

oleh  
Shaharuddin Salleh  
Hamisan Rahmat  
Bahrom Sanugi

Jabatan Matematik, Fakulti Sains  
Universiti Teknologi Malaysia

**Abstrak:** Rekabentuk Berbantuan Komputer merupakan satu bidang dalam matematik gunaan yang mengkaji dan membangun algoritma untuk pemaparan lengkung dan permukaan pada grafik komputer. Keperluannya yang begitu meluas terutamanya dalam pembentukan model-model geometri telah menyebabkan penyelidikan dan pembangunan dalam bidang ini mendapat perhatian yang serius. Kertas kerja ini memperihalkan satu usaha untuk membangun model matematik secara berkompoter dalam projek bernama GEOGIRA II. Algoritma yang digunakan adalah berasaskan kepada kaedah kuasadua terkecil, interpolasi Hermite dan splin kubik.

**Abstract:** *The Computer Aided Design (CAD) is a branch of applied mathematics dealing with the study and development of algorithms for the generation of curves and surfaces using computer graphics. Its diverse applications, especially for the generation of geometrical models has brought research activities in this area to the forefront. This paper describes an effort to develop a mathematical model using the computer in a project code-named GEOGIRA II. The algorithms used are based on the least squares technique, Hermite and cubic spline interpolations.*

## I. PENGENALAN

Terdapat banyak kaedah dalam memadankan lengkung. Setakat ini teori-teori yang telah dimajukan ini dapat membantu dalam pembentukan model-model matematik untuk menyelesaikan banyak masalah dalam bidang-bidang kejuruteraan, senibina, pemprosesan imej dan lain-lain. Bagaimanapun, kebanyakan pendekatan ini adalah berbentuk aplikasi. Tidak banyak teori ini mempamerkan konsep matematik di dalam pembentukan sesuatu model secara nyata, khususnya melalui pendekatan berkomputer.

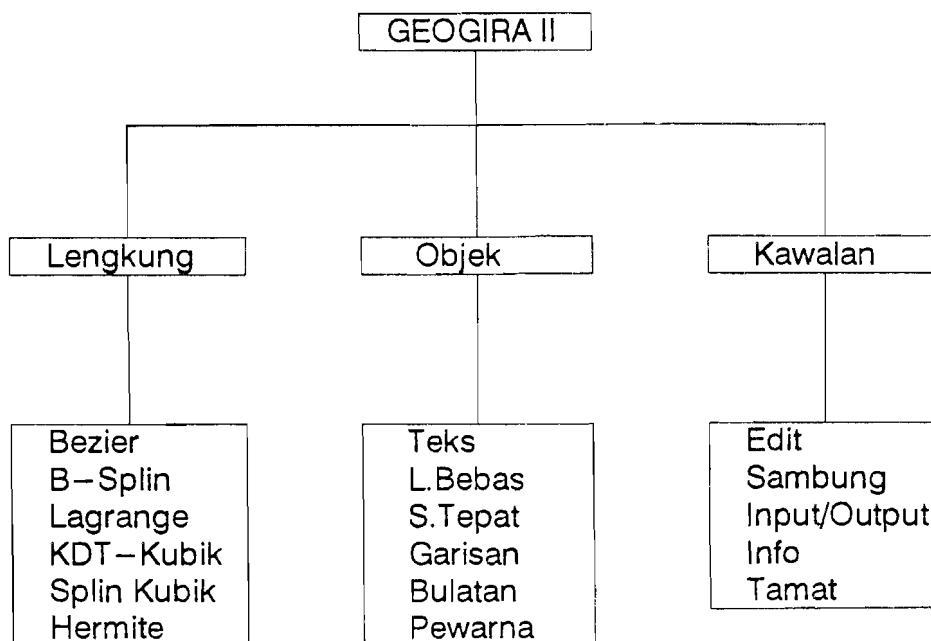
GEOGIRA II (GEOmetri berpenGIRAan) ialah satu projek pembangunan perisian komputer untuk memadankan lengkung-lengkung dari satu set data melalui teknik-teknik interpolasi dan penghampiran. Ia merupakan lanjutan daripada GEOGIRA I[1]. GEOGIRA I sebelum ini telah memperkenalkan tiga kaedah untuk menjanakan lengkung-lengkung polinomial Lagrange, Bezier dan Splin-B. GEOGIRA II akan menambah tiga lagi kaedah untuk memadankan lengkung polinomial kubik, iaitu melalui teknik-teknik kuasadua terkecil, Hermite dan splin kubik. Kaedah pertama ialah penghampiran, sementara dua yang berikutnya adalah melalui interpolasi.

