diamo la seguente definizione:

**Definizione 1.7.** Sia $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci. Allora si definiscono

1. nucleo di $f$ il prefascio $\operatorname{Ker} f$;
2. immagine di $f$ il fascio associato al prefascio immagine, indicando anch'esso con $\operatorname{Im} f$;
3. conucleo di $f$ il fascio associato al prefascio conucleo, indicando anch'esso con $\operatorname{Coker} f$;

**Definizione 1.8.** Sia $f : X \to Y$ una mappa continua tra spazi topologici. Per ogni fascio $\mathcal{F}$ su $X$ si definisce il fascio *immagine diretta* $f_*\mathcal{F}$ su $Y$ come

$$f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \qquad \text{per ogni aperto } V \subset Y.$$

Per ogni fascio $\mathcal{G}$ su $Y$ si definisce il fascio *immagine inversa* $f^{-1}\mathcal{G}$ come il fascio associato al prefascio

$$U \longmapsto \lim_{V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V) \qquad U \text{ aperto di } X.$$

In particolare si definisce la restrizione a un sottoinsieme:

**Definizione 1.9.** Sia $Y$ un sottoinsieme di uno spazio topologico, visto come spazio topologico con la topologia indotta. Se $i : Y \to X$ è l'inclusione, allora chiamiamo $i^{-1}\mathcal{F}$ la *restrizione* di $\mathcal{F}$ a $Y$ e la indichiamo con $\mathcal{F}(Y)$ o $\mathcal{F}_Y$.

Osserviamo che per ogni punto $x \in Y$ la spiga in $x$ di $\mathcal{F}(Y)$ è proprio $\mathcal{F}_x$.

**Definizione 1.10.** Consideriamo uno spazio topologico $X$ e un suo sottoinsieme chiuso $Y$. Sia poi $\mathcal{F}$ un fascio su $X$. Si dice che $\mathcal{F}$ è concentrato su $Y$, o nullo fuori da $Y$, se vale ha $\mathcal{F}_x = 0$ per ogni $x \in X \setminus Y$.

Si dimostra facilmente il seguente fatto:

**Proposizione 1.4.** *Se il fascio $\mathcal{F}$ è concentrato su $Y$, l'omomorfismo*

$$\rho_{X,Y} : \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(Y, \mathcal{F}(Y))$$

*è biunivoco.*

*Dimostrazione.* Se una sezione di $\mathcal{F}$ su $X$ è nulla su $Y$ allora è nulla dappertutto perché $\mathcal{F}_x \neq 0$ se $x \notin Y$, quindi $\rho_{X,Y}$ è iniettiva.
Se $s$ è una sezione di $\mathcal{F}(Y)$ su $Y$ possiamo prolungarla a $X$ ponendo $s(x) = 0$ se $x \notin Y$. L'applicazione $x \mapsto s(x)$ è continua su $X \setminus Y$. D'altra parte, se $x \in Y$, esiste una sezione $s'$ di $\mathcal{F}$ su un intorno di $U$ di $x$ tale che $s'(x) = s(x)$; poiché $s$ è continua su $Y$ per ipotesi, esiste un intorno $V$ di $x$, contenuto in $U$ e tale che $s'(y) = s(y)$ per ogni $y \in V \cap Y$. Dal fatto che $\mathcal{F}_y = 0$ se $y \notin Y$ segue anche che $s'(y) = s(y)$ per $y \in V \setminus V \cap Y$; quindi $s$ e $s'$ coincidono su $V$. Questo prova che $s$ è continua in un intorno di $Y$, quindi è continua dappertutto. In conclusione $s$ è immagine di una sezione globale su $X$ e $\rho_{X,Y}$ è suriettiva. □

Mostriamo ora che il fascio $\mathcal{F}(Y)$ determina senza ambiguità il fascio $\mathcal{F}$:

**Proposizione 1.5.** *Sia $Y$ un sottoinsieme chiuso di uno spazio topologico $X$, con la topologia indotta, e sia $\mathcal{G}$ un fascio su $Y$. Poniamo $\mathcal{F}_x = \mathcal{G}_x$ se $x \in Y$ e $\mathcal{F}_x = 0$ altrimenti. Si può costruire in modo unico un fascio $\mathcal{F}$ su $X$ che abbia le $\mathcal{F}_x$ come spighe, in modo che $\mathcal{F}(Y) = \mathcal{G}$.*

*Dimostrazione.* Sia $U$ un aperto di $X$. Se $s$ è una sezione di $\mathcal{G}$ su $U \cap Y$, prolughiamo $s$ per 0 su $U \setminus U \cap Y$; al variare di $s$ su $\Gamma(U \cap Y, \mathcal{G})$ si ottiene un gruppo $\mathcal{F}(U)$ di applicazioni di $U$ in $\mathcal{F}$. Si verifica che $\mathcal{F}$ è un fascio; chiaramente $\mathcal{F}(Y) = \mathcal{G}$. La proposizione 1.4 mostra che se $\mathcal{F}$ è munito di una struttura di fascio tale che $\mathcal{F}(Y) = \mathcal{G}$, si ha $\mathcal{F}_U = \Gamma(U, \mathcal{F})$ e questo prova l'unicità della struttura in questione. □

Si dice che il fascio $\mathcal{F}$ è ottenuto *prolungando* il fascio $\mathcal{G}$ per 0 fuori da $Y$ e lo si indica spesso anche con $\mathcal{G}^X$.
Si è visto che dato uno spazio topologico $X$, un fascio $\mathcal{F}$ su $X$ e un aperto $U \subset X$ è sempre possibile restringere $\mathcal{F}$ a $U$. Vediamo ora che, viceversa, in alcuni casi è possibile ottenere un fascio su $X$ a partire da fasci definiti su suoi aperti. Questa costruzione risulterà particolarmente utile in seguito.

**Definizione-Proposizione 1.11.** Sia $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $X$ e, per ogni $i$, sia $\mathcal{F}_i$ un fascio. Supponiamo che per ogni coppia di indici $i, j$ sia definito un *isomorfismo*

$$\theta_{ij} : \mathcal{F}_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \mathcal{F}_i(U_i \cap U_j).$$

Supponiamo inoltre che per ogni tripletta $i, j, k$ e per ogni punto di $U_i \cap U_j \cap U_k$ valga

$$\theta_{ij} \circ \theta_{jk} = \theta_{ik}.$$

Allora esistono un fascio $\mathcal{F}$ e, per ogni $i \in I$, un isomorfismo $\eta$ di $\mathcal{F}(U_i)$ su $\mathcal{F}_i$ tali che $\theta_{ij} = \eta_i \circ \eta_j^{-1}$ in ogni punto di $U_i \cap U_j$. $\mathcal{F}$ e gli $\eta_i$ sono unici a meno di isomorfismo.
Si dice che $\mathcal{F}$ è il fascio ottenuto per *incollamento* degli $\mathcal{F}_i$ tramite gli isomorfismi di transizione $\theta_{ij}$.

# 1.2 Varietà algebriche

## 1.2.1 Insiemi algebrici e ideali radicali

D'ora in poi $k$ è un campo algebricamente chiuso (per i nostri scopi possiamo anche pensare $k = \mathbb{C}$).

**Definizione 1.12.** Un insieme algebrico è un sottoinsieme di $k^n$ costituito da tutte le radici di una collezione finita di polinomi:

$$\{(x_1, ..., x_n) | f_1(x_1, ..., x_n) = ... = f_m(x_1, ..., x_n) = 0\}.$$

Chiaramente l'insieme dipende solo dall'ideale $I = (f_1, ..., f_m)$ generato dai polinomi, di conseguenza si può definire lo stesso insieme come

$$\mathbf{V}(I) = \{x \in k^n | f(x) = 0 \quad \forall f \in I\}.$$

Poiché $k[X_1, ..., X_n]$ è noetheriano i sottoinsiemi di $k^n$ della forma $\mathbf{V}(I)$ sono esattamente gli insiemi algebrici. D'altra parte, se $V$ è un insieme algebrico, si può definire

$$\mathbf{I}(V) = \{f \in k[X_1, ..., X_n] | f(x) = 0 \quad \forall x \in V\}$$

Si vede facilmente che $\mathbf{I}(V)$ è un ideale tale che $V = \mathbf{V}(\mathbf{I}(V))$. Viceversa, un risultato fondamentale[3], noto come *Nullstellensatz di Hilbert*, è il seguente:

**Teorema 1.6.**

$$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I}$$

**Corollario 1.7.** *Gli insiemi algebrici di $k^n$ sono in corrispondenza biunivoca (mediante gli operatori $\mathbf{V}$ e $\mathbf{I}$) con gli ideali radicali[4] $I$ di $k[X_1, ..., X_n]$. Inoltre, per $I_1, I_2, I_\alpha$ ideali e $V_1, V_2$ insiemi algebrici:*

1. $I_1 \subset I_2 \Rightarrow \mathbf{V}(I_1) \supset \mathbf{V}(I_2)$
2. $V_1 \subset V_2 \Rightarrow \mathbf{I}(V_1) \supset \mathbf{I}(V_2)$
3. $\mathbf{V}(\sum_\alpha I_\alpha) = \cap_\alpha \mathbf{V}(I_\alpha)$
4. $\mathbf{V}(I_1 \cap I_2) = \mathbf{V}(I_1) \cup \mathbf{V}(I_2)$

**Definizione 1.13.** Un insieme algebrico si dice irriducibile se non è unione di due insiemi strettamente più piccoli.

Ricordando[5] che un ideale radicale di un anello noetheriano può essere scritto in uno e un solo modo come intersezione di un numero finito di ideali primi, nessuno contenuto nell'altro, si ottiene il risultato seguente:

**Proposizione 1.8.** *Nella biiezione del corollario 1.7 gli insiemi algebrici irriducibili di $k^n$ corrispondono esattamente agli ideali primi di $k[X_1, ..., X_n]$. Inoltre ogni insieme algebrico può essere scritto in esattamente un modo come unione di insiemi algebrici irriducibili.*

Gli insiemi algebrici irriducibili permettono di costruire tutti gli altri:

**Proposizione 1.9.** *Qualsiasi insieme algebrico $V \subset k^n$ può essere scritto come unione finita*

$$V = V_1 \cup ... \cup V_m$$

*di insieme algebrici irriducibili $V_i$, $i = 1, ..., m$.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che $V$ sia un insieme algebrico affine che non può essere scritto come unione finita di irriducibili. Allora $V$ non è irriducibile, quindi esistono due insiemi algebrici affini $V_1$ e $V_1'$ diversi da $V$ e tali che $V = V_1 \cup V_1'$. Uno dei due, poniamo sia $V_1$, non deve essere un'unione

[3] È importante sottolineare che il teorema vale solo nel caso di $k$ algebricamente chiuso.

[4] Un ideale $I$ si dice radicale se $I = \sqrt{I}$.

[5] Si veda per esempio [Atiyah-MacDonald], capitoli 1 e 7.

finita di irriducibili, per cui, ripetendo l'argomentazione precedente si ha che $V_1 = V_2 \cup V_2'$, con $V_1 \neq V_2$ e $V_1 \neq V_2'$. Continuando in questo modo si costruisce una catena infinita $V \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq ...$ di insiemi algebrici affini tutti diversi. Questo contraddice il fatto che $k^n$ sia noetheriano. $\square$

**Definizione-Proposizione 1.14.** Si possono scegliere gli insiemi algebrici di $k^n$ come chiusi per una topologia su $k^n$, chiamata *topologia di Zarisky.* Su un insieme irriducibile $V$ si può prendere la topologia indotta, chiamata ancora topologia di Zariski. I chiusi di $V$ sono esattamente gli insiemi $\mathbf{V}(I)$ con $I$ ideale che contiene $\mathbf{I}(V)$.

Una base di aperti per la topologia di Zariski su $V$ è data dagli aperti

$$V_f = \{x \in V | f(x) \neq 0\}.$$

Infatti $V_f = V \setminus \mathbf{V}((f))$, quindi $V_f$ è aperto. Inoltre se $U = V \setminus \mathbf{V}(I)$ è un qualsiasi aperto, allora

$$U = \bigcup_{f \in I} V_f.$$

Per molte ragioni non è sufficiente limitarsi agli insiemi algebrici "affini" appena definiti, un gran numero di problemi può essere risolto più semplicemente introducendo anche gli insiemi algebrici "proiettivi". Ricordiamo che, per definizione, $\mathbb{P}_n(k)$ è l'insieme delle $(x_0, ..., x_n) \in k^{n+1}$, diverse da 0, modulo la relazione di equivalenza

$$(x_0, ..., x_n) \sim (\alpha x_0, ..., \alpha x_n), \qquad \alpha \in k \setminus \{0\}.$$

$(x_0, ..., x_n)$ è chiamato insime di coordinate omogenee per il punto associato. $\mathbb{P}_n(k)$ può essere ricoperto da $n+1$ sottoinsiemi $U_0, ..., U_n$, dove ogni $U_i$ è l'insieme dei punti rappresentati dalle coordinate omogenee $(x_0, ..., x_n)$ con $x_i \neq 0$.
Ogni $U_i$ è naturalmente isomorfo a $k^n$, tramite la mappa che a $(x_0, ..., x_n)$ associa $(x_0/x_i, ..., x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, ..., x_n/x_i)$.

**Definizione 1.15.** Un insieme algebrico in $\mathbb{P}_n(k)$ consiste di tutte le radici di una collezione finita di polinomi omogenei $f_i \in k[X_0, ..., X_n]$

La definizione è ben posta perché se $f$ è omogeneo e $(x_0, ..., x_n), (\alpha x_0, ..., \alpha x_n)$ sono due insiemi di coordinate per lo stesso punto allora

$$f(x_0, ..., x_n) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha x_0, ..., \alpha x_n) = 0.$$

Si può definire un analogo proiettivo di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{I}$ utilizzando solo gli ideali omogenei, cioè gli ideali generati da polinomi omogenei. Per $V$ insieme algebrico proiettivo e $I$ ideale omogeneo,

$$\mathbf{V}(I) = \{P \in \mathbb{P}_n(k) | \text{se } x = (x_0, ..., x_n) \text{ sono coordinate per } P,\ f(x) = 0\ \forall f \in I\}$$

$$\mathbf{I}(V) = \{\text{Ideale generato dai polinomi omogenei che si annullano su tutto } V\}$$

C'è quindi una corrispondenza biunivoca, del tutto analoga a quella del corollario 1.7, tra insiemi algebrici di $\mathbb{P}_n(k)$ e ideali radicali omogenei di $k[X_0, ..., X_n]$, tranne che per $I = (X_0, ..., X_n)$. Valgono anche per il proiettivo le relazioni enunciate nel corollario 1.7 e si definiscono analogamente gli insiemi algebrici irriducibili. In particolare ogni insieme algebrico di $\mathbb{P}_n(k)$ può essere scritto in esattamente un modo come unione di irriducibili non contenuti l'uno dentro l'altro.
Su $\mathbb{P}_n(k)$ e sui suoi sottoinsiemi irriducibili si può definire la topologia di Zariski come fatto per il caso affine (definizione-proposizione 1.14). In particolare una base per gli aperti di $\mathbb{P}_n(k)$ è data da

$$\mathbb{P}_n(k)_f = \{x \in \mathbb{P}_n(k) | f(x) \neq 0\}$$

dove $f$ è un polinomio omogeneo. Inoltre $\mathbb{P}_n(k)_{X_i}$ è omeomorfo a $k^n$ tramite la solita mappa

$$(x_0, ..., x_n) \to (x_0/x_i, ..., x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, ..., x_n/x_i)$$

### 1.2.2 Morfismi

**Definizione 1.16.** Sia $X$ un insieme algebrico. Una funzione $f : X \to k$ è regolare nel punto $x \in X$ se esiste un intorno aperto $U$ di $x$ e dei polinomi $g, h \in k[x_1, ..., x_n]$, tali che $h$ sia sempre diversa da 0 su $U$ e $f = g/h$ su $U$. Diciamo che $f$ è regolare su $X$ se è regolare in ogni punto $x \in X$ e che è regolare su un aperto $V \subset X$ se è regolare in ogni punto di $V$.

**Proposizione 1.10.** *Identificando $k$ con $\mathbb{A}^1_k$ (con la topologia di Zariski), una funzione regolare è continua.*

È importante sottolineare che se $h$ è una funzione regolare per un qualche aperto $U$ di $X$ non è detto che esistano due polinomi $f$ e $g$, $g$ sempre non nullo su $U$, tali che su tutto $U$ valga $h = f/g$.

*Esempio* 1. Siano $X = \mathbf{V}(xw - yz) \subset k^4$ e $U = X_y \cup X_w$. Consideriamo la funzione $h = x/y$ su $X_y$ e $h = z/w$ su $X_w$. $h \in \mathcal{O}_X(U)$, ma non esistono $f, g$, $g \neq 0$, tali che $h = f/g$ su tutto $U$.

Supponiamo per assurdo che $h = f/g$ su $U$. Sia $Z = \mathbf{V}(y, w)$, $Z$ è un piano in $X$ e $U = X - Z$. Poiché $g \neq 0$ su $U$, $\mathbf{V}(g) \cap X \subset Z$. Alcuni teoremi di algebra [6] garantiscono che l'intersezione deve essere vuota o di dimensione 2; in quest'ultimo caso quindi deve essere tutto $Z$, visto che $Z$ è irriducibile. Se $\mathbf{V}(g) \cap X = \emptyset$ allora $h = f/g \in \mathcal{O}_X(X)$, che è assurdo, perché $x = y \cdot h$ ma ad $X$ appartengono punti tali che, per esempio, $x = 1$ e $y = 0$.
Supponiamo quindi che $\mathbf{V}(g) \cap X = Z$. Sia $Z' = \mathbf{V}(x, z)$; anche $Z'$ è un piano contenuto in $X$, quindi

$$\{(0, 0, 0, 0)\} = Z \cap Z' = \mathbf{V}(g) \cap X \cap Z' = \mathbf{V}(g, x, z)$$

$g(0, y, 0, w)$ si può quindi vedere come una funzione polinomiale sul piano $Z$ che si annulla solo nell'origine, il che è assurdo.

**Definizione 1.17.** Siano $X$ e $Y$ insiemi algebrici. Un morfismo $f : X \to Y$ è una funzione continua tale che per ogni aperto $V \subset Y$ e per ogni funzione regolare $\phi : V \to k$ la funzione $\phi \circ f : f^{-1}(V) \to k$ è regolare.

**Definizione 1.18.** Sia $X \subset k^n$ un insieme algebrico. Allora chiamiamo anello delle coordinate l'anello

$$\Gamma(X) = k[X_1, ..., X_n]/\mathbf{I}(X)$$

**Proposizione 1.11.** *Dato un insieme algebrico $X$, l'anello delle coordinate $\Gamma(X)$ è canonicamente isomorfo all'insieme delle funzioni regolari su $X$.*

**Definizione-Proposizione 1.19.** Sia $X \subset k^n$ un insieme algebrico. Per ogni aperto $U \subset X$ sia $\mathcal{O}_X(U)$ l'anello delle funzioni regolari da $U$ a $k$ e per ogni $V \subset U$ sia $\rho_{U,V} : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ la mappa di restrizione. $\mathcal{O}_X$ così definito è un fascio di anelli.

*Dimostrazione.* È chiaro che sia un prefascio. Per verificare che è anche un fascio osserviamo che una funzione che è localmente 0 è 0 e che una funzione che è regolare localmente è regolare, proprio per la definizione 1.16. □

*Osservazione* 2. [7] Sia $X$ un insieme algebrico *irriducibile*. Allora $R = k[x_1, ..., x_n]/I(X)$, l'anello delle coordinate di $X$, è un dominio di integrità, poiché $I(X)$ è primo. Chiamiamo $K$ il campo delle frazioni di $R$.

1. $\Gamma(X_f, \mathcal{O}_X) = R_f$ (in particolare, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = R$).

[6] Si veda [Mumford], capitolo I, paragrafo 7.
[7] Per maggiori dettagli si vedano [Mumford], capitolo 1, pagg. 20-21 e [Hartshorne], capitolo 1 pagg. 16-17.

2. Chiamiamo $\mathcal{O}_x$ la spiga di $\mathcal{O}_X$ in $x$. I suoi elementi sono le coppie $\langle U, f\rangle$ (con $U$ intorno aperto di $x$ e $f$ regolare su $U$) e vale che $\langle U, f\rangle = \langle V, g\rangle$ se $f = g$ su un qualche aperto $W \subset U \cap V$. Si ha che $\mathcal{O}_x$ è l'anello locale $R_{m_x}$, dove $m_x$ è l'ideale massimale $m_x = \{f \in R | f(x) = 0\}$ (è il nucleo dell'omomorfismo $R \to k$ dato da $f \mapsto f(x)$). Osserviamo anche che $\dim \mathcal{O}_x = \dim X$.[8]

3. Si può ritrovare il campo delle frazioni $K$ a partire dal fascio $\mathcal{O}_X$. Poiché $X$ è irriducibile l'intersezione di due aperti è non vuota. Possiamo quindi definire una *spiga generica*

$$K(X) = \varinjlim_{U \neq \emptyset} \mathcal{O}_X(U)$$

i cui elementi sono le classi di equivalenza $\langle U, f\rangle$ ($U$ aperto, $f$ regolare su $U$), con la regola di identificazione $\langle U, f\rangle = \langle V, g\rangle$ se $f = g$ su $U \cap V$. $K(X)$ è proprio $K$, il campo delle frazioni di $R$.

**Proposizione 1.12.** *Siano $X$ e $Y$ insiemi algebrici e sia $f : X \to Y$ una funzione continua. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *$f$ è un morfismo (come da definizione 1.17);*

2. *per ogni $g \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$, $g \circ f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$;*

3. *per ogni aperto $U \subset Y$ e per ogni $g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$, $g \circ f \in \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$;*

4. *per ogni $x \in X$ e $g \in \mathcal{O}_{f(x)}$, $g \circ f \in \mathcal{O}_x$.*

*Dimostrazione.* È ovvio che 4. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 2.. Inoltre 1. $\Leftrightarrow$ 2.: ($\Rightarrow$) segue dalla definizione di morfismo, ($\Leftarrow$) è una conseguenza della proposizione 1.11. Proviamo quindi che 2. $\Rightarrow$ 4.
Sia $g \in \mathcal{O}_{f(x)}$. Poniamo $g = a/b$, $a, b \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$, $b(f(x) \neq 0$. Per ipotesi $a \circ f$, $b \circ f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$; di conseguenza $g \circ f = a \circ f / b \circ f \in \mathcal{O}_x$ poiché $b \circ f(x) \neq 0$. □

Questa proposizione è importante perché mette in rilievo come il nostro fascio contenga implicitamente tutte le informazioni necessarie per definire i morfismi.

[8] Si veda [Hartshorne], captiolo 1, teorema 1.8.

### 1.2.3 Varietà affini

**Definizione 1.20.** Una varietà affine è uno spazio topologico $X$ insieme a un fascio $\mathcal{O}_X$ di funzioni su $X$ in $k$ tali che $X$ sia isomorfo (come spazio topologico) a un insieme algebrico contenuto in un qualche $k^n$ e $\mathcal{O}_X$ sia isomorfo (tramite un isomorfismo di fasci) al fascio della definizione 1.19.