Di samping itu, GEOGIRA II juga memperkenalkan enam objek sebagai alat untuk membantu dalam lakaran. Objek-objek ini ialah lakaran bebas, bulatan, segiempat tepat, garisan, mewarna kawasan dan penulisan teks. Akhir sekali, GEOGIRA II menyediakan antaramuka grafik yang lebih mudah digunakan. Kemasukan data kini boleh dilakukan melalui dua cara, iaitu dengan memplot pada tetikus dan menaip pada kekunci. Kedua-dua cara ini memberi pilihan kepada pengguna agar dapat mengurangkan ralat akibat daripada pembulatan nombor dan kesilapan input. Bagi setiap lengkung yang dijanakan, persamaannya juga mudah didapati. Pengantaramuka grafik ini memudahkan pengguna mengawal semua pergerakan melalui tetikus dan menu dengan mudah. Pengguna tidak perlu bersusah payah untuk membaca manual terlebih

dahulu sebelum mencubanya. Keenam-enam lengkung boleh didapati secara berasingan atau serentak berasaskan titik-titik plot. Kemudahan ini memberi peluang kepada pengguna untuk mempelajari bentuk suatu lengkung dan membandingkannya dengan yang lain.

## II. ORGANISASI PROGRAM

Keseluruhan program ditulis dalam Bahasa C dengan menggunakan rutin-rutin perpustakaan grafik Halo. Pembangunan GEOGIRA II adalah mengikut carta organisasi seperti dalam Rajah 2.1:



Rajah 2.1: Organisasi GEOGIRA II

## III. LENGKUNG-LENGKUNG

Lengkung-lengkung Bezier, Splin-B dan Lagrange telah dibincangkan dalam GEOGIRA I. Dalam kertas ini kita akan tumpukan perhatian kepada tiga kaedah pembentukan lengkung yang berasaskan kepada kaedah-kaedah kuasadua terkecil, interpolasi Hermite dan splin kubik.

## 3.1 KAEDAH KUASADUA TERKECIL

Kaedah kuasadua terkecil ialah satu teknik untuk memadamkan satu polinomial kepada satu set data  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ . GEOGIRA II akan hanya membincangkan polinomial kubik dengan tujuan untuk membandingkannya dengan polinomial-polinomial kubik lain. Polinomial kubik ini diberikan sebagai

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \dots \dots \dots (1)$$

dengan  $y = f(x) + S_r$ ,  $a_i$  adalah pemalar. Jumlah kuasadua bagi reja,  $S_r$  pada titik-titik ialah

$$S_r = \sum_{i=1}^n \left[ y_i - a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3 \right]^2$$

Dengan mendapatkan pembezaan separa terhadap semua  $a_i$  dan menyamakan dengan 0, maka matriks berikut didapati:

$$\begin{bmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (2)$$

iaitu,  $S A = V$ , dengan  $S_k = \sum_{i=0}^n x_i^k$  dan  $v_k = \sum_{i=0}^n x_i^k y_i$  bagi  $k = 0, 1, \dots, 6$  dan  $i = 0, 1, \dots, n$  (jumlah titik plot =  $n+1$ ). Matriks  $S$  pada (2) adalah berbentuk simetri, mempunyai unsur-unsur nyata dan positif tetap. Oleh itu, ia sesuai dihuraikan melalui kaedah Cholesky[3] dan seterusnya memberi penyelesaian untuk  $A$ . Penyelesaiannya boleh diringkaskan seperti berikut:

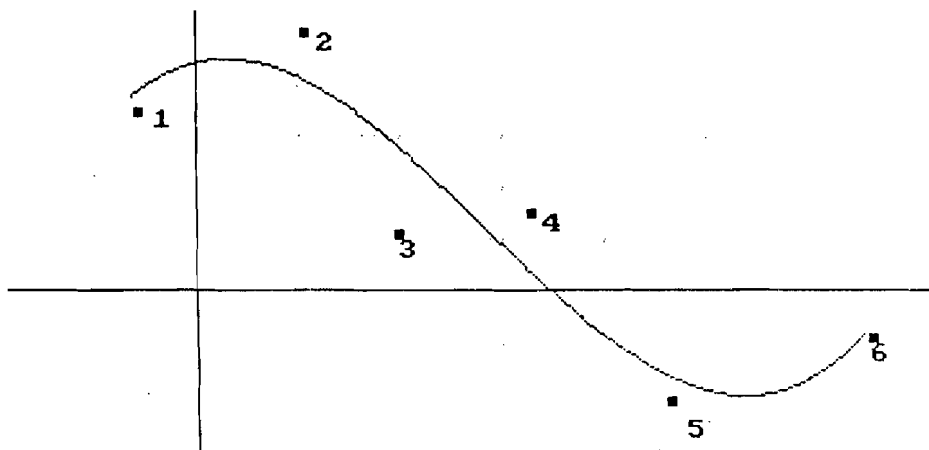
$$\begin{aligned} \text{Huraikan } S &= L L^T \quad [\text{melalui huraian Cholesky}] \\ & \quad [L \text{ ialah matriks segitiga bawah bagi } S] \\ S A &= V \quad [\text{dari (2)}] \\ L D &= V \quad [D = \text{vektor untuk dicari}] \\ L^T A &= D \quad [\text{menghasilkan vektor } A] \end{aligned}$$

Seterusnya, lengkungnya dilakarkan mengikut algoritma berikut:

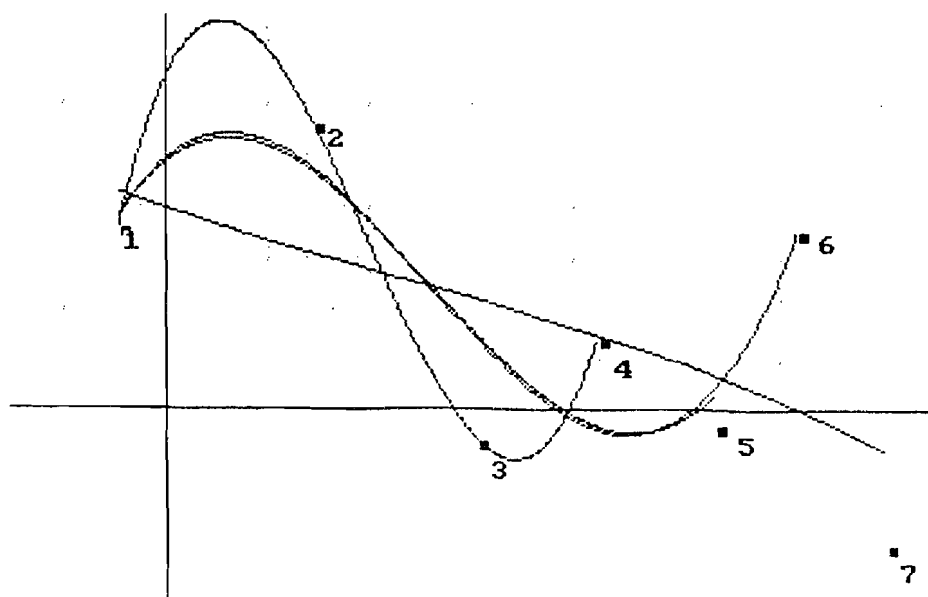
```

    alih kedudukan ke (xx,fx)
    lakukan sehingga xx<=x[No_pt-1]
        fx=persamaan (1)
        lukis garisan segmen ke (xx,fx)
        beri tokokan kepada xx
  
```

Beberapa bentuk polinomial kubik boleh didapati seperti dalam Rajah 3.1 yang memadankan beberapa titik data yang diberi. Perhatikan perbezaan bentuk lengkung apabila bilangan titik data yang berbeza digunakan.