Sostituendo nella proposizione 1.12 "insieme algebrico" con "varietà affine" si caratterizzano i morfismi tra varietà affini. Le varietà affini con i loro morfismi costituiscono quindi una categoria.
In particolare un *isomorfismo* $\phi : X \to Y$ è un morfismo che ammette un morfismo inverso $\psi : Y \to X$ con $\psi \circ \phi = id_X$ e $\phi \circ \psi = id_Y$. È importante sottolineare che un isomorfismo è un morfismo biiettivo (e bicontinuo), ma il viceversa non sempre è vero.

*Esempio* 2. Consideriamo il morfismo $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$, $t \mapsto (t^2, t^3)$. L'immagine è la curva $C = \{y^2 = x^3\}$. Restringendo il codominio si ha che $f : \mathbb{A}^1 \to C$ è bicontinua, con inversa $f^{-1} : C \to \mathbb{A}^1$, $(x, y) \mapsto \sqrt[3]{y}$. Tuttavia $f^{-1}$ non è un morfismo. Prendiamo per esempio $i \in \Gamma(\mathbb{A}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1})$, $i : \mathbb{A}^1 \to k$, $x \mapsto x$. $i \circ f^{-1} : C \to k$, $(x, y) \mapsto \sqrt[3]{y}$ non è una funzione regolare.
Se lo fosse ci sarebbe un intorno $V$ di 0 in cui $\sqrt[3]{y} = \frac{a(y)}{b(y)}$, con $a, b$ polinomi e $b \neq 0$. Ma in questo caso nell'intorno dovrebbero essere uguali anche le derivate, ma ciò non è possibile perché quella di $\sqrt[3]{y}$ ha singolarità in 0, quella di $a/b$, con $b \neq 0$ no.
Osserviamo inoltre che l'anello delle coordinate di $C$ è

$$\begin{aligned} k[X,Y]/(X^3 - Y^2) &\longleftrightarrow k[t^2, t^3] \\ [X] &\longmapsto t^2 \\ [Y] &\longmapsto t^3 \end{aligned}$$

e $f$ induce tra gli anelli delle coordinate di $C$ e $\mathbb{A}^1$ un omorfismo

$$\begin{aligned} f^* : k[t^2, t^3] &\longrightarrow k[t] \\ g &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

$f^*$ non può essere un isomorfismo perché i due anelli non sono isomorfi.

Un morfismo $\phi : X \to Y$ induce per ogni aperto $U \subset Y$ un omomorfismo di anelli

$$\phi^* : \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \to \Gamma(\phi^{-1}(U), \mathcal{O}_X), \qquad g \mapsto g \circ \phi$$

Tenendo in mente la proposizione 1.12 risulta ovvio che una condizione necessaria affinché un morfismo biiettivo sia un isomorfismo è che induca un isomorfismo di anelli tra $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ e $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

È importante osservare che alcuni sottoinsiemi di $X$ hanno sempre una struttura indotta di varietà affine, in particolare valgono le seguenti:

**Proposizione 1.13.** *Sia $Y$ un sottoinsieme chiuso di una varietà affine $(X, \mathcal{O}_X)$. Si può definire un fascio indotto $\mathcal{O}_Y$ di funzioni su $Y$: se $V$ è aperto in $Y$, $\mathcal{O}_Y(V)$ sarà l'insieme delle funzioni $f$ su $V$ valutate in $k$, tali che per ogni $x \in V$, esiste un intorno $U$ di $x$ in $X$ e una funzione $\mathcal{F} \in \mathcal{O}_x(U)$ tale che $f = \mathcal{F}_{|U \cap V}$.*
*$(Y, \mathcal{O}_Y)$ è una varietà affine.*

**Proposizione 1.14.** *Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ una varietà affine e sia $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Allora, definendo in modo ovvio la restrizione del fascio $\mathcal{O}_X$ all'aperto $X_f$, $(X_f, \mathcal{O}_{X_f})$ è una varietà affine.*

### 1.2.4 Prevarietà algebriche

Abbiamo ormai tutti gli strumenti per dare la definizione di *prevarietà* algebrica. Poco oltre enunceremo una condizione che in questo contesto è simile alla richiesta di essere spazi di Hausdorff che si fa abitualmente per le varietà topologiche; una *varietà algebrica* sarà quindi una prevarietà per cui vale anche questa ulteriore condizione.

**Definizione 1.21.** Uno spazio topologico $X$ più un fascio $\mathcal{O}_X$ di funzioni su $X$ a valori in $k$ è una prevarietà se

(V1) esiste un ricoprimento aperto finito $\{U_i\}$ di $X$ tale che per ogni $i$ $(U_i, \mathcal{O}_{X|U_i})$ è una varietà affine.

**Definizione 1.22.** Un aperto $U$ di $X$ è chiamato *aperto affine* se $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ è una varietà affine.

Gli aperti affini sono una base per la topologia. Infatti, per la proposizione 1.14 questo è vero se ci restringiamo su ciascun $U_i$ (gli aperti $U_{if}$ sono varietà affini e formano una base) e essi coprono $X$. Data una prevarietà $X$ le affermazioni seguenti sono conseguenze della definizione 1.21:

*Osservazione* 3. 1. $X$ è uno spazio noetheriano (cioè i suoi chiusi soddisfano la condizione della catena discendente);

2. $X$ è quasi compatto.

**Proposizione 1.15.** *Un aperto $U$ di una prevarietà $X$ è una prevarietà.*

*Dimostrazione.* U si può scrivere come unione di aperti affini. Ma essi sono in numero finito perché $U$ come $X$ è quasi compatto. Si rispetta quindi la definizione 1.21. □

Dato un chiuso $Y \subset X$, il fascio $\mathcal{O}_X$ induce un fascio $\mathcal{O}_Y$ su $Y$: se $V$ è aperto in $Y$, $\mathcal{O}_Y(V)$ è l'insieme delle funzioni $f$ su $V$ valutate in $k$, tali che per ogni $x \in V$, esiste un intorno $U$ di $x$ in $X$ e una funzione $\mathcal{F} \in \mathcal{O}_x(U)$ tale che $f = \mathcal{F}_{|U\cap V}$.

**Proposizione 1.16.** $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *è una prevarietà.*

*Dimostrazione.* Segue immediatamente dalla proposizione 1.13. □

**Proposizione 1.17.** *Si può dare una struttura di prevarietà a qualsiasi sottoinsieme* localmente chiuso[9] *di una prevarietà X*

*Dimostrazione.* Il risultato si ottiene combinando le proposizioni 1.15 e 1.16. □

L'insieme di tutte le prevarietà così ottenute è chiamato l'insieme delle *sottoprevarietà* di $X$.
In analogia con quanto visto per le varietà affini si danno le definizioni di morfismo e isomorfismo.

**Definizione 1.23.** Siano $X$ e $Y$ prevarietà. Una mappa $f : X \to Y$ è un *morfismo* se $f$ è continua e per tutti gli aperti $V \subset Y$,

$$g \in \Gamma(V, \mathcal{O}_Y) \Longrightarrow g \circ f \in \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{O}_X).$$

Un isomorfismo è un morfismo che ammette un morfismo inverso.

Per distinguerli da morfismi tra oggetti di altre categorie, se necessario chiameremo i morfismi appena definiti *morfismi algebrici* o *morfismi regolari.*

### 1.2.5 Prodotto di prevarietà

Prima di enunciare la condizione aggiuntiva per definire le varietà è necessario fare qualche considerazione sul *prodotto* di prevarietà. Senz'altro vogliamo che $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \cong \mathbb{A}^{n+m}$, ma questo non è vero se come topologia del prodotto si prende semplicemente il prodotto delle topologie di Zariski; in $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ per esempio gli unici chiusi sarebbero le unioni finite di rette orizzontali e

[9] Un insieme è localmente chiuso se per ogni punto $x$ di $U$ esiste un intorno aperto $W$ di x tale che $U \cap W$ è un chiuso nella topologia indotta di $W$. È equivalente definire un insieme localmente chiuso come intersezione di un aperto e di un chiuso.

verticali, mentre sappiamo che in $\mathbb{A}^2$ con la topologia di Zariski ce ne sono ben di più. È necessario quindi definire il prodotto mediante la sua proprietà universale rispetto ai morfismi di prevarietà.
Se $Z$ è il prodotto di $X$ e $Y$,

$$\begin{tikzcd} & X \\ Z \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q"'] & \\ & Y \end{tikzcd}$$

deve valere la seguente proprietà universale: per tutti $W$ e morfismi $r, s$

$$\begin{tikzcd} & X \\ W \arrow[ur, "r"] \arrow[dr, "s"'] & \\ & Y \end{tikzcd}$$

esiste un unico morfismo $t : W \to Z$ tale che $r = p \circ t$, $s = q \circ t$, cioè tale che

$$\begin{tikzcd} & X \\ W \arrow[ur, "r"] \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "s"'] & Z \arrow[u, "p"'] \arrow[d, "q"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

commuti. È del tutto equivalente richiedere che

$$\hom(W, Z) \cong \hom(W, X) \times \hom(W, Y)$$

Chiaramente come insieme di punti $X \times Y$ dovrà essere l'usuale prodotto di insiemi di punti; la proposizione seguente permette di capire come è fatta la topologia nel caso delle varietà affini.

**Proposizione 1.18.** *Siano $X$ e $Y$ varietà affini, con anelli delle coordinate $R$ e $S$. Allora*

1. *c'è un prodotto di prevarietà $X \times Y$;*

2. *$X \times Y$ è affine con anello delle coordinate $R \otimes_k S$;*

3. *una base per la topologia è data dagli aperti*

$$\sum f_i(x)g_i(y) \neq 0, \qquad f_i \in R, g_i \in S;$$

*Dimostrazione.* Assumiamo un risultato di algebra commutativa[10]: se $R$ e $S$ sono domini di integrità su un campo algebricamente chiuso, allora $R \otimes_k S$ è un dominio di integrità. Possiamo considerare $X$ come contenuta in $k^{n_1}$ e quindi vederla come $\mathbf{V}(f_1, ..., f_{m_1})$ e analogamente $Y \subset k^{n_2}$ come $\mathbf{V}(g_1, ..., g_{m_2})$. Insiemisticamente $X \times Y$ è il luogo degli zeri dei $f_1, ..., f_{m_1}, g_1, ..., g_{m_2}$ in $k[X_1, ..., X_{m_1}, Y_1, ..., Y_{m_2}]$. Inoltre, visto che gli $f_j$ sono solo nelle prime $m_1$ variabili, i $g_j$ nelle seconde $m_2$,

$$\begin{aligned}
&k[X_1, ..., Y_{n_2}]/(f_1, ..., g_{m_2}) \cong \\
&k[X_1, ..., X_{n_1}]/(f_1, ..., f_{m_1}) \otimes_k k[Y_1, ..., Y_{n_2}]/(g_1, ..., g_{m_2}) = \\
&R \otimes_k S
\end{aligned}$$

Poiché $R \otimes_k S$ è un dominio di integrità l'ideale $(f_1, ..., g_{m_2})$ è primo, $X \times Y$ è irriducibile e ha come anello delle coordinate $R \otimes_k S$. $X \times Y$ è quindi una varietà affine, resta da far vedere che la topologia assegnata rispetta le condizioni per il prodotto enunciate in precedenza. Le proiezioni naturali $p$ e $q$ (ad es. $p(x_1, ..., y_{n_2}) = (x_1, ...x_{n_1})$) sono morfismi. Dati i morfismi $r : W \to X$, $s : W \to Y$, chiaramente a livello insiemistico $t(w) = (r(w), s(w))$ è l'unica mappa tale che $r = p \circ t$ e $s = q \circ t$; occorre mostrare che $t$ è un morfismo.
Poiché $X \times Y$ è affine basta verificare che $g \in \Gamma(X \times Y, \mathcal{O}_{(X \times Y)}) \Longrightarrow g \circ t \in \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$. $\Gamma(X \times Y, \mathcal{O}_{(X \times Y)})$ è generata dalle immagini di $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = R$ e $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = S$. Esse, composte con $t$, vanno in $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$, perché $r$ e $s$ sono morfismi. Di conseguenza tutte le sezioni di $\Gamma(X \times Y, \mathcal{O}_{(X \times Y)})$ vanno in $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$.
Abbiamo provato 1. e 2. La 3. è un'immediata conseguenza perché una base per la topologia è senz'altro data dagli aperti del tipo $(X \times Y)_h$, con $h \in R \otimes_k S$. □

A questo punto "incollando" insieme i prodotti affini si ottiene un prodotto anche tra prevarietà algebriche.

**Proposizione 1.19.** *Siano $X$ e $Y$ prevarietà su un campo $k$. Allora esse hanno un prodotto $X \times Y$ che è una prevarietà.*

[10] Si veda per esempio [Zariski-Samuel], vol.1, capitolo 3, paragrafo 15.

*Traccia di dimostrazione.* Iniziamo dal prodotto di insiemi. Per ogni aperto affine $U \subset X$, $V \subset Y$ e ogni insieme finito di elementi $f_i \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, $g_i \in \Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$ si forma l'insieme $(U \times V)_{\sum f_i g_i}$. Questo ci dà una base per gli aperti; su $U \times V$ è indotta la topologia del prodotto della proposizione precedente.
Un fascio di funzioni si definisce come

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_{X\times Y}) = \bigcap_{(x,y)\in U} \mathcal{O}_{(x,y)},$$

dove $\mathcal{O}_{(x,y)}$ è la localizzazione di $\mathcal{O}_x \otimes_k \mathcal{O}_y$ sull'ideale massimale $m_x \cdot \mathcal{O}_y + \mathcal{O}_x \cdot m_y$. Esso coincide su ciascun $U \times V$ (con $U$ e $V$ affini) con il prodotto di varietà affini. Poiché $X \times Y$ è ricopribile con un numero finito di affini esso è una prevarietà. Si prova infine che la proprietà universale è soddisfatta. $\square$

Possiamo ora finalmente dare la definizione di varietà algebrica:

**Definizione 1.24.** Sia $X$ una prevarietà, sia $X \times X$ la varietà prodotto, con funzioni di proiezione $p_1, p_2$ tali che $p_1(x_1, x_2) = x_1$ e $p_2(x_1, x_2) = x_2$. Allora $X$ è una varietà algebrica se e solo se

(V2) La diagonale $\Delta(X) = \{z \in X \times X | p_1(z) = p_2(z)\}$ è un chiuso in $X \times X$.

La condizione (V2) è chiamata anche assioma di Hausdorff ed è equivalente alla formulazione seguente:

(V2bis) Per ogni prevarietà $Y$ e tutti i morfismi $f, g$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

$\{y \in Y | f(y) = g(y)\}$ è un chiuso di $Y$.

È evidente che (V2bis)$\Rightarrow$(V2), basta prendere $Y = X \times X$, $f = p_1$, $g = p_2$, ma vale anche il viceversa. Infatti $f$ e $g$ inducono un morfismo $(f, g) : Y \to X \times X$. Poiché

$$\{y \in Y | f(y) = g(y)\} = (f, g)^{-1}[\Delta(X)],$$

il fatto che $\Delta(X)$ sia chiuso implica (V2bis).

*Osservazione* 4. 1. Una sottoprevarietà di una varietà è una varietà (la chiameremo sottovarietà).

2. Il prodotto di due varietà è una varietà.

3. Una varietà affine è una varietà.

4. Se $f, g : Y \to X$ sono morfismi tra prevarietà qualsiasi, $\{y \in Y | f(y) = g(y)\}$ è sempre localmente chiuso.

Ricalcando la definizione 1.13 data per gli insiemi algebrici, possiamo dire che una varietà algebrica $X$ è irriducibile se non è unione di due sottovarietà proprie. Come per gli insiemi algebrici si prova che qualsiasi varietà è unione finita di varietà irriducibili.
Sempre su modello di quanto visto per gli insiemi algebrici (si veda l'osservazione 2) possiamo definire la spiga generica[11]:

**Definizione 1.25.** Sia $X$ una varietà algebrica irriducibile. Il campo delle funzioni $k(X)$ è la spiga generica di $\mathcal{O}_X$, cioè:

$$k(X) = \varinjlim_{U \neq \emptyset} \mathcal{O}_X(U)$$

Questo ci permette di definire la *dimensione* di una varietà algebrica:

**Definizione 1.26.** Se $X$ è una varietà irriducibile, allora la dimensione di $X$ è il grado di trascendenza su $k$ di $k(X)$.
Se $X$ è una varietà riducibile, la sua dimensione è l'estremo superiore delle dimensioni delle sue componenti irriducibili.

### 1.2.6 Varietà proiettive

Siano $P \subset k[X_0, ..., X_n]$ un ideale primo omogeneo, $X = \mathbf{V}(P) \subset \mathbb{P}_n(k)$ un insieme algebrico proiettivo. Vogliamo dare a $X$, con la sua topologia di Zariski, una struttura di varietà algebrica; procederemo in maniera analoga a quanto fatto per le varietà affini.
Gli elementi di $k[X_0, ..., X_n]$, anche quelli omogenei, non danno funzioni su $X$; tuttavia il rapporto di due polinomi omogenei dello stesso grado può essere visto come una funzione su $X$. Poiché $P$ è omogeneo, $R = k[X_0, ..., X_n]$ è in modo naturale un anello graduato $\oplus_{n=0}^{\infty} R_n$. Stabiliamo che $k(X)$ è la parte di grado 0 della localizzazione di $R$ rispetto agli elementi omogenei, cioè

$$k(X) = \{f/g | f, g \in R_n \text{ per lo stesso } n\}.$$

[11] Poiché $X$ è irriducibile, due aperti qualsiasi hanno intersezione non vuota.

Se $x \in X$ e $g \in R_n$ ha senso dire che $g(x) \neq 0$, anche se $g$ non è una funzione su $X$, quindi si può definire un anello $\mathcal{O}_x$ in $k(X)$ come $\{f/g \in k(X) | g(x) \neq 0\}$. L'insieme

$$m_x = \{f/g \in k(X) | f(x) = 0, \quad g(x) \neq 0\}$$

è un ideale nell'anello $\mathcal{O}_x$ e ogni elemento non in $m_x$ è invertibile in $\mathcal{O}_x$, che di conseguenza è un anello locale.
Definiamo un fascio $\mathcal{O}_X$ su $X$ tramite

$$\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_x, \qquad \text{per ogni aperto } U \subset X.$$

Si dimostra[12] che $(X, \mathcal{O}_X)$ è localmente isomorfa a una varietà affine. In particolare si prova che

$$(X \cap \mathbb{P}_n(k)_{X_i}, \quad \text{restrizione di } \mathcal{O}_X)$$

è una varietà affine per ogni $i$. Da ciò segue subito che $X$ è una prevarietà algebrica.
Affinché $X$ sia una varietà deve soddisfare anche (V2). Osserviamo che per tutti gli $x, y \in \mathbb{P}_n(k)$ esiste un iperpiano che non contiene nè $x$ nè $y$, cioè un elemento $h = \sum \alpha_i x_i \in k[X_0, ..., X_n]$ tale che $x, y \in \mathbb{P}_n(k)_h$. $\mathbb{P}_n(k)_h$ è affine, quindi $X \cap \mathbb{P}_n(k)_h$ è un aperto affine in $X$. Il risultato è un'immediata conseguenza della proposizione seguente:

**Proposizione 1.20.** *Sia $X$ una prevarietà. Supponiamo che per tutti gli $x, y \in X$ ci sia un aperto affine $U$ che contiene sia $x$ sia $y$. Allora $X$ è una varietà.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo che vale (V2bis). Siano $f, g : Y \to X$ due morfismi e poniamo $Z = \{p \in Y | f(p) = g(p)\}$. Occorre provare che $Z$ è chiuso. Sia $z \in \overline{Z}$, $x = f(z)$, $y = g(z)$. Per ipotesi c'è un aperto affine $V$ contenente $x$ e $y$. Sia $U = f^{-1}(V) \cap g^{-1}(V)$; $U$ è un aperto di $Y$ contenente $z$. $V$, essendo affine, è una varietà, quindi se $f', g'$ sono le restrizioni di $f, g$ a morfismi da $U$ a $V$, deve essere che

$$\{p \in U | f'(p) = g'(p)\}$$

è chiuso in U. Ma per costruzione questo insieme è proprio $Z \cap U$ e quindi $z \in Z \cap U$. In particolare $z \in Z$, quindi $Z$ è chiuso. □

[12]Per i dettagli si veda per esempio [Mumford], capitolo 1, paragrafo 5.

## 1.3 Spazi analitici

D'ora in avanti indichiamo con $\mathbb{C}^n$ lo spazio complesso $n$-dimensionale munito della topologia standard.
Un insieme analitico è un sottoinsieme di $\mathbb{C}^n$ che può essere definito localmente da un numero finito di equazioni olomorfe; come accade per un insieme algebrico un insieme di questo tipo ha in generale punti di singolarità, perché non si fanno assunzioni sul differenziale delle equazioni.

**Definizione 1.27.** Sia $U \subset \mathbb{C}^n$. Si dice che $U$ è un insieme analitico se per ogni $x \in U$ esistono delle funzioni olomorfe $f_1, ..., , f_k$ definite su un intorno $W$ di $x$ tali che

$$U \cap W = \{z \in W | f_1(z) = ... = f_k(z) = 0\}$$

$f_1, ..., f_k$ si dicono equazioni locali di $U$ in $W$

$U$ è allora localmente chiuso in $\mathbb{C}^n$ e quindi localmente compatto per la topologia indotta da quella di $\mathbb{C}^n$.
Vogliamo munire lo spazio topologico $U$ di un fascio. Sia $\mathcal{H}$ il fascio dei germi di funzioni olomorfe su $\mathbb{C}^n$ (è un sottofascio del fascio dei germi di funzioni su $\mathbb{C}^n$). Possiamo restringere il fascio a un fascio $\mathcal{H}_U$ su $U$; le spighe $\mathcal{H}_{x,U}$ indotte dalle $\mathcal{H}_x$ sono identificabili ai quozienti $\mathcal{H}_x/A_x(U)$, dove $\mathcal{A}_x(U)$ è l'ideale delle funzioni $f \in \mathcal{H}_x$ la cui restrizione a $U$ è nulla.
È possibile inoltre definire la nozione di *applicazione olomorfa* sfruttando i fasci, proprio come fatto per i morfismi tra insiemi algebrici (vedi proposizione 1.12)

**Definizione 1.28.** Dati $U \subset \mathbb{C}^r$ e $V \subset \mathbb{C}^s$, un'applicazione $\phi$ si dice olomorfa se è continua e $f \in \mathcal{H}_{\phi(x),V} \Rightarrow f \circ \phi \in \mathcal{H}_{x,U}$

È la stessa cosa richiedere che le $s$ coordinate di $\phi(x)$, $x \in U$, siano funzioni olomorfe di $x$, cioè sezioni di $\mathcal{H}_U$.
La composizione di applicazioni olomorfe è olomorfa. Un'applicazione biunivoca è un *isomorfismo analitico* se anche la sua inversa è olomorfa, o, equivalentemente, se il morfismo indotto sui fasci è un isomorfismo tra $\mathcal{H}_V$ e $\mathcal{H}_U$.
Se $U \subset \mathbb{C}^r$ e $V \subset \mathbb{C}^s$ sono due insiemi analitici, anche il prodotto $U \times V$ è un insieme analitico di $\mathbb{C}^{r+s}$, con la topologia prodotto delle due topologie. Questo fatto costituisce una prima importante differenza con il caso algebrico.