Rajah 3.1(a): Polinomial KDT Dengan 6 Titik



Rajah 3.1(b): Polinomial KDT Dengan 4,5,6 dan 7 Titik

## 3.2 SPLIN KUBIK

Splin ialah suatu lengkung yang didapati dengan menggabungkan beberapa keratan polinomial mengikut syarat-syarat tertentu. Pada masa ini sudah terdapat banyak teks yang membincangkan aspek pengiraannya (lihat misalnya Chapra & Canale[3]). Asalnya, splin tabii menginterpolasi semua titik. Bagaimana pun konsep splin kini telah diperkembang untuk meliputi banyak faktor lain melalui kaedah-kaedah interpolasi dan penghampiran.

Splin kubik tabii ialah  $n$  keratan polinomial kubik yang berasaskan  $n+1$  titik plot, setiap satunya berbentuk

$$f_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3 \quad 1 \leq i \leq n$$

di mana  $a_i, b_i, c_i$  dan  $d_i$  adalah pemalar. Splin ini menginterpolasi semua titik data dan memenuhi semua syarat-syarat berikut:

1. nilai fungsi mestilah sama pada setiap knot,
2. nilai terbitan pertama pada setiap knot adalah sama,
3. nilai terbitan kedua pada setiap knot adalah sama,
4. nilai terbitan kedua pada knot-knot hujung ialah 0.

Polinomial-polinomial splin kubik ini diberikan sebagai:

$$f_i(x) = A_i(x_i - x)^3 + B_i(x - x_{i-1})^3 + C_i(x_i - x) + D_i(x - x_{i-1}) \dots (3)$$

$$\text{di mana } A_i = \frac{1}{6(x_i - x_{i-1})} f''(x_{i-1}),$$

$$B_i = \frac{1}{6(x_i - x_{i-1})} f''(x_i),$$

$$C_i = \frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6}, \text{ dan}$$

$$D_i = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6}.$$



Seterusnya, graf dilakarkan mengikut algoritma berikut:

untuk  $k=1$  hingga  $n-1$

$xx=x[k-1]; fi=f[k-1];$

alih kedudukan ke  $(xx, fi)$

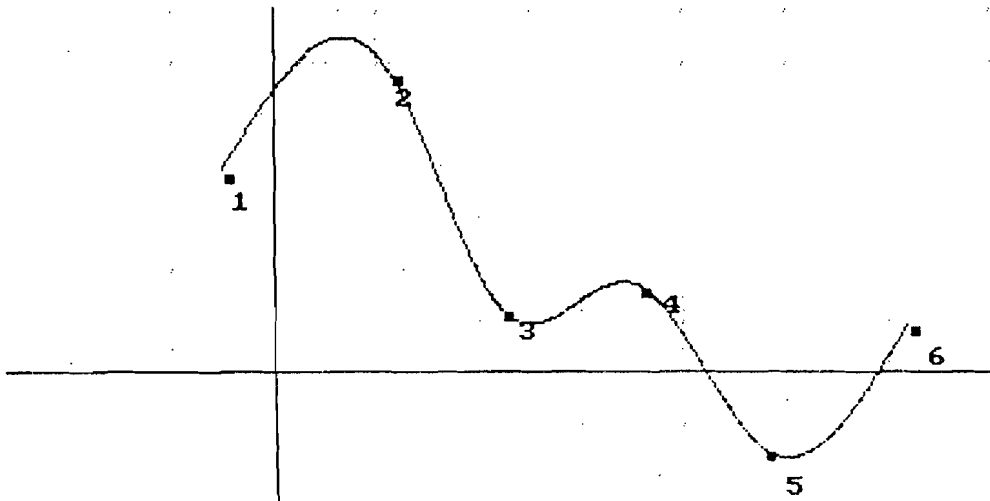
lakukan sehingga  $xx \leq x[k]$

dapatkan  $f[k]$  melalui persamaan (3)