**Definizione 1.29.** Sia $X$ uno spazio topologico a cui sia associato un fascio $\mathcal{H}_X$. $X$ si definisce spazio analitico se valgono le due condizioni seguenti.

(H1) Esiste un ricoprimento aperto $(V_i)_{i\in I}$ di $X$ tale che ogni $V_i$, munito della topologia e del fascio indotti, sia isomorfo a un insieme analitico $U_i$, dotato della topologia e del fascio della definizione 1.27;

(H2) $X$ è Hausdorff.

Il fascio $\mathcal{H}_X$ è chiamato il fascio dei germi di funzioni olomorfe su $X$.

Generalizzando la definizione 1.28 diciamo olomorfa un'applicazione continua $\phi : X \to Y$ tra spazi analitici se per ogni $f \in \mathcal{H}_{\phi(x),Y}$ vale che $f \circ \phi \in \mathcal{H}_{x,X}$. Queste applicazioni sono i morfismi della categoria degli spazi analitici.
Se $V$ è un aperto di uno spazio analitico $X$ chiamiamo *carta* di $V$ qualsiasi isomorfismo analitico con un insieme analitico $U$ di $\mathbb{C}^n$. Il fatto che $X$ sia Hausdorff implica che è possibile ricoprirlo con degli aperti che abbiano delle carte. Un sottoinsieme $Y$ di $X$ è analitico se per ogni carta $\phi : V \to U$ l'immagine $\phi(V \cap Y)$ è un insieme analitico di $U$. In questo caso $Y$ è localmente chiuso in $X$ e può essere munito in modo naturale di una struttura di spazio analitico, indotta da quella di $X$. Discorso analogo per il prodotto di due spazi analitici.

L'anello dei germi di funzioni olomorfi su $X$ in un punto $x$ è un'algebra su $\mathbb{C}$ e ha come unico ideale massimale $m_x$ l'ideale delle funzioni che si annullano in $x$; $\mathcal{H}_x/m_x$ è isomorfo a $\mathbb{C}$ mediante l'isomorfismo $f \mapsto f(x)$.
Come nel caso algebrico la conoscenza di $\mathcal{H}_x$[13] determina $X$ in un intorno di $x$. In particolare $X$ è isomorfa a $\mathbb{C}^n$ in un intorno di $x$ se e solo se l'algebra $\mathcal{H}_x$ è isomorfa a $\mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$ (l'algebra delle serie convergenti a $n$ variabili). Questa condizione equivale a dire che $\mathcal{H}_x$ è un anello locale *regolare*[14]. In questo caso $x$ è detto un punto semplice di dimensione $n$ su $X$. Se tutti i punti di $X$ sono semplici $X$ si dice *varietà analitica*, di dimensione analitica $n$.
Analogamente a quanto fatto per le varietà algebriche definiamo uno spazio analitico irriducibile se non è unione di due sottospazi analitici propri; si mostra che ogni spazio analitico è unione finita di spazi analitici irriducibili. Chiamando $X_i$ le componenti irriducibili di $X$ in $x$ e $p_i$ gli ideali primi minimali, si ha che $p_i = A_x(X_i)$ e $\mathcal{H}_x/p_i = \mathcal{H}_{x,X_i}$. Essenzialmente quindi lo studio locale di $X$ è riportato a quello delle $X_i$.
Si può dimostrare che l'insieme dei punti semplici di uno spazio analitico

[13] D'ora in avanti per brevità se è chiaro a quale spazio $X$ ci si riferisca scriveremo semplicemente $\mathcal{H}_x$ al posto di $\mathcal{H}_{x,X}$.

[14] Un anello locale regolare è un anello locale noetheriano con la proprietà che il numero minimo di generatori del suo ideale massimale è uguale alla sua dimensione di Krull

irriducibile è connesso; di conseguenza (visto che la dimensione varia con continuità) si può definire la sua *dimensione analitica*, ponendola uguale alla dimensione di un punto semplice. Si prova inoltre che l'insieme dei punti singolari è un sottospazio analitico.[15]
Come per le varietà algebriche diciamo che la dimensione di uno spazio analitico riducibile è l'estremo superiore delle dimensioni delle sue componenti irriducibili.

[15]Prove di questi fatti si possono trovare in [Gunning-Rossi].

# Capitolo 2

# Fasci coerenti

## 2.1 Fasci di $\mathcal{A}$-moduli

**Definizione 2.1.** Sia $\mathcal{A}$ un fascio di anelli su uno spazio topologico $X$; un fascio di $\mathcal{A}$ moduli è un fascio $\mathcal{F}$ di gruppi abeliani su $X$ più, per ogni aperto $U \subset X$, una struttura di $\mathcal{A}(U)$-modulo su $\mathcal{F}(U)$, tale che se $V \subset U$, il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} A(U) \times \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A(V) \times \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V) \end{array}$$

commuti. Un morfismo di fasci di $\mathcal{A}$-moduli è un morfismo di fasci che preserva la struttura di modulo su ogni aperto.

La definizione data da Serre è la seguente:

**Definizione 2.2.** Sia $\mathcal{A}$ un fascio di anelli (commutativi unitari). Un fascio $\mathcal{F}$ è un fascio di $\mathcal{A}$-moduli se ogni spiga $\mathcal{F}_x$ è munita di una struttura di $\mathcal{A}_x$-modulo unitario che varia "con continuità" con $x$, nel senso che se $\mathcal{A} + \mathcal{F}$ è il sottoinsieme di $\mathcal{A} \times \mathcal{F}$ formato dalle coppie $(a, f)$ tali che $\pi(a) = \pi(f)$, la mappa $(a, f) \mapsto a \cdot f$ è un'applicazione continua di $\mathcal{A} + \mathcal{F}$ in $\mathcal{F}$.

È chiaro che anche con questa definizione se $\mathcal{F}$ è un fascio di $\mathcal{A}$-moduli $\Gamma(U, \mathcal{F})$ è un $\Gamma(U, A)$-modulo.

**Definizione 2.3.** Data una varietà algebrica $X$, si dicono fasci *algebrici* i fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli.

**Definizione 2.4.** Dato un spazio analitico $X$, si dicono fasci *analitici* i fasci di $\mathcal{H}_X$-moduli.

Un classico esempio di fascio di $\mathcal{A}$-moduli e il fascio di ideali dell'anello $\mathcal{A}$: ogni $\mathcal{A}_x$-modulo è un ideale di $\mathcal{A}$. Un esempio di utilizzo dei fasci di ideali è dato dalla seguente

**Definizione-Proposizione 2.5.** Sia $Y$ un sottoinsieme analitico *chiuso* di uno spazio analitico $X$; per ogni $x \in X$ sia $\mathcal{A}_x(Y)$ l'insieme degli $f \in \mathcal{H}_{x,X}$ per i quali la restrizione a $Y$ è nulla in un intorno di $x$. Gli $\mathcal{A}_x(Y)$ formano un fascio di ideali $\mathcal{A}(Y)$ del fascio di anelli $\mathcal{H}_X$. $\mathcal{A}(Y)$ è quindi un fascio analitico. Il fascio quoziente $\mathcal{H}_X/A(Y)$ è nullo al di fuori di $Y$ e la sua restrizione a $Y$ è proprio $\mathcal{H}_Y$, è quindi possibile identificarli.

### 2.1.1 Fasci localmente liberi e fibrati vettoriali

Prima di introdurre la nozione più generale di *fascio coerente*, che sarà ampiamente utilizzata in seguito, discuteremo quella di fascio di $\mathcal{A}$-moduli *localmente libero* e accenneremo al fatto che i fasci localmente liberi corrispondono biunivocamente ai fibrati vettoriali.

**Definizione 2.6.** Sia $\mathcal{F}$ un fascio di $\mathcal{A}$-moduli su uno spazio topologico $X$. $\mathcal{F}$ è *localmente libero* di rango $r$ se $\mathcal{F}$ è localmente isomorfo a $\mathcal{A}^r$ in un intorno di ogni punto, cioè se per ogni $x \in X$ si può trovare un intorno $U$ e sezioni $s_1, ..., s_r \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ tali che il morfismo di fasci

$$\phi : A^r(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U), \qquad A_x^r \ni (w_1, ..., w_r) \mapsto \sum_{1\le j\le r} w_j s_j(x) \in \mathcal{F}_x$$

sia un isomorfismo.

Per definizione, se $\mathcal{F}$ è localmente libero c'è un ricoprimento aperto $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ in cui $\mathcal{F}$ ammette generatori liberi $s_1^\alpha, ..., s_r^\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{F})$. Poiché i generatori possono essere espressi univocamente in funzione di qualsiasi altro sistema di generatori indipendenti, per ogni coppia $(\alpha, \beta)$ c'è una matrice

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} = (\mathcal{G}_{\alpha\beta}^{jk})_{1\le j,k\le r}, \qquad \mathcal{G}_{\alpha\beta}^{jk} \in A(U_\alpha \cap U_\beta)$$

tale che

$$s_\beta^k = \sum_{1\le j\le r} s_\alpha^j \mathcal{G}_{\alpha\beta}^{jk}$$

Segue facilmente dall'uguaglianza $\mathcal{G}_{\alpha\beta} = s_\alpha^{-1} \circ s_\beta$ che $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ sono matrici invertibili che soddisfano la relazione di transizione

$$\mathcal{G}_{\alpha\gamma} = \mathcal{G}_{\alpha\beta}\mathcal{G}_{\beta\gamma} \quad \text{su} \quad U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$$

per tutti gli indici $\alpha, \beta, \gamma \in I$. In particolare $\mathcal{G}_{\alpha\alpha} = Id$ su $U_\alpha$ e $\mathcal{G}_{\alpha\beta}^{-1} = \mathcal{G}_{\beta\alpha}$ su $U_\alpha \cap U_\beta$.
Viceversa, dato un sistema di $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$, matrici invertibili $r \times r$, con coefficienti in $\mathcal{A}(U_\alpha \cap U_\beta)$ e che soddisfino la relazione di transizione precedente, possiamo definire un fascio localmente libero $\mathcal{F}$ di rango $r$ su $\mathcal{A}$ ponendo $\mathcal{F} \simeq A^r$ su ogni $U_\alpha$, con le identificazioni sugli $U_\alpha \cap U_\beta$ date dagli isomorfismi $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$. Una sezione $s$ di $\mathcal{F}$ su un aperto $V \subset X$ può essere vista come una collezione di sezioni $s_\alpha = (s_\alpha^1, ..., s_\alpha^r)$ di $\mathcal{A}^r(V \cap U_\alpha)$ che soddisfano le relazioni $s_\alpha = \mathcal{G}_{\alpha\beta} s_\beta$ su $V \cap U_\alpha \cap u_\beta$.
La nozione di fascio localmente libero è strettamente legata a quella di fibrato vettoriale, una costruzione che associa ad ogni punto di uno spazio topologico uno spazio vettoriale (di solito reale o complesso) in modo che la struttura vari con continuità. Più precisamente:

**Definizione 2.7.** Un fibrato vettoriale consiste di

1. spazi topologici $X$ (spazio di base) e $E$ (spazio totale);
2. una mappa di proiezione (continua e suriettiva) $\pi : E \to X$;
3. per ogni $x \in X$ una struttura di $k$-spazio vettoriale di dimensione finita $r$ sulla fibra $\pi^{-1}(x)$.

con la seguente condizione di compatibilità soddisfatta: per ogni punto $x_0 \in X$ esiste un intorno aperto $U$ di $x_0$ e un omeomorfismo

$$\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times k^r$$

tale che per ogni $x \in U$:

a. $p_1(\phi(x)) = x$ (dove $p_1 : U \times k^r \to U$ è la proiezione sulla prima componente):

b. $p_2 \circ \phi_{|E_x} : E_x \to k^r$ è un isomorfismo di $k$-spazi vettoriali

$U$ è chiamato aperto trivializzante. Un ricoprimento $\mathcal{U}$ di $X$ costituito da aperti trivializzanti è detto ricoprimento trivializzante.
Chiamiamo fibrato lineare un fibrato vettoriale di rango 1.

Osserviamo che un fibrato vettoriale può essere descritto tramite le *funzioni di transizione*, ossia, dato un ricoprimento trivializzante $\{U_\alpha\}$ di $X$, dalle mappe

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(r, k)$$

tali che

$$g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$$

su $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Le mappe $g_{\alpha\beta}$ sono definite dal diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} & \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[dl, "\phi_\beta"'] \arrow[dr, "\phi_\alpha"] & \\ (U_\alpha \cap U_\beta) \times k^r \arrow[rr, "(Id, g_{\alpha\beta}\cdot)"] & & (U_\alpha \cap U_\beta) \times k^r \end{tikzcd}$$

In altri termini quindi un fibrato vettoriale è il dato di un ricoprimento trivializzante $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ e di applicazioni di transizione $g_{\alpha\beta}$.
Chiamiamo *sezioni* di un fibrato vettoriale su un aperto $U$ le mappe $s : U \to E$ tali che $\pi \circ s = Id_{|U}$.
Ponendo condizioni aggiuntive sulle funzioni che definiscono un fibrato vettoriale (per esempio che siano regolari, differenziabili, olomorfe,...) si ottengono particolari tipi di fibrati vettoriali (regolari, differenziabili, olomorfi,...).
È evidente dalle definizioni date fino a qui che ci sono delle analogie tra fasci localmente liberi e fibrati vettoriali. Soffermiamoci sul caso complesso, $k = \mathbb{C}$, che è quello che più ci interessa in questo contesto.
Per descrivere la relazione tra le due nozioni assumiamo che il fascio di anelli $\mathcal{A}$ sia un sottofascio del fascio delle funzioni continue su $X$ a valori in $\mathbb{C}$, contenente il fascio delle funzioni localmente costanti. Allora per ogni $x \in X$ c'è una mappa di valutazione

$$\mathcal{A}_x \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f \mapsto f(x)$$

il cui nucleo è l'ideale massimale $m_x$ di $\mathcal{A}_x$ dei germi di funzioni che si annullano in $x$; inoltre $\mathcal{A}_x/m_x = \mathbb{C}$. Sia $\mathcal{F}$ un fascio localmente libero di rango $r$ su $\mathcal{A}$. A ogni $x \in X$ si può associare un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale $E_x = \mathcal{F}_x/m_x F_x$; poiché $\mathcal{F}_x \cong A_x^r$, si ha che $E_x \cong (A_x/m_x)^r = \mathbb{C}^r$. L'insieme $E = \sqcup_{x\in X} E_x$ è dotato di una proiezione naturale

$$\pi : E \longrightarrow X, \qquad \xi \in E_x \mapsto \pi(\xi) := x$$

e le fibre $E_x = \pi^{-1}(x)$ hanno una struttura di $\mathbb{C}$-spazio vettoriale $r$ dimensionale. Si dimostra che $E$ è proprio un fibrato vettoriale.
Viceversa, dato un fibrato vettoriale $\pi : E \to X$ e un aperto $U \subset X$, possiamo considerare l'insieme $\mathcal{F}(U)$ delle sezioni del fibrato su $U$. Non è difficile mostrare che $\mathcal{F}$ è un fascio di moduli (il fascio di anelli su cui è costruito dipende dal tipo di fibrato vettoriale che consideriamo, in generale è un sottofascio del fascio dei germi di funzioni continue). Per come è costruito $\mathcal{F}$ è sempre un fascio localmente libero di rango $r$.
In particolare se $X$ è una varietà analitica c'è un'equivalenza di categorie tra quella dei fasci di $\mathcal{H}_X$-moduli localmente liberi e quella dei fibrati vettoriali

olomorfi.
Analogamente, se $X$ è una varietà algebrica i fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli localmente liberi definiscono i fibrati vettoriali algebrici.
I fibrati vettoriali sono senz'altro strumenti utili per capire come è fatta una varietà, tuttavia lavorando con la categoria dei fasci di $\mathcal{A}$-moduli localmente liberi emerge subito una difficoltà: essa non è stabile per nucleo e conucleo, cioè Ker e Coker di un arbitrario morfismo tra fasci localmente liberi non sono in generale localmente liberi, come si vedrà con i due successivi controesempi. Questa è una delle ragioni per cui si preferisce introdurre una categoria più ampia, che risulti stabile per queste operazioni, quella dei *fasci coerenti.*

*Esempio* 3. Sia $X = \mathbb{C}$; consideriamo il morfismo

$$\phi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \qquad u(z) \mapsto zu(z).$$

Si prova che $\phi$ è un morfismo di fasci iniettivo. Nei punti diversi da 0 le spighe del Coker sono nulle, perché esiste sempre un intorno in cui la moltiplicazione per $z$ è invertibile. Invece in 0 la spiga non è nulla, per esempio perché le funzioni costanti non appartengono all'immagine (si può dimostrare in effetti che la spiga è $\mathbb{C}$), quindi il Coker non può essere un fascio localmente libero.

*Esempio* 4. Sia $X = \mathbb{C}^3$; consideriamo il morfismo

$$\phi : \mathcal{H}^3 \to \mathcal{H}, \qquad (u_1, u_2, u_3) \mapsto \sum_{1 \leq j \leq 3} z_j u_j(z_1, z_2, z_3).$$

Su $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ $\operatorname{Ker}\phi$ è localmente libero di rango 2. In effetti si può vedere che $\operatorname{Ker}\phi$ è l'$\mathcal{H}$-sottomodulo di $\mathcal{H}^3$ generato dalle tre sezioni $(-z_2, z_1, 0)$, $(-z_3, 0, z_1)$ e $(0, z_3, -z_2)$. Per ogni punto di $X$ diverso da 0 esiste un intorno nel quale l'ultima sezione può essere scritta come combinazione lineare delle altre due, che risultano invece indipendenti:

$$(0, z_3, -z_2) = \frac{z_3}{z_1}(-z_2, z_1, 0) - \frac{z_2}{z_1}(-z_3, 0, z_1).$$

In 0 invece non c'è modo di stabilire un isomorfismo tra la spiga $(\operatorname{Ker}\phi)_0$ e $\mathcal{H}_0^2$. Ne segue che $\operatorname{Ker}\phi$ non è localmente libero.

### 2.1.2 Fasci coerenti: definizioni e proprietà

Osserviamo preliminarmente che fissate delle sezioni $s_1, ..., s_p \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, a ogni famiglia $a_1, ..., a_p$ di elementi di $\mathcal{A}_x$ possiamo far corrispondere l'elemento $\sum_{i=1}^p a_i s_i(x) \in \mathcal{F}_x$. Si ottiene così un morfismo $\phi : \mathcal{A}^p(U) \to \mathcal{F}(U)$.

**Definizione 2.8.** Il nucleo $(R)(s_1, ..., s_p)$ del morfismo $\phi$ è un sottofascio di $\mathcal{A}^p(U)$ che definiamo *fascio di relazione* tra le $s_i$.

Inoltre l'immagine di $\phi$ è il sottofascio di $\mathcal{F}(U)$ generato dalle $s_i$. Viceversa ogni morfismo $\phi : \mathcal{A}^p(U) \to \mathcal{F}(U)$ definisce delle sezioni $s_1, ..., s_p$ di $\mathcal{F}$ su $U$ tramite le formule:

$$s_1(x) = \phi_x(1, 0, ..., 0), ..., s_p(x) = \phi_x(0, ..., 0, 1)$$

**Definizione 2.9.** $\mathcal{F}$ un fascio di $\mathcal{A}$-moduli $\mathcal{F}$ su uno spazio topologico $X$ si dice di *tipo finito* o localmente finitamente generato se per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto $U$ di $x$ e sezioni $s_1, ..., s_p \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ tali che per ogni $y \in U$ la spiga $\mathcal{F}_y$ è generata da $s_1(y), ..., s_p(y)$.

Se un fascio è di tipo finito, la sua restrizione a un aperto $U$ è isomorfa al quoziente di $\mathcal{A}^p(U)$ per il fascio di relazioni tra le sezioni generatrici $s_i$. La proposizione seguente garantisce che basta verificare che una spiga sia finitamente generata perché valga per un intorno:

**Proposizione 2.1.** *Sia $\mathcal{F}$ di tipo finito. Se $s_1, ..., s_p$ sono sezioni di $\mathcal{F}$ su un intorno di un punto $x \in X$ che generano $\mathcal{F}_x$ allora generano $\mathcal{F}_y$ per $y$ in un intorno di $x$.*

*Dimostrazione.* Per definizione esiste un intorno $U$ di $x$ e sezioni $t_1, ..., t_q$ che generano $\mathcal{F}_y$ per $y$ in $U$. In $\mathcal{F}_x$ si ha che $t_j(x) = \sum_i a_i(x)s_i(x)$, ma questo per definizione dei germi di una spiga, vuol dire che esiste un intorno aperto $V_j$ di $x$ su cui $t_j$ e $\sum_i a_i s_i$ sono uguali. Intersecando i $V_j$ si ha un intorno aperto $V$ di $x$ tale che se $y \in V$ $\mathcal{F}_y$ è generata da $s_1(y), ..., s_p(y)$. □

**Definizione 2.10.** Un fascio di $\mathcal{A}$-moduli $\mathcal{F}$ su uno spazio topologico $X$ è detto *coerente* se:

1. $\mathcal{F}$ è di tipo finito;
2. Se $s_1, ..., s_p$ sono sezioni di $\mathcal{F}$ su un aperto $U$, il fascio di relazioni $(R)(s_1, ..., s_p)$ è un fascio di tipo finito (sull'aperto $U$).

Come si è detto la condizione 1. significa che ogni punto $x \in X$ ha un intorno $U$ tale che ci sia un morfismo suriettivo $\phi : \mathcal{A}^p(U) \to \mathcal{F}(U)$; la condizione 2. implica invece che il nucleo di $\phi$ è localmente finito. Quindi, eventualmente restringendo $U$, il fascio $\mathcal{F}$ su $U$ ammette una presentazione finita sotto forma della sequenza esatta

$$\mathcal{A}^q(U) \xrightarrow{\psi} \mathcal{A}^p(U) \xrightarrow{\phi} \mathcal{F}(U) \to 0$$

dove $\psi$ è data da una matrice $p \times q$ $(\psi_{jk})$ di sezioni di $\mathcal{A}(U)$ le cui colonne $(\psi_{j1}), ..., (\psi_{jq})$ sono i generatori di $(R)(s_1, ..., s_p)$.
Non è detto che un sottofascio di un fascio coerente sia coerente.

*Esempio* 5. Consideriamo il fascio $\mathcal{A}$ dei germi di funzioni analitiche su una varietà complessa $\Omega$, che è un fascio coerente di anelli. Sia $\omega$ un aperto non vuoto e non denso di $\Omega$, e costruiamo il fascio $\mathcal{F}$ tale che $\mathcal{F}_z = \mathcal{A}_z$ se $z \in \omega$ e $\mathcal{F}_z = 0$ se $z \in \Omega \setminus \omega$. Si prova che $\mathcal{F}$ è un sottofascio di $\mathcal{A}$. Tuttavia una sezione su questo fascio su un aperto connesso che interseca $\Omega \setminus \omega$ deve essere 0 per il principio del prolungamento analitico. Di conseguenza $\mathcal{F}$ non è finitamente generato in nessun punto del bordo di $\omega$ (cioè $\overline{\omega} \setminus \omega$).