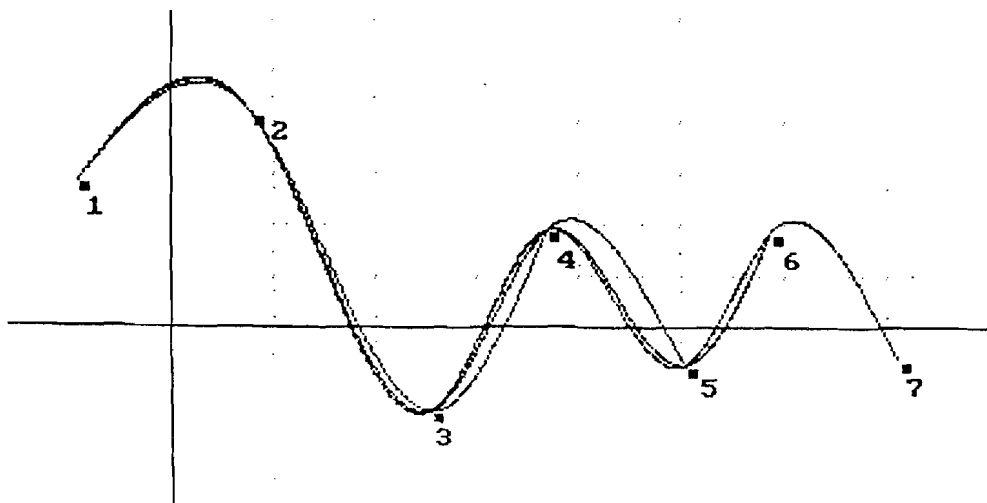
lakar garisan segmen ke  $(xx, f[k])$

$xx=xx+tokokan$

Beberapa contoh lengkung-lengkung yang didapati dapat dilihat dalam Rajah 3.2.



Rajah 3.2(a): Interpolasi Splin Kubik Pada 6 Titik



Rajah 3.2(b): Interpolasi Splin Kubik Pada 4, 5, 6 dan 7 Titik



### 3.3 POLINOMIAL HERMITE KUBIK

Polinomial Hermite,  $h(x)$  ialah lengkung beroskulasi yang didapati dengan menginterpolasi titik-titik  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ , setiap satunya memenuhi syarat berikut:

$$h^{(j)}(x_i) = y^{(j)}(x_i) \quad j=0,1,\dots,m \quad i=0,1,\dots,n$$

Persamaan Hermite Kubik diberikan sebagai:

$$h(x) = \left[ 1 + \frac{2(x-x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right] L_{i-1}^2(x) y_{i-1} + \left[ 1 - \frac{2(x-x_i)}{x_i - x_{i-1}} \right] L_i^2(x) y_i \\ + (x-x_{i-1}) L_{i-1}^2(x) y'_{i-1} + (x-x_i) L_i^2(x) y'_i \dots \dots (5)$$