Vale invece la seguente

**Proposizione 2.2.** *Un sottofascio di tipo finito di un fascio coerente è coerente.*

I teoremi seguenti sono particolarmente importanti perché garantiscono che la categoria dei fasci coerenti è chiusa per passaggio a nucleo, conucleo e immagine. La dimostrazione del primo può trovare su [Serre FAC], capitolo 1 o [Demailly], capitolo 2.

**Teorema 2.3.** *Sia* $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow H \longrightarrow 0$ *una sequenza esatta di morfismi tra fasci. Se due dei tre fasci* $\mathcal{F}, \mathcal{G}, H$ *sono coerenti allora lo è anche il terzo.*

**Teorema 2.4.** *Sia* $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ *un morfismo di fasci coerenti. Allora* $\operatorname{Im}\phi$, $\operatorname{Ker}\phi$ *e* $\operatorname{Coker}\phi$ *sono coerenti.*

*Dimostrazione.* Poiché $\mathcal{F}$ è coerente, $\operatorname{Im}\phi$ è di tipo finito, quindi coerente per la proposizione 2.2. Applicando il teorema2.3 alle successioni esatte:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\phi \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \operatorname{Im}\phi \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im}\phi \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \operatorname{Coker}\phi \longrightarrow 0$$

si vede che $\operatorname{Ker}\phi$ e $\operatorname{Coker}\phi$ sono coerenti. □

Sia $Y$ un sottoinsieme chiuso, con la topologia indotta, dello spazio topologico $X$. Se $\mathcal{A}$ è un fascio di anelli su $Y$ e $\mathcal{F}$ è un fascio di $\mathcal{A}$-moduli su $Y$, chiamiamo rispettivamente $\mathcal{A}^X$ e $\mathcal{F}^X$ i fasci prolungati per 0 su tutto $X$, con la costruzione della proposizione 1.5. La proposizione seguente evidenzia che dal punto di vista della coerenza è la stessa cosa considerare un fascio $\mathcal{F}$ o l'estensione $\mathcal{F}^X$.

**Proposizione 2.5.** *1. $\mathcal{F}$ è di tipo finito su $\mathcal{A}$ se e solo se $\mathcal{F}^X$ è di tipo finito su $\mathcal{A}^X$;*

*2. $\mathcal{F}$ è $\mathcal{A}$-coerente se e solo se $\mathcal{F}^X$ è $\mathcal{A}^X$-coerente.*

Dati due fasci di $\mathcal{A}$-moduli $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ è possibile definire per tutte le spighe il prodotto tensoriale $H_x = \mathcal{F}_x \otimes_{A_x} \mathcal{G}_x$. Si dimostra che esiste un'unica struttura di fascio $H = \mathcal{F} \otimes_A \mathcal{G}$ che ha le $H_x$ come spighe e tale che se $s$ e $t$ sono sezioni su $U$ rispettivamente di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ l'applicazione $x \mapsto s(x) \otimes t(x) \in H_x$ sia una sezione di $H$ su $U$.
Va inoltre la seguente utile proposizione:

**Proposizione 2.6.** *Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono due fasci di $\mathcal{A}$-moduli coerenti, $\mathcal{F} \otimes_A \mathcal{G}$ è un fascio coerente.*

### 2.1.3 Fasci coerenti di anelli

Vedendo un fascio di anelli $\mathcal{A}$ come fascio di $\mathcal{A}$-moduli ci si può chiedere se sia coerente. In effetti $\mathcal{A}$ è senz'altro di tipo finito, quindi basta che sia soddisfatta la condizione 2. della definizione 2.10, cioè:

**Definizione 2.11.** Il fascio $\mathcal{A}$ è un fascio coerente di anelli se il fascio delle relazioni tra un numero finito di sezioni di $\mathcal{A}$ su un aperto $U$ è un fascio di tipo finito su $U$.

**Lemma 2.7.** *Sia $X = \mathbb{A}^n$. Il fascio $\mathcal{O}$ su $X$ è un fascio coerente di anelli.*

*Dimostrazione.* Siano $x \in X$, $U$ un intorno aperto di $x$, e $s_1, ..., s_p$ delle sezione di $\mathcal{O}$ su $U$; occore mostrare che il fascio di relazioni tra le $s_1, ..., s_p$ è un fascio di tipo finito su $\mathcal{O}$. Al più sostituendo $U$ con un intorno più piccolo, possiamo supporre che le $s_i$ si scrivano $s_i = P_i/Q$, dove i $P_i$ e $Q$ sono polinomi, $Q$ sempre non nullo su $U$. Siano poi $y \in U$ e $g_i \in O_y$ tali che $\sum_{i=1}^p g_i s_i = 0$ in un intorno di di $y$. Possiamo scrivere anche i $g_i$ nella forma $g_i = R_i/T$, dove gli $R_i$ e $T$ sono polinomi e $T(y) \neq 0$.
In un intorno di $y$ la relazione $\sum_{i=1}^p g_i s_i = 0$ equivale alla relazione $\sum_{i=1}^p R_i P_i = 0$. Poiché l'anello dei polinomi è noetheriano, il modulo di relazioni tra i polinomi $P_i$ è di tipo finito; di conseguenza il fascio di relazioni tra le $s_i$ è di tipo finito. □

Supponiamo ora che $V$ sia una varietà affine, che possiamo quindi considerare come una sottovarietà chiusa di $X = \mathbb{A}^n$. Per ogni $x \in X$ sia $I_x(V)$ l'ideale di $\mathcal{O}_x$ formato dagli elementi $f \in \mathcal{O}_x$ la cui restrizione a $V$ è nulla in un intorno di $x$ (di conseguenza $I_x(V) = \mathcal{O}_x$ se $x \notin V$). Gli $I_x(V)$ formano un sottofascio (o fascio di ideali) $I(V)$ del fascio $\mathcal{O}$. Vale inoltre il seguente lemma:

**Lemma 2.8.** *Il fascio $I(V)$ è un fascio coerente di $\mathcal{O}$-moduli.*

I lemmi ci permettono di concludere:

**Proposizione 2.9.** *Sia $V$ una varietà algebrica, il fascio $\mathcal{O}_V$ è un fascio coerente di anelli.*

*Dimostrazione.* Poiché il problema è locale, possiamo supporre senza perdere generalità che $V$ sia una varietà affine. Per i lemmi 2.7 e 2.8 i fasci $\mathcal{O}$ e $I(V)$ sono coerenti. Per il teorema 2.4 il fascio $\mathcal{O}/I(V)$ è un fascio coerente su $X$. Questo fascio è nullo al di fuori di $V$ e la sua restrizione a $V$ non è altro che $\mathcal{O}_V$. $\mathcal{O}_V$ è quindi un fascio coerente di anelli su $V$. □

La proposizione 2.9 riguardante il caso algebrico ha un analogo nel caso analitico. Il seguente importante risultato è dovuto al matematico giapponese Oka[1]:

**Teorema 2.10.** *Sia $X$ uno spazio analitico. Il fascio $\mathcal{H}_X$ è un fascio coerente di anelli.*

Vale inoltre, per il fascio $\mathcal{A}(Y)$ della definizione 2.5:

**Proposizione 2.11.** *Se $Y$ è un sottospazio analitico chiuso di $X$, il fascio $\mathcal{A}(Y)$ è un fascio analitico coerente.*

È evidente che se $\mathcal{A}$ è un fascio coerente di anelli allora per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}^n$ è un fascio coerente di $\mathcal{A}$-moduli. Per la proposizione 2.2 ogni suo sottofascio di tipo finito è un fascio coerente. Come conseguenza si ha la seguente proposizione, che lega i fasci localmente liberi introdotti in precedenza ai fasci coerenti:

**Proposizione 2.12.** *Sia $\mathcal{F}$ un fascio di $\mathcal{A}$-moduli localmente libero. Se $\mathcal{A}$ è un fascio di anelli localmente libero allora $\mathcal{F}$ è un fascio coerente.*

In questo caso quindi i fasci localmente liberi sono un sottoinsieme proprio dei fasci coerenti.

---

[1]Kiyoshi Oka (1950), *"Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VII. Sur quelques notions arithmétiques"*, Bulletin de la Société Mathématique de France 78: 1–27

## 2.2 Coomologia di fasci

Siano $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di $X$ indicizzato da un insieme ordinato $I$ e $\mathcal{F}$ un fascio su $X$. Se $s = (i_0, ..., i_p)$ è una successione finita di elementi di $I$ per semplificare la notazione scriveremo

$$U_s = U_{i_0...i_p} = U_{i_0} \cap ... \cap U_{i_p}.$$

Definiamo il gruppo

$$C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0<...<i_p} \mathcal{F}(U_{i_0...I_p})$$

Un elemento $\omega$ di $C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ è chiamato *$p$-cocatena su $\mathfrak{U}$ a valori nel fascio $\mathcal{F}$*; si tratta di una funzione che assegna a ogni $p+1$-intersezione[2] $U_{i_0...i_p}$ un elemento $\omega_{i_0...i_p} \in \mathcal{F}(U_{i_0...i_p})$. Scriveremo

$$\omega = (\omega_{i_0...i_p}),$$

dove gli indici $i_0...i_p$ variano al variare degli elementi di $I$ tali che $i_0 < ... < i_p$. Definiamo l'*operatore di cobordo di Cech*:

$$\delta = \delta_p : C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

come somma alternante

$$(\delta\omega)_{i_0...i_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \omega_{i_0...\hat{i}_j...i_{p+1}},$$

dove, a destra dell'uguale, con abuso di notazione indichiamo con $\omega_{i_0...\hat{i}_j...i_{p+1}}$ la sua restrizione da $U_{i_0...\hat{i}_j...i_{p+1}}$ a $U_{i_0...i_{p+1}}$.
Abbiamo adottato la convenzione di porer gli indici di $\omega_{i_0...i_{p+1}}$ in ordine strettamente crescente. Più in generale possiamo ammettere indici ordinati in qualsiasi modo, subordinatamente alla convenzione che quando due indici sono scambiati la componente della cocatena diventa il suo negativo:

$$\omega_{...\alpha...\beta...} = -\omega...\beta...\alpha...$$

In particolare una componente $\omega_{...\alpha...\alpha...}$ con indice ripetuto è 0.

**Proposizione 2.13.** *Se $\delta$ è l'operatore di Cech di cobordo, allora $\delta^2 = 0$.*

[2]Chiamiamo $n$-intersezione l'intersezione di $n$ aperti *distinti* del ricoprimento di indici $i_0, ..., i_{n-1}$. Per convenzione poniamo l'intersezione uguale al vuoto se uno degli indici si ripete.

*Dimostrazione.* L'enunciato è vero perché in $(\delta^2\omega)_{i_0\ldots i_{p+2}}$ omettiamo due indici $i_j$, $i_k$ due volte con segno opposto. Più precisamente:

$$\begin{aligned}(\delta\omega)_{i_0\ldots i_{p+2}} =& \sum(-1)^k(\delta\omega)_{i_0\ldots\hat{i}_k\ldots i_{p+2}} \\ =& \sum_{j<k}(-1)^k(-1)^j(\delta\omega)_{i_0\ldots\hat{i}_j\ldots\hat{i}_k\ldots i_{p+2}} \\ &+ \sum_{k<j}(-1)^k(-1)^{j-1}(\delta\omega)_{i_0\ldots\hat{i}_k\ldots\hat{i}_j\ldots i_{p+2}} \\ =& 0.\end{aligned}$$

□

Da questa proposizione segue il fatto che $C(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) := \bigoplus_{p=0}^{\infty} C^p(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ è un complesso di catene con operatore di cobordo $\delta$. Infatti si può estendere $p$ a tutti gli interi ponendo $C^p(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) = 0$ per $p < 0$. La coomologia del complesso $(C(\mathfrak{U},\mathfrak{F}),\delta)$

$$H^p(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) = \frac{\operatorname{Ker}\delta_p}{\operatorname{Im}\delta_{p-1}} = \frac{p\text{-cocicli}}{p\text{-cobordi}}$$

è chiamata *coomologia di Cech* (o talvolta coomologia di fasci) del ricoprimento aperto $\mathfrak{U}$ a valori nel fascio $\mathfrak{F}$.

Un ricoprimento $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ di uno spazio topologico $X$ è detto *più fine* di un altro ricoprimento $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ se esiste un'applicazione $\tau : J \to I$ tale che $V_j \subset U_{\tau(j)}$ per ogni $j \in J$. Scriviamo $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V}$ per dire che $\mathfrak{U}$ è raffinato da $\mathfrak{V}$. La relazione di raffinamento $\prec$ fa dell'insieme di tutti i ricoprimenti aperti un *diretto*. Si dimostra che l'applicazione $\tau$ induce un omomorfismo tra i complessi di catene $C(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ e $C(\mathfrak{V},\mathfrak{F})$, che commuta con l'operatore di cobordo $\delta$ e quindi induce un omorfismo $\tau^* : H^p(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \to H^p(\mathfrak{V},\mathfrak{F})$, che inoltre non dipende dall'applicazione $\tau$ scelta ma solo dai ricoprimenti[3].

È quindi ben definito il limite diretto

$$H(X,\mathfrak{F}) := \varinjlim_{\mathfrak{U}} H(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$$

che chiamiamo coomologia di Cech dello spazio topologico $X$ a valori nel fascio $\mathfrak{F}$.

**Proposizione 2.14.** *Dato un fascio $\mathfrak{F}$ su una varietà algebrica $X$ si ha che per ogni ricoprimento $\mathfrak{U}$ vale*

$$H^0(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) = \Gamma(X,\mathfrak{F}).$$

*Ne segue che $H^0(X,\mathfrak{F}) = \Gamma(X,\mathfrak{F})$.*

---

[3] Per maggiori dettagli si può vedere [Bott-Tu], capitolo 2.

*Dimostrazione.* Osserviamo che le condizioni che un prefascio $\mathcal{F}$ su $X$ deve soddisfare per essere un fascio (proposizione 1.3) equivalgono a chiedere che per ogni aperto $U \subset X$ e ogni ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di $U$ sia esatta la sequenza

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\rho} \prod_i \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{\delta} \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

In particolare, se $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ è un ricoprimento di $X$, nei termini delle cocatene di Cech la sequenza assume la forma:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\rho} C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

Dall'esattezza della sequenza segue che

$$H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \operatorname{Ker} \delta = \operatorname{Im} \rho \cong \mathcal{F}(X)$$

Poiché questo vale per tutti i ricoprimenti, facendo il limite diretto possiamo concludere che

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X) = \Gamma(X, \mathcal{F})$$

□

Data una successione esatta corta di fasci su uno spazio topologico $X$ è naturale chiedersi che cosa succeda passando ai gruppi di coomologia. La proposizione seguente[4] sarà utile lavorando con gli spazi analitici.

**Proposizione 2.15.** *Sia $X$ uno spazio topologico* paracompatto[5]. *Consideriamo una successione esatta corta di fasci*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B} \xrightarrow{\beta} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

*Esiste allora un omomorfimo $d$ che rende esatta la successione lunga indotta in coomologia:*

$$\cdots \longrightarrow H^q(X, \mathcal{B}) \xrightarrow{\beta^*} H^q(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{d} H^{q+1}(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{\alpha^*} H^{q+1}(X, \mathcal{B}) \longrightarrow \cdots$$

[4] Per la dimostrazione si veda [Serre FAC], capitolo 1

[5] Uno spazio topologico $X$ si dice paracompatto se è di Hausdorff e ogni ricoprimento aperto di $X$ ammette un raffinamento aperto *localmente finito*, cioè in cui ogni punto ammette un intorno che ha intersezione non vuota con al più un numero finito di insiemi del raffinamento.

Le varietà algebriche però non sono spazi paracompatti perché non sono di Haudorff. Aggiungendo una condizione si può comunque provare[6] un risultato analogo:

**Proposizione 2.16.** *Sia $X$ una varietà algebrica. Consideriamo una successione esatta corta di fasci*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B} \xrightarrow{\beta} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

dove $\mathcal{A}$ è un fascio algebrico coerente.
*Esiste allora un omomorfimo $d$ che rende esatta la successione lunga indotta in coomologia:*

$$\cdots \longrightarrow H^q(X,\mathcal{B}) \xrightarrow{\beta^*} H^q(X,\mathcal{C}) \xrightarrow{d} H^{q+1}(X,\mathcal{A}) \xrightarrow{\alpha^*} H^{q+1}(X,\mathcal{B}) \longrightarrow \cdots$$

Abbiamo già visto in precedenza (proposizione 1.5) che se $Y$ è una sottovarietà algebrica di una varietà algebrica $X$ e $\mathcal{F}$ è un fascio concentrato su $Y$ allora $\Gamma(X,\mathcal{F}) = H^0(X,\mathcal{F})$ è isomorfo a $\Gamma(Y,\mathcal{F}(Y)) = H^0(Y,\mathcal{F}(Y))$. Questo risultato è generalizzabile a tutti gli $H^q$.

**Proposizione 2.17.** *Sia $Y$ chiuso in $X$ e $\mathcal{F}$ un fascio su $X$ nullo al di fuori di $Y$. Allora, per ogni $q \geq 0$, $H^q(X,\mathcal{F})$ è isomorfo a $H^q(Y,\mathcal{F}(Y))$.*

*Dimostrazione.* La proposizione risulta dai due fatti seguenti:

1. Se $\mathfrak{U}$ è un ricoprimento aperto di $X$ basta intersecare i suoi aperti con $Y$ per ottenere un ricoprimento aperto $\mathfrak{U}'$ di $Y$. Inoltre ogni ricoprimento aperto $\{W_i\}$ di $Y$ può essere esteso in un ricoprimento aperto $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ di $X$ ed è quindi della forma $\mathfrak{U}'$. Infatti, poiché $Y$ è chiuso, basta porre $U_i = W_i \cup (X \setminus Y)$.

2. Per ogni ricoprimento $\mathfrak{U}$ di $X$ la restrizione $\rho : C(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to C(\mathfrak{U}',\mathcal{F}(Y))$ è biunivoca. Questo risulta dalla proposizione 1.4 applicata a $U_{i_0\ldots i_q}$ e al fascio $\mathcal{F}$.

$\square$

In altri termini, se $\mathcal{G}$ è un fascio su $Y$ e $\mathcal{F} = \mathcal{G}^X$ è il fascio ottenuto prolungandolo per 0, si ha che $H^q(Y,\mathcal{G}) = H^q(X,\mathcal{G}^X)$ per tutti i $q \geq 0$, cioè l'identificazione di $\mathcal{G}$ con $\mathcal{G}^X$ è compatibile con il passaggio alla coomologia.

[6] Per la dimostrazione di questa proposizione, che si può trovare su [Serre FAC], capitolo 2, è importante il concetto di buon ricoprimento che sarà introdotto nella sezione seguente.

### 2.2.1 Buon ricoprimento

Abbiamo definito la coomologia di uno spazio topologico $X$ rispetto a un fascio $\mathcal{F}$ come limite diretto delle coomologie dei ricoprimenti. Questa definizione, per quanto formalmente corretta, non permette di capire chiaramente come siano fatti i vari $H^q(X, \mathcal{F})$. Il prossimo passo sarà quindi quello di cercare dei particolari ricoprimenti $\mathfrak{U}$ tali che $H(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ sia isomorfa a $H(X, \mathcal{F})$, in modo da poter computare i gruppi di coomologia senza usare la procedura del limite diretto.

**Definizione 2.12.** Siano $X$ uno spazio topologico e $\mathcal{F}$ un fascio su $X$. Sia poi $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ un ricoprimento aperto numerabile di $X$. $\mathfrak{U}$ è detto un *buon ricoprimento* di $X$ rispetto al fascio $\mathcal{F}$ se

$$H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong H^q(X, \mathcal{F}), \qquad \forall q, \ q \in \mathbb{Z}$$

**Definizione 2.13.** Siano $X$ uno spazio topologico, $\mathcal{F}$ un fascio su $X$ e $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ un ricoprimento aperto di $X$. Diciamo che $\mathfrak{U}$ è *aciclico* rispetto a $\mathcal{F}$ se

$$H^q(U_{i_0 \dots i_p}, \mathcal{F}) = 0$$

per ogni insieme di indici $i_0, ..., i_p$ e per ogni $q \geq 1$.

Il teorema seguente, dovuto al matematico francese Jean Leray, lega in maniera profonda le due definizioni[7]

**Teorema 2.18.** *Siano $\mathcal{F}$ un fascio su uno spazio topologico $X$ e $\mathfrak{U}$ un ricoprimento aperto numerabile di $X$. Se $\mathfrak{U}$ è aciclico rispetto a $\mathcal{F}$, allora*

$$H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong H^q(X, \mathcal{F}), \qquad \forall q, \ q \in \mathbb{Z},$$

*cioè $\mathfrak{U}$ è un buon ricoprimento rispetto a $\mathcal{F}$.*

### 2.2.2 Varietà algebriche e fasci coerenti

In questa sezione analizzeremo alcuni risultati sui fasci su una varietà algebrica $X$, e sulla loro coomologia, con particolare riferimento al caso affine. Le dimostrazioni non riportate si possono trovare su [Serre FAC] (lo stesso varrà anche per la sezione successiva).

**Proposizione 2.19.** *I gruppi di coomologia $H^q(X, \mathcal{F})$ sono moduli su $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ e spazi vettoriali sul campo $k$.*

[7] Si veda [Demailly], capitolo 5 o [Grauert-Remmert], capitolo B.

Come conseguenza della proposizione 2.17, se $Y$ è una sottovarietà chiusa di $X$ tutti i fasci algebrici coerenti su $Y$ possono essere identificati a fasci algebrici coerenti su $X$, mantenendo inalterati i gruppi di coomologia. In particolare utti i fasci algebrici coerenti su una varietà affine (o proiettiva) possono essere considerati come fasci algebrici coerenti sullo spazio affine (o proiettivo). Sarà quindi possibile, se la situazione lo richiede, limitarsi a considerare i fasci algebrici coerenti sullo spazio affine (o proiettivo).
Il seguente importante risultato garantisce che la coomologia di grado maggior di 0 è sempre nulla per un fascio algebrico coerente su una varietà affine. Questo ci permette ci concludere che possiamo usare gli aperti affini per costruire dei buoni ricoprimenti.

**Teorema 2.20.** *Sia $X$ una varietà affine e $\mathcal{F}$ un fascio algebrico coerente su $X$. Si ha che per ogni $q > 0$*

$$H^q(X, \mathcal{F}) = 0$$

Da ciò segue:

**Proposizione 2.21.** *Sia $X$ una varietà algebrica. Un ricoprimento numerabile $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ di $X$ formato da aperti affini è un buon ricoprimento rispetto a qualsiasi fascio algebrico coerente $\mathcal{F}$ su $X$.*

*Dimostrazione.* L'intersezione di varietà affini è una varietà affine. Per il teorema 2.20 si ha quindi che $H^q(U_{i_0 \dots i_q}) = 0$ per ogni $q > 0$, cioè $\mathfrak{U}$ è aciclico. Di conseguenza, per il teorema 2.18, $\mathfrak{U}$ è un buon ricoprimento rispetto a $\mathcal{F}$. □

Il teorema seguente permette di affermare che, nel caso di una varietà affine, le sezioni globali generano tutte le spighe.

**Teorema 2.22.** *Sia $\mathcal{F}$ un fascio algebrico coerente su una varietà affine $X$. Per ogni $x \in X$ l'$\mathcal{O}_x$-modulo $\mathcal{F}_x$ è generato dagli elementi di $\Gamma(X, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{F})$.*

Dal teorema segue che

**Proposizione 2.23.** *Il fascio $\mathcal{F}$ è isomorfo a un fascio quoziente di un fascio $\mathcal{O}^p$.*

*Dimostrazione.* Poiché $\mathcal{F}$ è di tipo finito ogni $\mathcal{F}_x$ deve essere generato da un numero finito di sezioni globali $s_1, \dots, s_q$. Per la proposizione 2.1, esiste un intorno $U_x$ di $x$ tale che $s_1, .., s_q$ generano anche $\mathcal{F}_y$ per $y \in U_x$. Gli $U_x$ ricoprono $X$, poiché $X$ è quasi compatto si può estrarre un ricoprimento finito $\{U_1, \dots, U_m\}$. L'insieme delle sezioni globali $s_1^1, \dots, s_{q_1}^1, s_1^2, \dots, s_{q_2}^2, \dots, s_1^m, \dots, s_{q_m}^m$ è senz'altro un insieme finito di generatori per una qualsiasi spiga. □

### 2.2.3 Varietà proiettive e fasci coerenti

Il teorema 2.20 si applica al caso dello spazio proiettivo $\mathbb{P}_n(k)$, con il solito ricoprimento $\mathfrak{U} = \{U_i\}$, dove $U_i = \{(x_0, ..., x_n) | x_i \neq 0\}$. Ogni $U_i$ infatti è un aperto affine perché isomorfo a $k^n$. Di conseguenza:

**Proposizione 2.24.** *Se $\mathcal{F}$ è un fascio algebrico coerente su $\mathbb{P}_n(k)$, l'omomorfismo $\sigma(\mathfrak{U}) : H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^q(\mathbb{P}_n(k), \mathcal{F})$ è biunivoco per tutti i $q \geq 0$.*

Poiché $\mathfrak{U}$ è formato da $n+1$ aperti affini, vale anche:

**Corollario 2.25.** $H^q(\mathbb{P}_n(k), \mathcal{F}) = 0$ *per* $q > r$

Questo risultato può essere generalizzato:

**Proposizione 2.26.** *Sia $X$ una varietà proiettiva e $\mathcal{F}$ un fascio algebrico coerente su di essa. Si ha che $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ per $q \geq \dim X$.*

Vediamo ora come costruire, a partire da un fascio $\mathcal{F}$, altri fasci, diversi ma localmente isomorfi. Questa costruzione sarà utile per le dimostrazioni dei teoremi del capitolo 3.
Sia $\mathcal{F}$ un fascio algebrico su $\mathbb{P}_n(k)$. Sia $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}(U_i)$ la restrizione di $\mathcal{F}$ a $U_i$, per un intero $r$ qualunque sia $\theta_{ij}$ l'isomorfismo di $\mathcal{F}_j(U_i \cap U_j)$ su $\mathcal{F}_i(U_i \cap U_j)$, definito dalla moltiplicazione per la funzione $x_j^r / x_i^r$. L'isomorfismo è effettivamente ben definito perché $x_j / x_i$ è una funzione regolare su $U_i \cap U_j$ a valori in $k^*$. Si ha inoltre che $\theta_{ij}(r) \circ \theta jk = \theta ik$ su tutti i punti di $U_i \cap U_j \cap U_k$. È quindi possibile applicare la proposizione 1.11 e "incollare" gli $\mathcal{F}_i$ tramite gli isomorfismi $\theta_{ij}$, ottenendo un nuovo fascio che chiameremo $\mathcal{F}(r)$.
Ci sono isomorfismi canonici: $\mathcal{F}(0) \cong \mathcal{F}$, $\mathcal{F}(r)(s) \cong \mathcal{F}(r+s)$. Inoltre si prova che $\mathcal{F}(r)$ è coerente se $\mathcal{F}$ lo è. Da tutto ciò segue in particolare che

**Proposizione 2.27.** *Data una successione esatta $\mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}''$ di fasci algebrici anche la successione*

$$\mathcal{F}(r) \to \mathcal{F}'(r) \to \mathcal{F}''(r)$$

*è esatta per ogni $r \in \mathbb{Z}$.*

Si può applicare quanto appena descritto al fascio $\mathcal{O}$, ottenendo i fasci $\mathcal{O}(r)$, di cui si diamo ora anche un'altra descrizione equivalente, utile per capire come sono fatti.
Sia $U$ è un aperto di $\mathbb{P}_n(k)$, siano $\mathcal{A}_U = \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{O})$ l'insieme delle funzioni omogenee su $U$ e $\mathcal{A}_U^r$ il sottoinsieme di quelle di grado $r$ (cioè che verificano

l'identità $f(\lambda y) = \lambda^r f(y)$ per $\lambda \in k^*$). Gli $\mathcal{A}_U^r$ sono degli $\mathcal{A}_U^0$-moduli, si prova che originano dei fasci algebrici e che si tratta proprio degli $\mathcal{O}(r)$.
Un elemento di una spiga $\mathcal{O}(r)_x$ può essere identificato a una frazione razionale $P/Q$, con $P$ e $Q$ polinomi omogenenei tali che $Q(x) \neq 0$ e che $\deg P - \deg Q = r$.
Infine si ha che per tutti i fasci algebrici $\mathcal{F}$, i fasci $\mathcal{F}(r)$ e $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(r)$ sono isomorfi.
Osserviamo che $\mathcal{O}(r)$, essendo localmente isomorfo a $\mathcal{O}$, è anche un fascio localmente libero. Al variare di $r$ si ottengono quindi differenti fibrati vettoriali di rango 1 su $\mathbb{P}_n(k)$.
Un risultato interessante, che in un certo senso generalizza per lo spazio proiettivo il teorema 2.22 riguardante le varietà affini, è il seguente:

**Teorema 2.28.** *Sia $\mathcal{F}$ un fascio algebrico coerente su $X = \mathbb{P}_n(k)$. Esiste un intero $R$ tale che per ogni $r \geq R$ e ogni $x \in X$ l'$\mathcal{O}_x$-modulo $\mathcal{F}(r)_x$ sia generato dagli elementi di $\Gamma(X, \mathcal{F}(r))$.*

Ne segue l'importante proposizione:

**Proposizione 2.29.** *Ogni fascio algebrico coerente $\mathcal{F}$ su $\mathbb{P}_r(k)$ è isomorfo a un fascio quoziente di un fascio $\mathcal{O}(s)^p$, per $s, p$ interi opportuni.*

*Dimostrazione.* Per il teorema esiste un intero $r$ tale che, per ogni $x \in X$, $\mathcal{F}(r)_x$ sia generato dagli elementi di $\Gamma(X, \mathcal{F}(r))$. Per la quasi compattezza di $X$ con una dimostrazione analoga a quella della proposizione 2.23 si ottiene quindi che $\mathcal{F}(r)$ è isomorfo a un fascio quoziente del fascio $\mathcal{O}^p$, per un opportuno $p \geq 0$. Di conseguenza $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}(r)(-r)$ è isomorfo a un fascio quoziente di $\mathcal{O}(-r)^p \cong \mathcal{O}^p(-r)$. Per concludere la dimostrazione basta porre $s = -r$. $\square$

Si ha inoltre il seguente risultato:

**Proposizione 2.30.** *Sia $\mathcal{F}$ un fascio algebrico coerente su $\mathbb{P}_n(k)$. Si ha $H^q(X, \mathcal{F}(r)) = 0$ per $q > 0$ e $r$ abbastanza grande.*

E, solo per il caso di $X = \mathbb{P}_n(k)$:

**Proposizione 2.31.** *$H^q(\mathbb{P}_n(k), \mathcal{O}) = 0$ per $q > 0$.*

Quest'ultima proposizione non vale in generale per una varietà proiettiva. Per esempio, per $X = \{f = 0\}$, con $f$ polinomio omogeneo in 3 variabili di grado $d \geq 3$, si ha che $\dim H^1(X, \mathcal{O}) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$.[8]

---

[8] La dimensione è uguale al *genere aritmetico* della curva.

# Capitolo 3

# Geometria algebrica e geometria analitica

## 3.1 Varietà algebriche e spazi analitici associati

Data una varietà algebrica sul campo $\mathbb{C}$ ci si può chiedere se la si possa vedere come spazio analitico e quali relazioni possano intercorrere tra il fascio dei germi di funzioni regolari e un eventuale fascio di germi di funzioni analitiche. Mostreremo che qualsiasi varietà algebrica complessa ha una struttura naturale di spazio analitico.
Per chiarezza i termini che si riferiscono alla topologia di Zariski di una varietà saranno preceduti da una Z (Z-chiuso, Z-densità, Z-isomorfismo, etc...), mentre per la topologia sullo spazio analitico associato si utilizzerà il lessico normale.

**Lemma 3.1.**
1. *La Z-topologia di $\mathbb{C}^n$ è meno fine della topologia standard;*
2. *ogni sottoinsieme Z-localmente chiuso di $\mathbb{C}^n$ è analitico;*
3. *se $U \subset \mathbb{C}^n$ e $V \subset \mathbb{C}^m$ sono due sottoinsiemi Z-localmente chiusi e $f : U \to V$ è regolare, allora $f$ è anche olomorfa;*
4. *nelle ipotesi di 3. se supponiamo inoltre che $f$ sia un isomorfismo regolare allora è anche un isomorfismo analitico.*

*Dimostrazione.* Per definizione un Z-chiuso di $\mathbb{C}^n$ è definito come luogo degli zeri di un certo numero di polinomi (funzioni continue per la topologia standard) e quindi è un chiuso per la topologia standard, ciò prova 1.

Se $U$ è Z-localmente chiuso ogni suo punto $x$ ha un intorno $\mathcal{A}$ Z-aperto tale che $\mathcal{A} \cap U$ è un Z-chiuso di $\mathcal{A}$, cioè è il luogo degli zeri di polinomi definiti su $\mathcal{A}$. Poiché i polinomi sono funzioni olomorfe $U$ rispetta la definizione di insieme analitico e si è quindi provata 2.
3. Visti 1. e 2. si tratta di capire se $\phi \in \mathcal{H}_V \Rightarrow \phi \circ f \in \mathcal{H}_U$. In effetti localmente $f$, in quanto funzione regolare, può essere vista come un'applicazione che a un punto $(x_1, ..., x_n)$ associa $(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n)$, con gli $f_i$ funzioni polinomiale. La composizione con $\phi$ resta quindi una funzione olomorfa.
La 4. è una conseguenza immediata della 3. applicata a $f^{-1}$. □

**Teorema 3.2.** *Sia $X$ una varietà algebrica sul campo $\mathbb{C}$. Esiste su $X$ una struttura di spazio analitico tale che per ogni carta algebrica $\phi : V \to U$ l'insieme Z-aperto $V$ sia aperto e $\phi$ sia un isomorfismo analitico di $V$ (con la struttura analitica indotta da quella di $X$) su $U$ (con la struttura analitica derivante dalla definizione 1.27). Chiamiamo $X^h$ l'insieme $X$ munito della struttura analitica, $\mathcal{H}_X$ il fascio ad esso associato.*

*Dimostrazione.* Sia $X$ una varietà algebrica sul campo $\mathbb{C}$. Allora $X$ può essere ricoperta da un numero finito di aperti affini $V_i$, Z-isomorfi (e quindi isomorfi) a sottoinsiemi $U$ localmente chiusi di $\mathbb{C}^n$. Il punto 2. del lemma 3.1 garantisce che essi siano insiemi analitici. Se $\phi_i : V_i \to U_i$ è una carta, la struttura analitica di $U$ può essere riportata su $V$ tramite $\phi_i^{-1}$ e se $\psi : V' \to U'$ è un'altra carta il punto 4. del lemma 3.1 garantisce che le struttura analitiche indotte su $V_i \cap V'$ (aperto per il punto 1. dello stesso lemma) siano uguali. Per incollamento si ottiene quindi su $X$ una topologia $\mathbf{h}$ e un fascio $\mathcal{H}_X$ che rispettano (H1) (della definizione 1.29).
Resta da provare che vale (H2). Chiamiamo $X^h$ lo spazio topologico $X$ con la nuova topologia. Per far vedere che $X^h$ è Hausdorff basta mostrare che la diagonale $\Delta = \{(x, x) \in X^h \times X^h\}$ è un chiuso nello spazio $X^h \times X^h$ con l'usuale topologia prodotto $\mathbf{h} \times \mathbf{h}$. Chiaramente se per ogni $i, j$ $V_{ij} = \Delta \cap (V_i \times V_j)$ è un chiuso (della topologia standard o di $\mathbf{h}$, visto che sugli aperti $V_i$ coincidono) allora anche $\Delta$ è chiusa in $\mathbf{h}$ (la si può scrivere come unione finita di chiusi). Ricordiamo che poiché $X$ è una varietà algebrica vale l'assioma (V2): la diagonale $\Delta$ di $X \times X$ è chiusa nella topologia di $X \times X$. La condizione equivale a affermare che per ogni coppia $(i, j)$ $(V_i)$ l'insieme $I_{ij} = \{(\phi_i(x), \phi_j(x)) | x \in V_i \cap V_j\}$ è Z-chiuso in $U_i \cap U_j$. Di conseguenza è chiuso in $U_i \cap U_j$ con la topologia standard, inoltre $I_{ij}$ è omeomorfo a $V_{ij}$, che quindi a sua volta è chiuso in $X^h \times X^h$. Si può quindi concludere che $X^h$ è Hausdorff. □

Riassumendo, a una varietà algebrica $X$, con il suo fascio delle funzioni regolari $\mathcal{O}_X$, è possibile assegnare una struttura analitica con un fascio di funzioni olomorfe $\mathcal{H}_X$ tale che:

1. per ogni Z-aperto $U \subset X$,
$$\mathcal{O}_X(U) \subset \mathcal{H}_X(U)$$
2. tutti i morfismi regolari $f : X \to Y$ sono olomorfi, cioè $f^*$ porta sezioni di $\mathcal{H}_Y$ in sezioni di $\mathcal{H}_X$

Inoltre, poiché come si è visto $X^h$ può essere ricoperto da un numero *finito* di aperti che possiedono delle carte è uno spazio localmente compatto. Se $X$ e $Y$ sono due varietà algebriche si ha che $(X \times Y)^h = X^h \times Y^h$. Se $Y$ è un sottoinsieme Z-localmente chiuso di $X$ allora $Y^h$ è un sottoinsieme analitico di $X^h$ e, per di più, la struttura analitica di $Y^h$ coincide con la struttura analitica indotta da $Y$ su $X^h$.

Il prossimo passo è quello di confrontare, fissato un punto $x \in X$ l'anello locale $\mathcal{O}_x$ delle funzioni regolari su $X$ in $x$ con l'anello locale $\mathcal{H}_x$ delle funzioni olomorfe su $X^h$ in un intorno di $x$. Poiché ogni funzione regolare è olomorfa, ogni $f \in \mathcal{O}_x$ definisce un germe di funzione olomorfa in $x$, che indicheremo con $\theta(f)$. L'applicazione $\theta : \mathcal{O}_x \to \mathcal{H}_x$ è un omomorfismo di anelli e manda l'ideale massimale $m$ di $\mathcal{O}_x$ in quello di $\mathcal{H}_x$. Se consideriamo i *completamenti*[1] e l'omomorfismo indotto, abbiamo il seguente risultato:

**Proposizione 3.3.** *L'omomorfismo $\widehat{\theta} : \widehat{\mathcal{O}}_x \to \widehat{\mathcal{H}}_x$ è un isomorfismo di anelli.*

Tenendo conto del fatto che un anello locale noetheriano e il suo completato hanno la stessa dimensione [2], si ha come conseguenza:

**Corollario 3.4.**
1. *Gli anelli $\mathcal{O}_x$ e $\mathcal{H}_x$ hanno la stessa dimensione;*
2. *Se $X$ è una varietà algebrica irriducibile di dimensione $r$, lo spazio analitico $X^h$ ha dimensione analitica $r$ in ciascuno dei suoi punti.*

Abbiamo appena visto che ci sono alcune analogie tra le proprietà delle varietà algebriche e quelle degli spazi analitici, in particolare per quanto riguarda questioni dimensionali; tra poco analizzeremo altri esempi di proprietà delle varietà algebriche che hanno un'esatta traduzione nel passaggio

[1] Il completamento di $\mathcal{O}_x$ è l'anello graduato $\widehat{\mathcal{O}}_x = \varprojlim_k (\mathcal{O}_x/m_x^k)$; analogamente per $\mathcal{H}_x$. Per una trattazione più approfondita del completamento si veda [Atiyah-MacDonald], capitolo 10.

[2] Si veda per esempio [Atiyah-MacDonald], capitolo 12

allo spazio analitico. Prima di procedere però vale la pena di insistere sul fatto che varietà algebriche e spazi analitici non sono la stessa cosa, anzi vi sono tra loro differenze profonde. Consideriamo per esempio il concetto di isomorfismo locale. Siano $X$ e $Y$ due varietà algebriche e $X^h$, $Y^h$ gli spazi analitici ad esse associati. Sia poi $f : X \to Y$ un morfismo regolare che si può vedere anche come un morfismo analitico $f^h : X^h \to Y^h$. Se quest'ultimo è un isomorfismo locale non è detto che lo sia anche l'altro.

*Esempio* 6. Consideriamo la varietà algebrica $\mathbb{C}^\times$, che ha chiaramente anche una struttura analitica, e il morfismo

$$f : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times, \qquad z \mapsto z^2$$

che ha senso sia da un punto di vista algebrico che analitico. È ben noto che analiticamente $f$ è un isomorfismo locale, basta prendere come intorno di ogni punto un disco sufficientemente piccolo e fissare come inversa una delle due accezioni della radice. Algebricamente il discorso è ben diverso, il problema principale è che non esiste la possibilità di prendere intorni "sufficientemente piccoli". In effetti gli aperti di $\mathbb{C}^\times$ per la topologia di Zariski sono del tipo $\mathbb{C}^\times \setminus \{z_1, ..., z_n\}$, perché gli unici chiusi sono le unioni finite di punti. Di conseguenza, fissato un punto $z \in \mathbb{C}^\times$ e un intorno $U = \mathbb{C}^\times \setminus \{z_1, ..., z_n\}$, basta prendere un punto $y$ tale che nè $y$ nè $-y$ appartengano a $\{z_1, ..., z_n\}$ per mostrare che $f_{|U}$ non è iniettiva.

Occorre quindi prestare molta attenzione al fatto che non tutti i concetti familiari della geometria differenziale o analitica possono essere trasferiti alla geometria algebrica. La mancata corrispondenza algebrica per gli isomorfismi locali analitici ha conseguenza profonde: un pilastro della geometria differenziale e analitica quale il teorema della funzione implicita è falso nel caso algebrico. Il teorema della funzione implicita afferma che date $k$ funzioni differenziabili (o analitiche) $f_1, ..., f_k$ vicino a un punto $x \in \mathbb{R}^{n+k}$ (o $\mathbb{C}^{n+k}$ tali che

$$\det_{1 \le i,j \le k}\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right) \neq 0$$

allora la restrizione della proiezione

$$\begin{aligned} \{\text{Luogo degli zeri di } f_1, ..., f_k\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (\text{risp. } \mathbb{C}^n) \\ (x_1, ..., x_{n+k}) &\longmapsto (x_{k+1}, ..., x_{k+n}) \end{aligned}$$

è localmente un isomorfismo in un intorno di $x$.

L'esempio che segue, simile al precedente, mostra come ciò non valga in un contesto algebrico.

*Esempio* 7. Consideriamo la proiezione

$$p : \mathbf{V}(x_1^2 - x_2) \subset \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^1, \qquad (x_1, x_2) \mapsto x_2$$

In $x = (1, 1)$, $\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1^2 - x_2) = 2x_1$ non è 0, ma la proiezione non è iniettiva in nessuno degli aperti di Zariski $U$ di $\mathbf{V}(x_1^2 - x_2)$, perché per tutti i valori di $a$, tranne un numero finito, essi contengono sia $(\sqrt{a}, a)$ sia $(-\sqrt{a}, a)$.

È possibile definire (ma non approfondiremo questo argomento) dei morfismi, chiamati *étales* che siano "isomorfismi locali" sia in un senso analitico, sia in un senso algebrico. La costruzione sfrutta il fatto che per quanto le spighe dei fasci $\mathcal{O}$ e $\mathcal{H}$ siano diverse i loro completati sono uguali. Sotto determinate condizioni aggiuntive si ha infatti che se $f : X \to Y$ è un morfismo di varietà algebriche complesse tale che $f^h : X^h \to Y^h$ è un isomorfismo locale, allora $\widehat{f_x^*} : \widehat{\mathcal{O}}_y \to \widehat{\mathcal{O}}_x$ è un isomorfismo e $f$ è étale.[3]

### 3.1.1 Prime corrispondenze GAGA

Dopo aver sottolineato che non esiste un'equivalenza di categorie tra varietà algebriche e spazi analitici possiamo però porre in rilievo come per molti concetti esista un "dizionario" che permette di passare da un contesto ad un altro.
Iniziamo confrontando Z-densità e densità, Z-aderenza e aderenza dei sottoinsiemi di una varietà $X$ e dello spazio analitico associato $X^h$. La proposizione seguente servirà spesso da lemma per altri risultati che confrontano le topologie di $X$ e $X^h$:

**Proposizione 3.5.** *Sia $X$ una varietà algebrica e $U$ un sottoinsieme di $X$. Se $U$ è Z-aperto e Z-denso in $X$ allora $U$ è denso in $X^h$.*

*Dimostrazione.* $Y = X \setminus U$ è uno Z-chiuso. Supponiamo ci sia un punto $x \in Y$ che non appartiene alla chiusura $\overline{U}$. Ne segue che, in un intorno di $x$, $Y = X$ e quindi il nucleo $\mathcal{A}_x(Y)$ della restrizione di $\mathcal{H}_{x,X}$ a $\mathcal{H}_{x,Y}$ è 0. $\mathcal{A}_x(Y)$ contiene $\theta(I_x(Y))$, che è quindi anch'esso nulllo. Poiché $\theta$ è iniettiva $I_x(Y) = 0$. Questo significa che $Y = X$ in uno Z-intorno di $X$, ma questo contraddice l'ipotesi che $U$ sia Z-denso. □

Prima della proposizione sulla chiusura riportiamo un lemma dovuto al matematico francese Claude Chevalley[4]:

[3]Si veda per esempio [Mumford], capitolo 3, paragrafo 5.
[4]Si veda: H. Cartan e C. Chevalley, Séminaire E.N.S. 1955-1956

**Lemma 3.6.** *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione regolare tra varietà algebriche, tale che $f(X)$ sia Z-densa in $Y$. $f(X)$ contiene allora uno Z-aperto $U$ che è denso in $Y$.*

**Proposizione 3.7.** *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione regolare tra varietà algebriche. L'aderenza e la Z-aderenza di $f(X)$ in $Y$ coincidono come insiemi.*

*Dimostrazione.* Sia $T$ la Z-aderenza di $f(X)$ in $Y$. Applicando il lemma 3.6 a $f : X \to T$ si vede che esiste uno Z-aperto $U \subset f(X)$ che è Z-denso in $T$. La proposizione 3.5 garantisce che $U$ è anche denso in $T$, di conseguenza anche $f(X)$ deve essere denso in $T$. Questo mostra che la Z-chiusura di $f(X)$ è contenuta nella sua chiusura, il viceversa è ovvio perché gli Z-chiusi sono anche chiusi. □

L'analogo algebrico del concetto topologico di compattezza è la completezza:

**Definizione 3.1.** Una varietà algebrica $X$ è completa se per ogni varietà algebrica $Y$, il morfismo di proiezione

$$p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$$

è una mappa chiusa.

Nella categoria degli spazi topologici se $X$ è compatta allora vale che per ogni $Y$ la proiezione sulla seconda componente è una mappa chiusa. Il viceversa è vero con qualche richiesta aggiuntiva su $X$ (per esempio che sia a base numerabile), comunque è sempre vero per gli spazi analitici che stiamo considerando.
Si può provare che, come uno spazio topologico localmente compatto può sempre essere immerso tramite una funzione continua in un compatto, una varietà algebrica può sempre essere immersa in una varietà completa. Si può dire che spazi compatti e varietà complete giochino lo stesso ruolo nelle rispettive categorie.
Sappiamo in particolare che $\mathbb{P}_n$ è compatto; vale anche[5]:

**Proposizione 3.8.** *$\mathbb{P}_n$ è completo*

Come per i compatti, le sottovarietà chiuse di varietà complete sono complete.
Ma il parallelismo è molto più generale:

[5] Si veda [Mumford], capitolo 1.

**Teorema 3.9.** *Una varietà algebrica $X$ è completa se e solo se lo spazio analitico associato $X^h$ è compatto.*

La dimostrazione si basa su un risultato del matematico cinese Wei-Liang Chow[6]:

**Lemma 3.10.** *Per ogni varietà algebrica $X$ esistono una varietà proiettiva $Y$ e $U \subset Y$, Z-aperto e Z-denso, e un morfismo regolare suriettivo $f : U \to X$ tale che il grafico $T$ sia Z-chiuso in $X \times Y$. Si ha che $U = Y$ se e solo se $X$ è completa.*

*Dimostrazione del teorema.* Supponiamo che $X$ sia completa, allora $X = f(Y)$; sappiamo che tutte le sottovarietà proiettive chiuse sono compatte rispetto alla topologia forte. Come si è visto i morfismi regolari sono anche olomorfi e quindi in particolare continui: l'immagine continua di un compatto è un compatto, quindi $X^h$ è un compatto.
Viceversa, supponiamo che $X^h$ sia compatto. Il grafico $T$ del lemma 3.10 è Z-chiuso e quindi chiuso, poiché è contenuto in $X \times Y$, che è compatto, è anch'esso compatto. Di conseguenza anche $U$, che è la proiezione di $T$ in $Y^h$, è compatto. In particolare $U$ è chiuso in $Y^h$. D'altra parte, in quanto Z-aperto Z-denso in $Y$, per la proposizione 3.5 esso è denso in $Y^h$. $Y$ è quindi tutto $Y$ (o $Y^h$ a seconda della topologia considerata). Per il lemma 3.10 $X$ è completa. □

Vediamo infine che anche i concetti di connessione e Z-connessione si equivalgono.

**Teorema 3.11.** *Uno spazio analitico $X^h$ è connesso se e solo se è Z-connessa la varietà algebrica $X$.*

È ovvio che se $X^h$ è connesso lo è anche $X$; infatti gli Z-aperti di $X$ sono anche aperti di $X^h$, quindi se $X$ non fosse Z-connesso, cioè fosse unione disgiunta di due Z-aperti, anche $X^h$ non sarebbe connesso.
La dimostrazione del viceversa è decisamente più lunga e complicata e non la riporteremo. A titolo di esempio vediamo però che l'affermazione è vera nel caso in cui la varietà sia un aperto per la topologia di Zariski di $\mathbb{A}^n$.

**Proposizione 3.12.** *Se $V \subset \mathbb{A}^n$ è uno Z-aperto, allora $V^h$ è connesso.*

*Dimostrazione.* Poniamo $Y = \mathbb{A}^n \setminus V$ e siano $x_1, x_2 \in V^h$, $L$ una retta attraverso $x_1$ e $x_2$. Per costruzione $L$ non può essere contenuta in nessuna

[6] Per la dimostrazione si può vedere [Mumford], capitolo 1, paragrafo 10 o [Shafarevich], capitolo 6 (vol. II), paragrafo 2

componente irriducibile di $Y$, quindi $L \cap Y$ è un insieme finito $\{y_1, ..., y_m\}$. $L^h$ è omeomorfa a $\mathbb{C}$ e $L^h \cap V^h$ è omeomorfa a $\mathbb{C} \setminus \{y_1, ..., y_m\}$. Ne segue che $L^h \cap V^h$ è connessa e quindi $x_1, x_2$ sono contenuti nella stessa componente connessa di $V^h$. Poiché $x_1, x_2$ sono punti arbitrari,$V^h$ è connesso. □

Il caso generale si può provare dimostrando prima che se $X$ è una curva irriducibile $X^h$ è connesso e poi procedendo per induzione sulla dimensione di $X$.
Riportiamo inoltre una conseguenza, nell'ambito della connessione, della proposizione 3.5.

**Proposizione 3.13.** *Se $X$ è una varietà e $Y \subset X$ una sottovarietà e il sottoinsieme aperto $X^h \setminus Y^h$ è connesso lo stesso vale per $X^h$.*

*Dimostrazione.* Se $X^h = M \cup N$, con $M, N$ chiusi disgiunti, allora $X^h \setminus Y^h$ è l'unione disgiunta di $M \cap X^h \setminus Y^h$ e $N \cap X^h \setminus Y^h$. Poiché $X^h \setminus Y^h$ è connesso deve essere uguale a una sola delle due parti e quindi interamente contenuta in $M$ o $N$, di conseguenza anche la sua chiusura lo è. Ma $X \setminus Y$ è uno Z-aperto di una varietà affine, quindi è Z-denso in $X$. Per la proposizione 3.5 anche $X^h \setminus Y^h$ è denso in $X$, quindi uno o l'altro di $M, N$ è l'insieme vuoto. □

Sappiamo che tutte le applicazioni regolari sono olomorfe. Il viceversa in generale è falso, ma la proposizione seguente indica un caso in cui è vero, dando un criterio analitico per la regolarità.

**Lemma 3.14.** *Sia $p : T \to X$ un morfismo regolare biunivoco. Se $p$ è un isomorfismo analitico allora è anche un isomorfismo regolare.*

**Proposizione 3.15.** *Siano $X, Y$ due varietà algebriche e $f : X^h \to Y^h$ un'applicazione olomorfa. Se il grafico $T$ di $f$ è un sottoinsieme Z-localmente chiuso (o in altri termini una sottovarietà algebrica) di $X \times Y$ allora l'applicazione $f$ è regolare.*

*Dimostrazione.* Sia $p = pr_X$ la proiezione canonica di $T$ sul primo fattore di $X \times Y$; $p$ è regolare biunivoca e la sua inversa è l'applicazione $x \mapsto (x, f(x))$ che è olomorfa per ipotesi. Di conseguenza $p$ è un isomorfismo analitico; se $p$ è regolare allora lo è anche $f = pr_Y \circ p^-1$, ma ciò segue dal lemma 3.14. □

## 3.2 Corrispondenza tra fasci analitici e fasci algebrici coerenti nel proiettivo

### 3.2.1 Fasci analitici associati a fasci algebrici

Sia $X$ una varietà algebrica e $X^h$ lo spazio analitico associato. Se $\mathcal{F}$ è un fascio qualunque su $X$ è possibile vederlo anche come fascio $\mathcal{F}'$ su $X^h$. Dato che la topologia di $X^h$ è più fine di quella di $X$, possiamo pensare tutti gli aperti come unione di aperti contenuti in Z-aperti e per $U \subset V$, con $V$ Z-aperto, definire le sezioni di $U$ come restrizioni delle sezioni di $V$:

$$\Gamma(U, \mathcal{F}') = \{f_{|U} | f \in \Gamma(V, \mathcal{F}')\}$$

In questo modo le spighe di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ sono uguali. Pensando alla definizione di fascio di Serre si può dire che $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ differiscono solo per la loro topologia. In particolare, per quanto visto nella sezione precedente, il fascio $\mathcal{O}'$, ottenuto dal fascio $\mathcal{O}$ dei germi di funzioni regolari su $X$, può essere identificato a un sottofascio del fascio $\mathcal{H}$ dei germi di funzioni olomorfe su $X$.

**Definizione 3.2.** Sia $\mathcal{F}$ un fascio algebrico su $X$. Si dice fascio analitico associato a $\mathcal{F}$ il fascio di $\mathcal{H}$-moduli $\mathcal{F}^h$ su $X^h$ dato da

$$\mathcal{F}^h = \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}'} \mathcal{H}$$

In altri termini $\mathcal{F}^h$ si ottiene da $\mathcal{F}$ per estensione dell'anello degli scalari a $\mathcal{H}$. L'iniezione $\mathcal{O}' \to \mathcal{H}$ definisce un omomorfismo canonico $\alpha : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}^h$. Inoltre ogni omomorfismo algebrico (cioè $\mathcal{O}$-lineare)

$$\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$

definisce per estensione dell'anello degli scalari un omomorfismo analitico (cioè $\mathcal{H}$-lineare)

$$\phi^h : \mathcal{F}^h \longrightarrow \mathcal{G}^h$$

In linguaggio categoriale, $\mathcal{F}^h$ è un funtore covariante di $\mathcal{F}$.

**Proposizione 3.16.** 1. *Il funtore $\mathcal{F}^h$ è un funtore esatto (cioè trasforma successioni esatte in successioni esatte).*

2. *Per ogni fascio algebrico $\mathcal{F}$ l'omomorfismo $\alpha : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}^h$ è iniettivo.*

3. *Se $\mathcal{F}$ è un fascio algebrico coerente allora $\mathcal{F}^h$ è un fascio analitico coerente.*

*Dimostrazione.* La 1. e la 2. seguono dal fatto che, per ogni $x$, $\mathcal{H}_x$ è un $\mathcal{O}_x$-modulo piatto.
Per provare la 3. evidenziamo innanzitutto che $\mathcal{O}^h = \mathcal{H}$. Se $\mathcal{F}$ è un fascio algebrico *coerente* e $x$ un punto di $X$ allora (si veda la definizione 2.10) in un Z-intorno $U$ di $x$ si può trovare una successione esatta

$$\mathcal{O}^q \to \mathcal{O}^p \to \mathcal{F} \to 0.$$

Da 1. segue che su $U$ è esatta anche

$$\mathcal{H}^q \to \mathcal{H}^p \to \mathcal{F}^h \to 0.$$

Poiché $U$ è anche un intorno di $x$ visto come punto di $X^h$ si ha che $\mathcal{F}$ rispetta la definizione di fascio coerente. □

Prima di procedere oltre analiziamo rapidamente come si comporta il funtore $\mathcal{F}^h$ se ci si restringe a una sottovarietà della varietà di partenza. Queste osservazioni ci saranno utili in seguito.
Consideriamo una sottovarietà Z-chiusa $Y$ di una varietà algebrica $X$ e un fascio algebrico coerente $\mathcal{F}$ su $Y$. Chiamiamo $\mathcal{F}^X$ il fascio algebrico coerente ottenuto prolungando $\mathcal{F}$ per 0 su $X \setminus Y$ (si veda la proposizione 1.5). Come stabilito dalla proposizione 2.5, $\mathcal{F}^X$ è un fascio algebrico coerente su $X$. Di conseguenza $(\mathcal{F}^X)^h$ è un fascio analitco coerente su $X^h$. D'altra parte $\mathcal{F}^h$ è un fascio analitico coerente su $Y^h$, che si può prolungare per 0 su $X^h \setminus Y^h$, ottenendo un fascio analitico coerente $(\mathcal{F}^h)^X$. Fortunatamente le due costruzioni sono equivalenti:

**Proposizione 3.17.** *I fasci $(\mathcal{F}^h)^X$ e $(\mathcal{F}^X)^h$ sono canonicamente isomorfi. $\mathcal{F}^h$ è cioè compatibile con l'identificazione usuale di $\mathcal{F}$ con $\mathcal{F}^X$.*

*Dimostrazione.* Entrambi sono nulli fuori da $Y^h$, quindi basta mostrare che sono isomorfe le restrizioni a $Y^h$. Si ha che:

$$(\mathcal{F}^h)^X_x = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{x,Y}} \mathcal{H}_{x,Y} \quad \text{e} \quad (\mathcal{F}^X)^h_x = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{x,X}} \mathcal{H}_{x,X}$$

$\mathcal{O}_{x,Y}$ è il quoziente dell'anello $\mathcal{O}_{x,X}$ per l'ideale $a$ dei germi di funzioni per i quali la restrizione a $Y$ è nulla in un intorno di $x$.
Sfruttando il fatto che $\mathcal{O}_{x,X} \to \mathcal{H}_{x,X}$ è iniettiva, si prova che

$$\mathcal{H}_{x,Y} = \mathcal{H}_{x,X}/a\mathcal{H}_{x,Y} = \mathcal{H}_{x,X} \otimes_{\mathcal{O}_{x,X}} \mathcal{O}_{x,Y}$$

In virtù del fatto che commutando o associando i termini di un prodotto tensoriale si ottengono spazi isomorfi, concludiamo che per ogni $x$

$$\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{x,Y}} \mathcal{H}_{x,Y} = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{x,Y}} \mathcal{O}_{x,Y} \otimes_{\mathcal{O}_{x,X}} \mathcal{H}_{x,X} = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{x,X}} \mathcal{H}_{x,X}$$

□

Una volta chiarito come passare da un fascio algebrico al fascio analitico associato è naturale chiedersi in che relazioni stiano i rispettivi gruppi di coomologia. Se $U$ è un sottoinsieme Z-aperto di $X$ e $s$ a una sezione del fascio $\mathcal{F}$ su $U$, si può vedere $s$ come sezione $s'$ di $\mathcal{F}'$ sull'aperto $U^h$ e ottenere una sezione $\alpha(s') = s' \otimes 1$ di $\mathcal{F}^h$. Si ha quindi un omomorfismo

$$\epsilon : \Gamma(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U^h, \mathcal{F}^h)$$

Sia poi $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ un ricoprimento Z-aperto e finito di $X$; gli $U_i^h$ formano un ricoprimento aperto finito di $X^h$, che indicheremo con $\mathfrak{U}^h$. Per tutti i sistemi di indici $i_0, ..., i_q$ si hanno quindi omomorfismi canonici

$$\epsilon : \Gamma(U_{i_0} \cap ... \cap U_{i_q}, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U_{i_0}^h \cap ... \cap U_{i_q}^h, \mathcal{F}^h)$$

da cui un omomorfismo

$$\epsilon : C(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C(\mathfrak{U}^h, \mathcal{F}^h)$$

Si vede subito che questo omomorfismo commuta con l'operatore di cobordo $d$, quindi definisce, passando alla coomologia, degli omomorfismi

$$\epsilon : H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(\mathfrak{U}^h, \mathcal{F}^h)$$

Infine, per passaggio al limite diretto su $\mathfrak{U}$ si ottengono gli omomorfismi indotti sui gruppi di coomologia

$$\epsilon : H^q(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(X^h, \mathcal{F}^h)$$

Questi omorfismi godono delle usuali proprietà funtoriali e commutano con i morfismi di fasci $\phi : F \rightarrow G$.
L'omomorfismo $\epsilon$ tra i gruppi di coomologia di una varietà algebrica e dello spazio analitico associato in generale $\epsilon$ non è un isomorfismo. Vediamo un semplice controesempio:
*Esempio* 8. Consideriamo la varietà algebrica $X = \mathbb{A}^1$ (cioè $\mathbb{C}$ con la topologia di Zarisky) e il fascio $\mathcal{O}$. Le sezioni globali sono i polinomi in una variabile:

$$H^0(X, \mathcal{O}) = \Gamma(X, \mathcal{O}) = \mathbb{C}[Z]$$

Si tratta di un sottoinsieme proprio di $H^0(X^h, \mathcal{O}^h) = H^0(\mathbb{C}, \mathcal{H})$. Infatti l'insieme delle sezioni globali di $\mathbb{C}$ visto come varietà analitica è costituito dalle funzioni analitiche intere. Tra di essere vi sono funzioni, come $\exp x$ che non sono polinomi.

Tuttavia se $X$ è una varietà proiettiva, cioè una sottovarietà Z-chiusa di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, i gruppi di coomologia sono isomorfi; di più, con i tre prossimi teoremi proveremo che la teoria dei fasci analitici coerenti su $X^h$ coincide essenzialmente con quella dei fasci algebrici coerenti su $X$.

### 3.2.2 Teorema 1

**Teorema 3.18.** *Sia $\mathcal{F}$ un fascio algebrico coerente su una varietà proiettiva $X$. Per ogni intero $q \geq 0$ l'omomorfismo*

$$\epsilon : H^q(X, \mathcal{F}) \to H^q(X^h, \mathcal{F}^h)$$

*è binuivoco.*
*Per $q = 0$ si ottiene in particolare un isomorfismo di $\Gamma(X, \mathcal{F})$ e $\Gamma(X^h, \mathcal{F}^h)$.*

Immaginiamo la varietà $X$ del teorema immersa nello spazio proiettivo $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Se identifichiamo $\mathcal{F}$ con il fascio ottenuto prolungandolo per 0 fuori da $X$, sappiamo che per la proposizione 1.5 valgono:

$$H^q(X, \mathcal{F}) = H^q(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathcal{F}) \quad \text{e} \quad H^q(X^h, \mathcal{F}^h) = H^q(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})^h, \mathcal{F}^h)$$

Di conseguenza per provare il teorema basta dimostrare che per $X = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ e $\mathcal{F}$ fascio algebrico coerente qualsiasi, si ha un isomorfismo

$$\epsilon : H^q(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathcal{F}) \longleftrightarrow H^q(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})^h, \mathcal{F}^h)$$

D'ora in avanti $X = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.
Procediamo enunciando alcuni lemmi. Il primo è un risultato ben noto e molto generale[7], indispensabile quando si lavora con sequenze esatte di gruppi di coomologia o omologia.

**Lemma 3.19** (Dei cinque)**.** *Si consideri il seguente diagramma commutativo in una qualsiasi categoria abeliana o nella categoria dei gruppi:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "l"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "m"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "n"] & D \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"] & E \arrow[d, "q"] \\
A' \arrow[r, "r"] & B' \arrow[r, "s"] & C' \arrow[r, "t"] & D' \arrow[r, "u"] & E'
\end{tikzcd}$$

*Supponiamo che le righe siano esatte. Allora:*

1. *Se $m$ e $p$ sono suriettive e $q$ è iniettiva, allora $n$ è suriettiva.*

2. *Se $m$ e $p$ sono iniettive e $l$ è suriettiva, allora $n$ è iniettiva.*

3. *Se $m$ e $p$ sono isomorismi, $l$ è suriettiva e $q$ è iniettiva, allora $n$ è un isomorfismo.*

[7] Si veda per esempio [Hatcher], capitolo 2.1, anche per la dimostrazione.

Il secondo enunciato è un risultato di Dolbeault, ideatore dell'omonima teoria coomologica, che in questo contesto serve a capire come sono fatti i fasci analitici.

**Lemma 3.20** (Teorema di Dolbeault)**.** *Sia $V$ una varietà analitica*[8]*. Sia $\Omega^p$ il fascio dei germi delle forme differenziali olomorfe chiuse di grado $p$*[9]*. Per tutti i $p, q \geq 0$, il gruppo di comologia di Cech $H^q(V, \Omega^p)$ è canonicamente isomorfo al gruppo di coomologia di Dolbeault $H^{p,q}(V)$. In particolare vale che*

$$H^{0,q}(V) \cong H^q(V, \mathcal{H})$$

È quindi possibile utilizzare risultati della teoria coomologica di Dolbeault[10] per concludere che

**Corollario 3.21.** *$H^q(V, \mathcal{H}) = 0$ per $q > \dim V$.*

e soprattutto che

**Corollario 3.22.** *$H^q(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathcal{H}) = 0$ per $q > 0$.*

Il lemma seguente permette di determinare un buon ricoprimento per lo spazio proiettivo; la sua dimostrazione richiedere la conoscenza della teoria degli spazi di Stein[11].

**Lemma 3.23.** *Il ricoprimento $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{0 \leq i \leq n}$ della varietà analitica $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, dove $U_i = \{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) | x_i \neq 0\}$, è aciclico. Di conseguenza è un buon ricoprimento rispetto a qualsiasi fascio analitico coerente $\mathcal{F}$.*

*Traccia di dimostrazione.* Si prova che ogni $U_i$ è uno spazio di Stein. Per un qualsiasi spazio si Stein $Z$ vale che se $\mathcal{F}$ è un fascio analitico coerente $H^q(Z, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $q > 0$. □

**Corollario 3.24.** *$H^q(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathcal{F}) = 0$ per ogni $q > n$ e ogni fascio analitico coerente $\mathcal{F}$.*

*Dimostrazione.* $\mathfrak{U}$ ha $n+1$ elementi e quindi per definizione i gruppi di coomologia si annullano per $q > n$. Inoltre per il lemma 3.23, $\mathfrak{U}$ è un buon ricoprimento, quindi ciò vale anche per la coomologia di $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. □

**Lemma 3.25.** *Il teorema 3.18 è vero per il fascio $\mathcal{O}$.*

---

[8] La coomologia di Dolbeault non è definita per gli spazi analitici, ma solo per le varietà analitiche. Ciò non crea problemi perché applicheremo l'enunciato solo a $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.

[9] Ovviamente $\Omega^0 = \mathcal{H}$.

[10] Si veda l'articolo originale in [Dolbeault] o il libro [Gunning-Rossi], capitolo 6.

[11] Un buon riferimento bibliografico è [Grauert-Remmert].

*Dimostrazione.* Per $q = 0$, $H^0(X, \mathcal{O})$ e $H^0(X^h, \mathcal{O}^h)$ corrispondono alle sezioni globali da $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ in $\mathbb{C}$, che sono in entrambi i casi date dalle funzioni costanti a valori in $\mathbb{C}$. I gruppi di coomologia sono quindi uguali. Per $q > 0$ sappiamo dalla proposizione 2.31 che $H^q(X, \mathcal{O}) = 0)$. Analogamente, dal corollario 3.21 segue che $H^q(X^h, \mathcal{O}^h) = 0$ per $q > 0$. □

**Lemma 3.26.** *Il teorema 3.18 è vero per il fascio* $\mathcal{O}(n)$

*Dimostrazione.* Ragioniamo per induzione sulla dimensione $n$ di $X$. Il caso $n = 0$ è banale perché $X$ è solo un punto e le uniche funzioni definibili sono le costanti.
Sia $t$ una forma lineare non identicamente nulla nelle coordinate omogenee $t_0, ..., t_n$ e sia $E$ l'iperpiano definito dall'equazione $t = 0$. Sia $\mathcal{O}_E$ la restrizione di $\mathcal{O}$ a $E$. Si ha una successione

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{f} \mathcal{O} \xrightarrow{r} \mathcal{O}_E \longrightarrow 0$$

dove $r$ è il morfismo di restrizione, mentre $f$ è la moltiplicazione per $t$.
Proviamo che la successione è esatta. In effetti $\mathcal{O}(-1)$ è il fascio delle funzioni omogenee di grado $-1$, la moltiplicazione per $t$, che è una funzione omogenea di grado 1, le trasforma in elementi di $\mathcal{O}$.
$f$ è ovviamente iniettiva, $r$ suriettiva. Inoltre se $h \in \operatorname{Ker} r$, cioè $h_{|E}$ è una sezione nulla, allora $h \in \mathbf{I}(E)$, quindi deve essere della forma $t \cdot g$ per un qualche polinomio omogeneo $g$, cioè appartiene all'immagine di $f$. Viceversa se $u \in \operatorname{Im} f$, allora esiste $s$ tale che $u = t \cdot s$, che ovviamente si annulla su tutto $E$ e quindi appartiene al Ker di $r$. In conclusione abbiamo verificato che la successione è esatta. Possiamo dedurne, per la proposizione 2.27, una successione esatta per ogni $r \in \mathbb{Z}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(r-1) \xrightarrow{f} \mathcal{O}(r) \xrightarrow{r} \mathcal{O}_E(r) \longrightarrow 0$$

La successione esatta corta diventa in coomologia una successione esatta lunga:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^q(X, \mathcal{O}(r-1)) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon"] & H^q(X, \mathcal{O}(r)) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon"] & H^q(E, \mathcal{O}_E(r)) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^q(X^h, \mathcal{O}(r-1)^h) \arrow[r] & H^q(X^h, \mathcal{O}(r)^h) \arrow[r] & H^q(E^h, \mathcal{O}_E(r)^h) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$E$ è un iperpiano, quindi ha dimenzione $r - 1$, vista l'ipotesi di ricorrenza l'omomorfismo

$$\epsilon : H^q(E, \mathcal{O}_E(r)) \longrightarrow H^q(E^h, \mathcal{O}_E(r)^h)$$

è biunivoco per tutti i $q \geq 0$ e tutti gli $r \in \mathbb{Z}$. Applicando il lemma dei cinque si vede che se il teorema 3.18 è vero per $\mathcal{O}(r-1)$ è vero anche per $\mathcal{O}(r)$ e viceversa. Il lemma 3.25 garantisce che l'affermazione è vera per $r = 0$, di conseguenza per induzione è vera per tutti gli $r$. □

*Dimostrazione del teorema 3.18.* Per la proposizione 2.26 $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ per $q > n$. Analogamente, per il corollario 3.24, $H^q(X^h, \mathcal{F}^h) = 0$ per $q > n$. I gruppi di coomologia sono quindi uguali per $q \geq n+1$; possiamo allora ragionare per induzione discendente su $q$.
Per la proposizione 2.29 $\mathcal{F}$ è isomorfo a al fascio quoziente di un fascio $\mathcal{O}(r)^p$ per un qualche $p \in \mathbb{N}$, cioè esiste una successione esatta di fasci algebrici coerenti

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

dove $\mathcal{L}$ è isomorfo a $\mathcal{O}(r)^p$.
$H^q(X, \mathcal{O}(r)^p) \cong (H^q(X, \mathcal{O}(r)))^p$, per come è definita la coomologia si ha infatti in generale che $C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^p) \cong C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O})^p$. Quindi il lemma 3.26 si può applicare anche a $\mathcal{L}$.
Passando alla successione esatta lunga in coomologia si ha un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
H^q(X,\mathcal{R}) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_1"] & H^q(X,\mathcal{L}) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_2"] & H^q(X,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_3"] & H^{q+1}(X,\mathcal{R}) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_4"] & H^{q+1}(X,\mathcal{L}) \arrow[d, "\epsilon_5"] \\
H^q(X^h,\mathcal{R}^h) \arrow[r] & H^q(X^h,\mathcal{L}^h) \arrow[r] & H^q(X^h,\mathcal{R}^h) \arrow[r] & H^{q+1}(X^h,\mathcal{R}^h) \arrow[r] & H^{q+1}(X^h,\mathcal{L}^h)
\end{tikzcd}$$

In questo diagramma $\epsilon_4$ e $\epsilon_5$ sono biunivoche. per l'ipotesi di ricorrenza. Inoltre per il lemma 3.26 lo è anche $\epsilon_2$. Per il lemma dei cinque vale quindi che $\epsilon_3$ è suriettiva. Questo risultato vale per tutti i fasci algebrici coerenti, quindi deve potersi applicare anche a $\mathcal{R}$; ne segue che anche $\epsilon_1$ è suriettiva. Un'ulteriore applicazione del lemma dei cinque prova che $\epsilon_3$ è iniettiva. In conclusione $\epsilon_3$ è un isomorfismo, e questo conclude la dimostrazione del teorema. □

### 3.2.3 Teorema 2

**Teorema 3.27.** *Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due fasci algebrici coerenti su $X$. Ogni morfismo analitico di $\mathcal{F}^h$ in $\mathcal{G}^h$ proviene da uno e un solo morfismo algebrico da $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$.*

Definiamo innanzitutto il fascio dei germi di morfismi tra fasci:

**Definizione-Proposizione 3.3.** Siano $\mathcal{A}$ un fascio di anelli, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due fasci di $\mathcal{A}$-moduli con mappe di restrizione rispettivamente $\phi_{UV}$ e $\psi_{U,V}$. A un aperto $U$ di $X$ si può associare il gruppo $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{F},\mathcal{G})(U)$ dei morfismi da $\mathcal{F}(U)$ a $\mathcal{G}(U)$, con mappe di restrizione

$$\rho_{UV} : \mathrm{Hom}_A(\mathcal{F},\mathcal{G})(U) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\mathcal{F},\mathcal{G})(U), \qquad f \mapsto f^{|\psi_{UV}(\mathcal{G}(U))}_{|\phi_{UV}(\mathcal{F}(U))}$$

$\mathrm{Hom}_A(\mathcal{F},\mathcal{G})$ è un fascio di $\mathcal{A}$ moduli, chiamato fascio dei germi di morfismi di $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$.

Fissato un punto $x \in X$, un elemento di $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{F},\mathcal{G})$, che è un germe di morfismo di $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$ in un intorno di $x$, definisce senza ambiguità un $\mathcal{A}_x$-morfismo di $\mathcal{F}_x$ in $\mathcal{G}_x$, da cui un morfismo canonico

$$r : \mathrm{Hom}_A(\mathcal{F},\mathcal{G})_x \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A_x}(\mathcal{F}_x,\mathcal{G}_x).$$

Tuttavia $r$ non è in generale una biiezione, lo è nel caso seguente:

**Proposizione 3.28.** *Se $\mathcal{F}$ è un fascio coerente, per ogni $x \in X$ il modulo* $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{F},\mathcal{G})_x$ *è isomorfo a* $\mathrm{Hom}_{A_x}(\mathcal{F}_x,\mathcal{G}_x)$*.*

Nei casi di nostro interesse possiamo inoltre essere sicuri di costruire un fascio coerente:

**Proposizione 3.29.** *Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono due fasci coerenti,* $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{F},\mathcal{G})$ *è un fascio coerente.*

Data la definizione 3.3 e le proposizioni successive, possiamo senz'altro affermare che il fascio dei germi di morfismi $\mathcal{A} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ è un fascio algebrico coerente. Un elemento $f \in \mathcal{A}_x$ in un intorno di $x$ è un germe di morfismo di $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$; come illustrato dalla definizione 3.2 è quindi possibile associargli un germe di morfismo $f^h$ dal fascio analitico $\mathcal{F}^h$ al fascio analitico $\mathcal{G}^h$. L'applicazione $f \mapsto f^h$ è un morfismo $\mathcal{O}'$-lineare del fascio $\mathcal{A}'$[12] nel fascio $\mathcal{B} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{F}^h,\mathcal{G}^h)$. Tensorizzando con $\mathcal{H}$ si può prolungare questo morfismo[13] nel morfismo

$$\iota : \mathcal{A}^h \longrightarrow \mathcal{B}$$

Dopo un lemma algebrico enunciamo e proviamo il lemma che ci permetterà di dimostrare il teorema 3.27:

**Lemma 3.30.** *Siano $R$ un anello noetheriano, $E, L$ degli $R$-moduli e $S$ un anello munito di una struttura di $R$-modulo. Consideriamo l'applicazione $R$-lineare*

$$\mathrm{Hom}_R(E,L) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(E \otimes_A S, L \otimes_R S)$$

[12]Definito a partire da $\mathcal{A}$ come spiegato all'inizio della sottosezione 3.2.1
[13]Si veda la definizione 3.2.

*che si prolunga per linearità in un'applicazione $S$-lineare*

$$i : \mathrm{Hom}_R(E, F) \otimes_R S \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(E \otimes_R S, L \otimes_R S).$$

*Se $E$ è un $R$-modulo di tipo finito e $S$ è $R$-piatto allora $i$ è biiettivo.*

**Lemma 3.31.** *Il morfismo $\iota : \mathcal{A}^h \longrightarrow \mathcal{B}$ è biunivoco.*

*Dimostrazione.* Per provare che $\iota$ è biunivoco basta far vedere che lo è per tutte le spighe, cioè che per ogni $x \in X$

$$\iota_x : \mathcal{A}^h_x \longrightarrow \mathcal{B}_x$$

è biunivoco.
Poiché $\mathcal{F}$ è coerente dalla proposizione 3.28 segue che $\mathcal{A}_x = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$, da cui si ha che

$$\mathcal{A}^h_x = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x) \otimes \mathcal{H}_x.$$ [14]

Poiché $\mathcal{F}^h$ è coerente si ha inoltre

$$\mathcal{B}_x = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_x \otimes \mathcal{H}_x, \mathcal{G}_x \otimes \mathcal{H}_x).$$ [15]

La dimostrazione del lemma si riconduce quindi a provare che l'omomorfismo

$$\iota_x : \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x) \otimes \mathcal{H}_x \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_x \otimes \mathcal{H}_x, \mathcal{G}_x \otimes \mathcal{H}_x)$$

è biunivoco. Ma $\mathcal{F}_x$ è di tipo finito perché $\mathcal{F}$ è coerente e dalla proposizione 3.16 segue che $H_x$ è piatto. È quindi possibile applicare il lemma 3.30 e concludere la dimostrazione. □

*Dimostrazione del teorema 3.27.* Consideriamo gli omomorfismi

$$H^0(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{\epsilon} H^0(X^h, \mathcal{A}^h) \xrightarrow{\iota} H^0(X^h, \mathcal{B})$$

dove $\epsilon$ è definita come alla fine della sottosezione 3.2.1, $\iota$ è l'applicazione indotta dalla $\iota$ del lemma appena visto. Ricordiamo (si veda la proposizione 2.14) che lo 0-esimo gruppo di coomologia di un fascio corrisponde alle sue sezioni globali; in particolare gli elementi di $H^0(X, \mathcal{A})$ sono proprio i morfismi da $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$, gli elementi di $H^0(X^h, \mathcal{B})$ i morfismi da $\mathcal{F}^h$ a $\mathcal{G}^h$.
Se $f \in H^0(X, \mathcal{A})$ si ha che per definizione $\iota \circ \epsilon(f) = f^h$. Per dimostrare il teorema occorre quindi mostrare che $\iota \circ \epsilon$ è biiettiva. In effetti $\epsilon$ è biunivoca come conseguenza del teorema 3.18, applicabile perché $\mathcal{A}$ è un fascio algebrico coerente. Il fatto che $\iota$ sia biunivoca è conseguenza del lemma 3.31. Ciò permette di concludere la dimostrazione. □

[14] I funtori Hom e $\otimes$ sono presi sull'anello $\mathcal{O}_x$.
[15] Il funtore $\otimes$ è preso su $\mathcal{O}_x$, il funtore Hom è preso su $\mathcal{H}_x$.

### 3.2.4 Teorema 3

**Teorema 3.32.** *Per ogni fascio analitico coerente $\mathcal{M}$ su $X^h$ esiste un fascio algebrico coerente $\mathcal{F}$ su $X$ tale che $\mathcal{F}^h$ sia isomorfo a $\mathcal{M}$. Inoltre $\mathcal{F}$ è determinato univocamente a meno di isomorfismi.*

*Dimostrazione.* L'*unicità* del fascio $\mathcal{F}$ è una conseguenza del teorema 3.27. In effetti se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono due fasci algebrici coerenti su $X$ che soddisfano l'enunciato, esiste per ipotesi un isomorfismo $g : \mathcal{F}^h \to \mathcal{G}^h$. Per il teorema 3.27 esiste quindi un morfismo $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ tale che $g = f^h$. Denotando con $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ il nucleo e il conucleo di $f$ si ha una successione esatta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow 0,$$

da cui, per il punto 1. della proposizione 3.16, una successione esatta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^h \longrightarrow \mathcal{F}^h \xrightarrow{g} \mathcal{G}^h \longrightarrow \mathcal{B}^h \longrightarrow 0.$$

Poiché $g$ è biunivoca si ha che $\mathcal{A}^h = \mathcal{B}^h = 0$, da cui, per il punto 2. della proposizione 3.16, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = 0$. Ne segue quindi che $f$ è un isomorfismo.
Un po' più laboriosa da dimostrare è l'*esistenza* di $\mathcal{F}$. Come per la dimostrazione del teorema 3.18 ci si può limitare al caso $X = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Infatti, sia $Y$ una sottovarietà algebrica di $X = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ e sia $\mathcal{M}$ un fascio analitico coerente su $Y^h$. Il fascio $\mathcal{M}^X$ ottenuto prolungando $\mathcal{M}$ per 0 fuori da $Y$ è un fascio analitico coerente su $X^h$. Supponendo il teorema 3.32 dimostrato per lo spazio $X$, esiste allora un fascio algebrico coerente $\mathcal{G}$ su $X$ tale che $\mathcal{G}^h$ sia isomorfo a $\mathcal{M}^X$. Sia $\mathcal{I}$ il fascio coerente di ideali definito dalla sottovarietà $Y$ ($\mathcal{I}_x = \{f \in \mathcal{O}_x |$ la restrizione di $f$ a $Y$ è nulla in un intorno di $x\}$).
Se $f \in \mathcal{I}_x$ la moltiplicazione per $f$ è un endomorfismo $\phi$ di $\mathcal{G}_x$; l'endomorfismo $\phi^h$ di $\mathcal{G}^h_x = \mathcal{M}^X_x$ è ridotto a 0 poiché $\mathcal{M}$ è un fascio analitico coerente su $Y^h$. Vale quindi lo stesso per $\phi$, come conseguenza del punto 2. della proposizione 3.16. Si ha quindi che $\mathcal{I} \cdot \mathcal{G} = 0$; si dimostra che ciò equivale a dire che $\mathcal{G}$ è ottenuto estendendo per 0 un fascio algebrico coerente $\mathcal{F}$ su $Y$, cioè $\mathcal{G} = \mathcal{F}^X$. Sappiamo, per la proposizione 3.17 che $(\mathcal{F}^h)^X$ è isomorfo a $(\mathcal{F}^X)^h = \mathcal{G}^h$, il quale a sua volta è isomorfo a $\mathcal{M}^X$. Restringendosi a $Y$ si vede infine che $\mathcal{F}^h$ è isomorfo a $\mathcal{M}$, concludendo la dimostrazione.
A seguire supporremmo che $X = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ e ragioneremo per induzione su $n$. Il caso $n = 0$ è banale perché $X$ è ridotta a un punto.
Definiamo ora per ogni $r \in \mathbb{Z}$ un nuovo fascio analitico $\mathcal{M}(r)$, con una costruzione analoga a quella illustrata per i fasci algebrici sullo spazio proiettivo nella sottosezione 2.2.3.
Siano $t_0, ..., t_r$ un sistema di coordinate omogenee in $X$ e sia, come sempre,

$U_i$ l'aperto formato dai punti tali che $t_i \neq 0$. Chiamiamo $\mathcal{M}_i$ la restrizione del fascio $\mathcal{M}$ a $U_i$. Restringendosi a $U_i \cap U_j$ la moltiplicazione per $t_j^r/t_i^r$ è un isomorfismo di $\mathcal{M}_j$ in $\mathcal{M}_i$, che indichiamo con $\tau_{ij}(r)$. Come per i fasci algebrici $\tau_{ij}(r) \circ \tau_{jk}(r) = \tau_{ik}(r)$ su $U_i \cap U_j \cap U_k$. Possiamo definire per incollamento (si veda la proposizione 1.11) degli $\mathcal{M}_i$ tramite gli isomorfismi $\tau_{ij}(r)$ il fascio $\mathcal{M}(r)$, che è localmente isomorfo a $\mathcal{M}$ e quindi coerente. Si ha l'isomorfismo canonico: $\mathcal{M}(r) = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{H}(r)$. Inolte, se $\mathcal{F}$ è un fascio algebrico si ha che $\mathcal{F}^h(r) = \mathcal{F}(r)^h$.[16]
Per provare il teorema occorrono i lemmi seguenti. Il primo è un ben noto risultato di algebra commutativa, chiamato di solito lemma di Nakayama[17]; gli altri sono funzionali alla prova del teorema e la loro dimostrazione sottostà all'ipotesi induttiva fatta inizialmente.

**Lemma 3.33.** *Siano $M$ un $\mathcal{A}$-modulo finitamente generato, $N$ un sottomodulo di $M$, $a$ un ideale contenuto nel radicale di Jacobson[18] di $A$. Allora $M = aM + N$ implica $M = N$.*

**Lemma 3.34.** *Sia $E$ un iperpiano di $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ e sia $\mathcal{A}$ un fascio analitico coerente su $E$. Allora per $r$ abbastanza grande si ha che $H^q(E^h, \mathcal{A}(r)) = 0$ per $q > 0$.*

*Dimostrazione.* Per l'ipotesi induttiva esiste un fascio algebrico coerente $\mathcal{F}$ su $E$ tale che $\mathcal{A} = \mathcal{F}^h$, di conseguenza $\mathcal{A}(r) = \mathcal{F}(r)^h$. Per il teorema 3.18, $H^q(E^h, \mathcal{A}(r))$ è isomorfo a $H^q(E, \mathcal{F}(r))$. Il lemma risulta quindi dalla proposizione 2.30, per la quale, a partire da un certo $r$ abbastanza grande, $H^q(E, \mathcal{F}(r)) = 0$. □

**Lemma 3.35.** *Sia $\mathcal{M}$ un fascio analitico coerente su $X = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Allora esiste un intero $R$ tale che per ogni $r \geq R$ e per ogni $x \in X$ l'$\mathcal{H}_x$-modulo $\mathcal{M}(r)_x$ è generato dagli elementi di $\Gamma(X^h, \mathcal{M}(r))$.*

*Dimostrazione.* Notiamo innanzitutto che se $H^0(X^h, \mathcal{M}(r))$ genera $\mathcal{M}(r)_x$ la stessa proprietà vale per tutti gli $s \geq r$. Infatti, sia $x \in U_k$; per ogni $i$, sia $\theta_i$ la moltiplicazione per $(t_k/t_i)^{m-n}$ all'interno di $\mathcal{M}_i$ (è senz'altro ben definita perché l'esponente è maggiore o uguale a 0). I $\theta_i$ originano un morfismo $\theta : \mathcal{M}(r) \to \mathcal{M}(s)$. $\theta$ ristretto a $U_k$ è un isomorfismo e da ciò risulta l'affermazione iniziale. Osserviamo poi che, per la proposizione 2.1 se $H^0(X^h, \mathcal{M}(r))$ genera

[16] Osserviamo che al variare di $r$ gli $\mathcal{H}(r)$ sono fasci localmente liberi che definiscono fibrati vettoriali olomorfi di rango 1 sul proiettivo. È vero anche il viceversa: tutti i fibrati vettoriali olomorfi di rango 1 corrispondono a fasci del tipo $\mathcal{O}(r)$.

[17] Si veda [Atiyah-MacDonald], capitolo 2

[18] Il radicale di Jacobson di un anello è l'intersezione di tutti gli ideali massimali. Nel caso di un anello locale coincide con l'unico ideale massimale.

$\mathcal{M}(r)_x$, allora genera anche $\mathcal{M}(r)_y$ per $y$ abbastanza vicino a $x$.
Queste due osservazioni, unite al fatto che $X^h$ è compatto, garantiscono che per dimostrare il teorema basti provare l'enunciato seguente:
*Per ogni $x \in X$ esiste un intero $r$, dipendente da $x$ e da $\mathcal{M}$, tale che $H^0(X^h, \mathcal{M}(r))$ genera $\mathcal{M}(r)_x$.*
Prendiamo un iperpiano $E$ passante per $x$, di equazione omogenea $t = 0$. Sia $\mathcal{A}(E)$ il fascio di ideali costruitito come nella definizione 2.5; si ha la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(E) \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}(E) \longrightarrow 0.$$

Inoltre il fascio $\mathcal{A}(E)$ è isomorfo a $\mathcal{H}(-1)$; l'isomorfismo $\mathcal{H}(-1) \to \mathcal{A}(E)$ è definito tramite la moltiplicazione per $t$ (si veda la dimostrazione del lemma 3.26).
Ricordiamo che il prodotto tensoriale mantiene l'esattezza delle successioni esatte corte a destra[19]. Tensorizzando (su $\mathcal{H}$) per $\mathcal{M}$ si ha la successione esatta:

$$\mathcal{M} \otimes \mathcal{A}(E) \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \otimes \mathcal{H}(E) \longrightarrow 0.$$

Per brevità poniamo $\mathcal{B} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{H}(E)$ e indichiamo con $\mathcal{C}$ il nucleo del morfismo $\mathcal{M} \otimes \mathcal{A}(E) \to \mathcal{M}$. Poiché $\mathcal{A}(E)$ è isomorfo a $\mathcal{H}(-1)$, il fascio $\mathcal{M} \otimes \mathcal{A}(E)$ è isomorfo a $\mathcal{M}(-1)$ e si ha quindi la successione esatta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}(-1) \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow 0.$$

Applicando ad essa il funtore $\mathcal{M}(r)$ si ottiene una nuova successione esatta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(r) \longrightarrow \mathcal{M}(r-1) \longrightarrow \mathcal{M}(r) \longrightarrow \mathcal{B}(r) \longrightarrow 0.$$

Sia $\mathcal{L}_r$ il nucleo del morfismo $\mathcal{M}(r) \to \mathcal{B}(r)$. La successione esatta precedente si decompone nelle due successioni esatte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(r) \longrightarrow \mathcal{M}(r-1) \longrightarrow \mathcal{L}_r \longrightarrow 0, \tag{3.1}$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_n \longrightarrow \mathcal{M}(r) \longrightarrow \mathcal{B}(r) \longrightarrow 0, \tag{3.2}$$

che a loro volta originano le successioni esatte lunghe di coomologia:

$$\cdots \longrightarrow H^1(X^h, \mathcal{M}(r-1)) \longrightarrow H^1(X^h, \mathcal{L}_r) \longrightarrow H^2(X^h, \mathcal{C}(r)) \longrightarrow \cdots \tag{3.3}$$

$$\cdots \longrightarrow H^1(X^h, \mathcal{L}_r) \longrightarrow H^1(X^h, \mathcal{M}(r)) \longrightarrow H^1(X^h, \mathcal{B}(r)) \longrightarrow \cdots \tag{3.4}$$

[19]Si veda per esempio [Atiyah-MacDonald], capitolo 2.

Per la proposizione 2.6 $\mathcal{B}$ è un fascio coerente su $E$ perché è il prodotto tensoriale di due fasci coerenti. Analogamente $\mathcal{M} \otimes \mathcal{A}(E)$ è un fascio coerente, quindi $\mathcal{C}$, in quanto nucleo di un morfismo tra fasci coerenti è coerente. Possiamo quindi in entrambi i casi applicare il lemma 3.34: esiste un intero $r_0$ tale che per tutti gli $r \geq r_0$, $H^1(X^h, \mathcal{B}(r)) = 0$ e $H^2(X^h, \mathcal{C}(r)) = 0$. Ricordiamo che, come affermato dalla proposizione 2.19 i gruppi di coomologia sono spazi vettoriali sul campo $\mathbb{C}$. Le successioni esatte (3) e (4) danno quindi le disuguaglianze

$$\dim H^1(X^h, \mathcal{M}(r-1)) \geq \dim H^1(X^h, \mathcal{L}_r) \geq \dim H^1(X^h, \mathcal{M}(r))$$

$\dim H^1(X^h, \mathcal{M}(r))$ è quindi una funzione decrescente di $r$ per $r \geq r_0$. Esiste allore un intero $r_1 \geq r_0$ tale che la funzione $\dim H^1(X^h, \mathcal{M}(r))$ sia costante per $r \geq r_1$. Si ha quindi, per $r > r_1$:

$$\dim H^1(X^h, \mathcal{M}(r-1)) = \dim H^1(X^h, \mathcal{L}_r) = \dim H^1(X^h, \mathcal{M}(r))$$

Poiché $r_1 \geq r_0$, si ha che $H^1(X^h, \mathcal{B}(r)) = 0$ e la successione esatta (4) mostra che $H^1(X^h, \mathcal{L}_r) \to H^1(X^h, \mathcal{M}(r))$ è suriettivo, ma, per l'uguaglianza appena vista, questi due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione, il morfismo deve quindi essere anche iniettivo. La successione esatta di coomologia associata alla successione esatta corta (2) mostra quindi che

$$H^0(H^h, \mathcal{M}(r)) \longrightarrow H^0(X^h, \mathcal{B}(r)) \quad \textit{è suriettiva per} \quad r > r_1.$$

Fissiamo ora un intero $r > r_1$ tale che $H^0(X^h, \mathcal{B}(r))$ generi $\mathcal{B}(r)_x$. Possiamo farlo perché $\mathcal{B}$ è un fascio analitico coerente su $E$ e quindi, per l'ipotesi induttiva, è della forma $\mathcal{G}^h$. Di conseguenza, per il teorema 3.18, $H^0(X^h, \mathcal{B}(r)) = H^0(X, \mathcal{G}(r))$; sappiamo poi, per il teorema 2.28, che $H^0(X, \mathcal{G}(r))$ genera $\mathcal{G}(r)_x$ per $r$ abbastanza grande.
Per concludere proviamo che questo $r$ è proprio l'intero cercato per verificare il lemma. Sia $N$ il sotto $\mathcal{H}_x$-modulo di $\mathcal{M}(r)_x$ generato dalle sezioni di $H^0(X^h, \mathcal{M}(r))$. Dobbiamo provare che $N$ è tutto $\mathcal{M}(r)_x$. Si ha che

$$\mathcal{B}(r)_x = \mathcal{M}(r)_x \otimes \mathcal{H}_{x,E} = \mathcal{M}(r)_x \otimes_{\mathcal{H}_x} (\mathcal{H}_x / \mathcal{A}_x(E)) = \mathcal{M}(r)_x / (\mathcal{A}_x(E) \cdot \mathcal{M}(r)_x)$$

D'altra parte abbiamo appena visto che l'immagine di $N$ in $\mathcal{M}(r)_x / (\mathcal{A}_x(E) \cdot \mathcal{M}(r)_x)$ lo genera tutto. Possiamo quindi scrivere

$$\mathcal{M}(r)_x = N + \mathcal{A}_x(E) \cdot \mathcal{M}(r)_x;$$

osserviamo che $\mathcal{A}_x(E)$ è l'ideale massimale dell'anello locale $\mathcal{M}(r)_x$, di conseguenza per il lemma di Nakayama $\mathcal{M}(r)_x = N$. $\square$

Notiamo che, come per il caso algebrico (si vedano il teorema 2.28 e la proposizione 2.29) questo lemma ha un immediato corollario:

**Corollario 3.36.** *Ogni fascio analitico coerente su $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ è isomorfo a un fascio quoziente di un fascio $\mathcal{H}(s)^p$ per opportuni interi $s$ e $p$.*

Riprendiamo la dimostrazione del teorema 3.32. Per il lemma 3.35 esiste un intero $r$ tale che $\mathcal{M}(r)$ sia isomorfo a un fascio quoziente di un fascio $\mathcal{H}^p$; $\mathcal{M}$ è quindi isomorfo a un quoziente di $\mathcal{H}(-r)^p$. Chiamiamo $\mathcal{L}_0$ il fascio algebrico coerente $\mathcal{O}(-r)^p$, chiaramente $\mathcal{L}_0^h = \mathcal{H}(-r)^p$.
Si ha quindi una successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{i} \mathcal{L}_0^h \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0,$$

dove il nucleo $\mathcal{R}$ è un fascio analitico coerente.
Applicando il medesimo ragionamento si può vedere $\mathcal{R}$ come quoziente per opportuni $q$ e $s$ di $\mathcal{H}(-s)^q = \mathcal{L}_1^h$, con $\mathcal{L}_1$ fascio algebrico coerente. Si ha quindi un morfismo analitico suriettivo $\gamma : \mathcal{L}_1^h \to \mathcal{R}$, da cui una successione esatta

$$\mathcal{L}_1^h \xrightarrow{g} \mathcal{L}_0^h \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0,$$

dove $g = i \circ \gamma$. Per il teorema 3.27 esiste un morfismo $f : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0$ tale che $g = f^h$. Chiamiamo $\mathcal{F}$ il conucleo di $f$ si ha la successione esatta

$$\mathcal{L}_1 \xrightarrow{f} \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0,$$

da cui, per il punto 1. della proposizione 3.16,

$$\mathcal{L}_1^h \xrightarrow{g} \mathcal{L}_0^h \longrightarrow \mathcal{F}^h \longrightarrow 0,$$

che prova che $\mathcal{M}$ è isomorfo a $\mathcal{F}^h$, concludendo la dimostrazione del teorema.

□

# Capitolo 4

# Qualche conseguenza

I prossimi paragrafi saranno dedicati a esaminare alcune conseguenze o applicazioni della corrispondenza tra varietà proiettive algebriche e analitiche provata nel capitolo precedente.

## 4.1 Equivalenza tra biolomorfismi e isomorfismi algebrici

Sappiamo, come conseguenza del teorema 3.2, che in generale un morfismo regolare tra due varietà algebriche è anche un morfismo olomorfo tra gli spazi analitici associati. Per le varietà proiettive vale anche il viceversa:

**Proposizione 4.1.** *Siano $X$ e $Y$ due varietà proiettive e $f : X^h \to Y^h$ un morfismo olomorfo. Allora $f$ è anche un morfismo regolare tra $X$ e $Y$.*

*Dimostrazione.* Per un qualche $n$ possiamo senz'altro vedere $X$ e $Y$ come sottovarietà di $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Con il procedimento già utilizzato più volte nel capitolo precedente estendiamo per 0 a $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ i fasci $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$. Otteniamo due fasci algebrici coerenti $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ su $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Possiamo quindi applicare il teorema 3.27 all'estensione di $f$. Ne segue subito che $f$ può essere visto come un morfismo regolare da $X$ a $Y$. □

**Corollario 4.2.** *Due varietà proiettive biolomorfe sono algebricamente isomorfe.*

*Dimostrazione.* Si applica la proposizione 4.1 al biolomorfismo, che deve quindi anche essere un isomorfismo algebrico. □

Due varietà algebriche non proiettive che sono isomorfe come spazi analitici non sono invece in generale isomorfe da un punto di vista algebrico.

*Esempio* 9. Siano $C$ una curva proiettiva di grado 3, $o$ un suo punto, $B$ la curva incompleta $C \setminus o$ e $p$ un generico punto di $B$. Prendiamo come prima varietà algebrica $X$ il fibrato lineare corrispondente al divisore $p$ e come seconda varietà algebrica $Y$ il prodotto diretto $B \times \mathbb{A}^1$, corrispondente al divisore zero.[1]
Si dimostra che $X$ e $Y$ non sono isomorfe come varietà algebriche mentre $X^h$ e $Y^h$ sono varietà analitiche isomorfe.[2]

## 4.2 Il teorema di Chow

Il teorema di Chow[3] si può vedere come una conseguenza del teorema 3.32:

**Proposizione 4.3** (Teorema di Chow)**.** *Ogni sottoinsieme analitico chiuso dello spazio proiettivo è algebrico.*

*Dimostrazione.* Sia $X$ lo spazio proiettivo e sia $Y$ un sottoinsieme analitico chiuso di $X^h$. Per mostrare che $Y$ è algebrico (cioè è una varietà proiettiva) basta provare che è uno Z-chiuso (si veda la proposizione 1.17).
Sappiamo che il fascio $\mathcal{H}_Y = \mathcal{H}_X/\mathcal{A}(Y)$ è un fascio analitico coerente su $X^h$. Esiste quindi, per il teorema 3.32, un fascio algebrico coerente $\mathcal{F}$ tale che $\mathcal{F}^h = \mathcal{H}_Y$.
Chiamiamo supporto di un fascio l'insieme dei punti $x \in X$ per i quali le spighe non sono nulle. Per il punto 2. della proposizione 3.16 il supporto di $\mathcal{F}^h$ è uguale a quello di $\mathcal{F}$. Il supporto di un fascio algebrico coerente è uno Z-chiuso; infatti il fatto che sia di tipo finito implica che se $\mathcal{F}_x = 0$ la sezione nulla genera $\mathcal{F}_x$ e quindi anche $\mathcal{F}_y$ per $y$ in un intorno di $x$ (proposizione 2.1), ne segue che il complementare del supporto è un aperto.
Il supporto di $\mathcal{F}$ è proprio $Y$ che quindi è uno Z-chiuso e di conseguenza una varietà proiettiva. $\square$

Vediamo qualche applicazione del teorema di Chow.

**Proposizione 4.4.** *Se $X$ è una varietà algebrica ogni sottoinsieme $A \subset X$ che abbia una struttura di spazio analitico compatto è anche uno Z-chiuso e una sottovarietà algebrica.*

[1]Un divisore $D$ di una curva è una somma formale finita di suoi punti $P_1, ..., P_r$: $D = l_1P_1 + ... + l_rP_r$. I divisori formano un gruppo isomorfo a uno $\mathbb{Z}$-modulo. Si prova che a ogni divisore corrisponde un fibrato lineare. Per una trattazione completa si veda per esempio [Shafarevich], capitoli 3 e 6.

[2]Per la dimostrazione si veda [Shafarevich], capitolo 8, sezioni 2 e 3.

[3]W. L. Chow, *On compact complex analytic varieties*, Amer. J. of Mahs., 71, pagg. 893-1914 (1949)

*Dimostrazione.* Sia $Y$ una varietà proiettiva, $U$ un sottoinsieme di $Y$, Z-aperto e Z-denso in $Y$, e $f : U \to X$ un'applicazione regolare suriettiva il cui grafico $T$ sia Z-chiuso in $X \times Y$. L'esistenza di questi oggetti è garantita dal lemma 3.10.
Sia $T_A = T \cap (A \times Y)$. $A$ è compatto per ipotesi, $Y$ è compatto perché è una varietà proiettiva, inoltre $T$ è chiuso, ne segue che $T_A$ è compatto. Vale quindi lo stesso per la proiezione $Y_A$ di $T_A$ sul fattore $Y$. D'altra parte $Y_A = f^{-1}(A)$, cosa che mostra che $Y_A$ è un sottoinsieme analitico di $U$ e quindi di $Y$. Il teorema di Chow mostra allora che $Y_A$ è un sottoinsieme Z-chiuso di $Y$ e quindi una varietà algebrica.
Possiamo applicare il teorema 3.9 a $f : Y_A \to X$: il teorema dice che l'aderenza dell'immagine coincide con la Z-aderenza. Poiché $\mathcal{F}(Y_A) = A$ è chiuso, allora concludiamo che $A$ è Z-chiuso in $X$ e quindi è una varietà algebrica. $\square$

Il teorema di Chow permette di generalizzare a tutte le varietà complete i risultati della sezione 4.1.

**Proposizione 4.5.** *Ogni morfismo olomorfo $f : X \to Y$ di una varietà algebrica $X$, compatta come spazio analitico, in una varietà algebrica $Y$ è regolare.*

*Dimostrazione.* Sia $T$ il grafico di $f$ in $X \times Y$. Poiché $f$ è olomorfa $T$ è un sottoinsieme analitico compatto di $X \times Y$. La proposizione 4.4 mostra allora che $T$ è uno Z-chiuso. È quindi possibile applicare il criterio analitico di regolarità della proposizione 3.15 e concludere che $f$ è regolare. $\square$

**Corollario 4.6.** *Ogni spazio analitico compatto possiede al più una struttura di varietà algebrica.*

*Dimostrazione.* Sia $M$ uno spazio analitico compatto. Supponiamo che ci siano due varietà algebriche $X$ e $Y$ tali che $M = X^h$ e $M = Y^h$. Allora $Id : X^h \to Y^h$ dà anche un isomorfismo regolare tra $X$ e $Y$. $\square$

Al contrario, non tutti gli spazi analitici hanno una struttura di varietà algebrica, neppure se ci limita a quelli compatti. Consideriamo per esempio i tori complessi $T_\Lambda \mathbb{C}^2/\Lambda$, dove $\Lambda = \mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}\alpha_2 + \mathbb{Z}\alpha_3 + \mathbb{Z}\alpha_4$, $\alpha_i \in \mathbb{C}^2$ e linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$. Si dimostra che $T_\Lambda$ ammette una struttura di varietà algebrica se e solo se esiste una forma hermitiana definita positiva su $\mathbb{C}^2$ la cui parte immaginaria assume valori interi su $\Lambda \times \Lambda$. Riemann fu il primo a formulare questa condizione, che è di solito indicata con il suo nome.

## 4.3 Il gruppo di Picard

Se $L$ e $L'$ sono fibrati lineari e $g^L_{\alpha\beta}$, $g^{L'}_{\alpha\beta}$ sono le funzioni di transizioni relative a un rivestimento trivializzante comune[4] $\mathfrak{U}$, allora le funzioni

$$h_{\alpha\beta} = g^L_{\alpha\beta} \circ g^{L'}_{\alpha\beta}$$

soddisfano le condizioni di transizione e definiscono un nuovo line bundle che denotiamo con $L \otimes L'$.
Analogamente le funzioni

$$h_{\alpha\beta} = (g^L_{\alpha\beta})^{-1}$$

definiscono il fibrato lineare *duale* di $L$, che denotiamo con $L^{-1}$. $L \otimes L^{-1}$ è il fibrato lineare banale su $X$.
È quindi possibile dare all'insieme dei fibrati lineari su $X$ una struttura di gruppo, che indicheremo con $\mathrm{Pic}(X)$, il gruppo di Picard di $X$.
Sia $X$ una varietà analitica, possiamo definire su di essa il fascio $\mathcal{H}^*_X$ dei germi di funzioni olomorfe invertibili (cioè sempre diverse da 0).
Si possono dare definizioni del tutto analoghe per $X$ varietà algebrica, sia per il gruppo di Picard sia per il fascio $\mathcal{O}^*$ dei germi di funzioni regolari invertibili.
È utile sapere che il gruppo di Picard di una varietà algebrica (rispettiamente analitica) è isomorfo al primo gruppo di coomologia rispetto al fascio $\mathcal{O}^*$ (rispettivamente $\mathcal{H}^*$):

**Proposizione 4.7.** *Sia $X$ una varietà algebrica (rispettivamente analitica). Allora*

$$\mathrm{Pic}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}^*_X) \quad \textit{(rispettivamente } \mathrm{Pic}(X) \cong H^1(X, \mathcal{H}^*_X) \textit{ ).}$$

*Traccia di dimostrazione.* Poniamo che $X$ sia una varietà algebrica, la prova del caso analitico è identica. Possiamo vedere un fibrato lineare $L$ come il dato di un ricoprimento trivializzante $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ e di funzioni di transizione $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to C^*$. Iniziamo fissando il rivestimento $\mathfrak{U}$. Per come sono definite, ogni $g = (g_{\alpha\beta})$ si può vedere come un elemento di $C(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^*_X)$. Si prova poi che $\delta g = 0$ e che quindi sono anche elementi di $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^*_X)$.
Passando al limite diretto si ha un omomorfismo tra $\mathrm{Pic}(X)$ e $H^1(X, \mathcal{O}^*_X)$, che si dimostra essere un isomorfismo. □

Sia $X$ una varietà algebrica. A priori non possiamo dire molto sui legami tra $\mathrm{Pic}(X)$ e $\mathrm{Pic}(X^h)$. Se però $X$ è una varietà proiettiva, quanto visto nel

[4] È sempre possibile trovare un rivestimento trivializzante comune, tutt'al più si raffinano quelli dati.

capitolo precedente ci permette di concludere che i due gruppi sono uguali. Ricordiamo innanzitutto che, come visto nella sottosezione 2.1.1, è la stessa cosa parlare di fasci localmente liberi di rango 1 o di fibrati lineari. Inoltre, per la proposizione 2.12 i fasci localmente liberi di $\mathcal{O}_X$-moduli o di $\mathcal{H}_X$-moduli sono fasci coerenti. Precisiamo che la proprietà di essere localmente libero è conservata nel passaggio all'analitico.

**Lemma 4.8.** *Sia $X$ una varietà algebrica. $\mathcal{F}$ è un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli localmente liberi di rango 1 su $X$ se e solo se $\mathcal{F}^h$ è un fascio di $\mathcal{H}_X$-moduli localmente libero di rango 1 su $X^h$.*

*Dimostrazione.* $\mathcal{F}$ è localmente isomorfo a $\mathcal{O}_X$, passando all'analiticizzato si ha che $\mathcal{F}^h$ è localmente isomorfo a $(\mathcal{O}_X)^h = \mathcal{H}_X$. □

Osserviamo inoltre che possiamo dare una descrizione molto semplice del gruppo di Picard dello spazio proiettivo visto come varietà analitica:

**Proposizione 4.9.** *Ogni fibrato lineare olomorfo su $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ è della forma $\mathcal{H}(k)$, con $k \in \mathbb{Z}$, cioè*

$$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo la sequenza esatta su $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^* \longrightarrow 0$$

dove $\mathbb{Z}$ è il fascio localmente costante, $\mathbb{Z} \to \mathcal{H}$ l'inclusione naturale e la mappa $\mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ è data dalla mappa esponenziale $f \mapsto \exp(2\pi i \cdot f)$. È ovvio che la sequenza sia esatta in $\mathbb{Z}$ e $\mathcal{H}$; la suriettività di $\mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ è garantita dall'esistenza del logaritmo, cioè di un'inversa locale di $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$.
Poiché $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ è paracompatto per la proposizione 2.15 si ottiene una sequenza esatta lunga in coomologia:

$$H^1(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathcal{H}) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathcal{H}^*) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathcal{H})$$

Per il teorema 3.18, $H^i(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathcal{H}) \cong H^i(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathcal{O})$. Inoltre, per la proposizione 2.31, per $i > 0$ si ha che $H^i(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathcal{O}) = 0$.
Se ne deduce l'isomorfismo

$$H^1(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathcal{H}^*) \cong H^2(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

Per la proposizione 4.7 $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) = H^1(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathcal{H}^*)$; si prova inoltre che $H^2(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$. Ciò conclude la dimostrazione. □

**Proposizione 4.10.** *Consideriamo la varietà algebrica $X = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.*

$$\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(X^h).$$

.

*Dimostrazione.* Per il teorema 3.32 i fasci analitici coerenti su $X^h$ sono in corrispondenza biunivoca con i fasci algebrici coerenti su $X$. Di più, dal lemma 4.8 segue che sono in corrispondenza biunivoca i sottoinsiemi di quelli localmente liberi di rango 1.
Per la proposizione 4.9 tutti i fibrati lineari su $X^h$ sono dati dagli $\mathcal{H}(k)$. $\mathcal{H}(k) = (\mathcal{O}(k))^h$, quindi tutti i fibrati lineari su $X$ sono dati dagli $\mathcal{O}(k)$.
Inoltre la corrispondenza è un morfismo di gruppi perché

$$(\mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(l))^h = \mathcal{O}(k)^h \otimes \mathcal{O}(l)^h.$$

Vale infatti che $(\mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(l))^h = (\mathcal{O}(k+l))^h = \mathcal{H}(k+l) = \mathcal{H}(k) \otimes \mathcal{H}(l) = \mathcal{O}(k)^h \otimes \mathcal{O}(l)^h$. Si ha quindi un isomorfismo di gruppi. □

Il risultato si estende a tutte le varietà proiettive:

**Proposizione 4.11.** *Sia $X$ una varietà proiettiva. Allora:*

$$\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(X^h).$$

*Dimostrazione.* Per le stesse ragioni della dimostrazione precedente, i fibrati lineari regolari su $X$ sono in corrispondenza biunivoca con quelli olomorfi su $X^h$. Siano $L$ e $M$ due fibrati lineari su $X$, definiti rispettivamente dalle funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$ e $h_{\alpha\beta}$ su un ricoprimento trivializzante comune $\mathfrak{U}$. Come visto all'inizio della sezione, $L \otimes M$ è definito dai prodotti $l_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$. Ovviamente $l^h_{\alpha\beta} = g^h_{\alpha\beta} h^h_{\alpha\beta}$ e da ciò segue che $(L \otimes M)^h = L^h \otimes M^h$. La corrispondenza biunivoca è quindi un isomorfismo di gruppi. □

# Bibliografia


[Serre FAC] J. P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. 61, pagg. 197-278 (1955)

[Serre GAGA] J. P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Annales de l'Institut Fourier, tome 6, pagg. 1–42 (1956)

[Mumford] D. Mumford, *The red book of varieties and schemes*, Berlin, Springer-Verlag (1999, second expanded edition)

[Hartshorne] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, New York, Springer-Verlag (1973)

[Shafarevich] I. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*, vol. I and vol. II, New York, Springer-Verlag (1994)

[Atiyah-MacDonald] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, *Introduction to commutative algebra*, Oxford, Westview press (1969)

[Dolbeault] P. Dolbeault, *Sur la cohomologie des variétées analytiques complexes*, C.R., 236, Pagg 175-177 (1953)

[Hormander] L. Hormander, *An introduction to complex analysis in several variables*, Amsterdam, North Holland publishingh company (1973)

[Demailly] J. P. Demailly, *Complex analytic and algebraic geometry*. Open content book available from http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/books.html

[Bott-Tu] R. Bott, L. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, New York, Springer-Verlag (1982)

[Hatcher] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University press (2002)

[Gunning-Rossi] R. Gunning, H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall (1965)

[Grauert-Remmert] H. Grauert, R. Remmert, *Theory of Stein spaces*, New York, Springer-Verlag (1971)

[Huybrechts] D. Huybrechts, *Complex Geometry*, Berlin, Springer-Verlag (2005)

[Zariski-Samuel] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra*, New York, Springer-Verlag (1960)