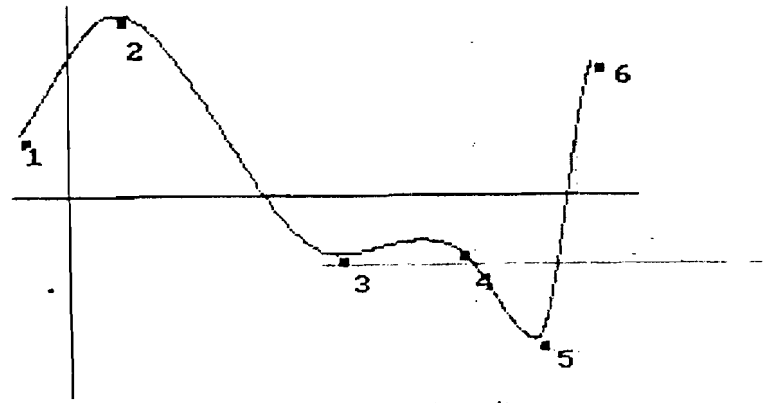
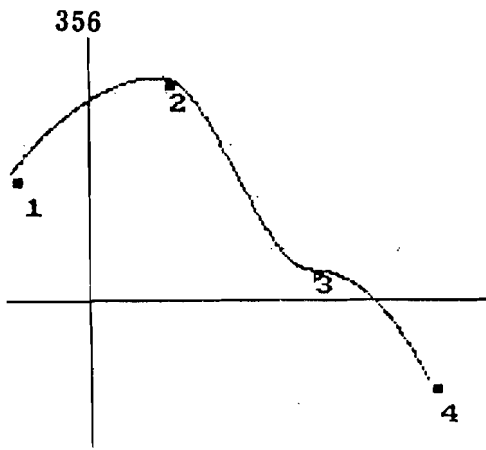
di mana  $L_{i-1}(x) = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}$  dan  $L_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$  adalah pendarab-endarab Lagrange (lihat Scheid[4]).

Pengguna perlu menginput nilai terbitan pertama setiap titik plot. Seterusnya lengkung Hermite Kubik dilukis mengikut algoritma berikut:

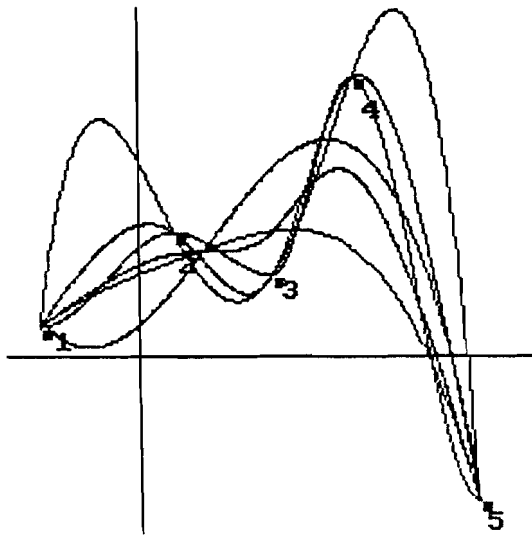
```

    alih kedudukan ke (xx,fx)
    lakukan sehingga xx<=x[No_pt-1]
        hx=persamaan (5)
        lukis garisan segmen ke (xx,hx)
    beri tokokan kepada xx
  
```

Rajah 3.3 memaparkan beberapa contoh lengkung-lengkung Hermite yang didapati. Rajah 3.4 pula menggabungkan semua enam lengkung mengikut kaedah-kaedah yang berbeza dalam GEOGIRA II.



Rajah 3.3: Interpolasi Hermite  
 (a) Dengan 4 Titik (kiri)  
 (b) Dengan 6 Titik (kanan)



Rajah 3.4: Gabungan Semua Kaedah

### 3.4 OBJEK-OBJEK LAKARAN

Terdapat 6 objek untuk menyokong lakaran, iaitu teks, lakaran bebas, segiempat tepat, garisan, bulatan dan pewarna. Objek-objek ini dipilih dengan mengklik butang kiri pada kotak masing-masing. Setiap klik akan menjanakan nilai *flag* masing-masing dari 1 hingga 6. Nilai lalaian ialah *flag*=0. Objek teks memberi kemudahan untuk menulis tajuk dan melabel suatu katakunci. Objek lakaran bebas pula membolehkan pengguna melukis secara bebas pada skrin, tanpa perlu menyelitkan unsur-unsur matematik. Objek-objek segiempat tepat, segiempat sama dan bulatan dijanakan mengikut jalur getah yang dikawal dengan menekan butang kanan tetikus. Sementara objek pewarna pula memenuhi suatu kawasan tertutup mengikut warna pilihan.

Algoritma ringkas untuk menjanakan objek-objek ini diberikan seperti berikut.

**TEKS:**

```
jika flag=1
  jika butang kiri tetikus mula diklik
    (x,y)=kedudukan semasa
    tukarkan (x,y) kepada kodinit teks
    wujudkan tetangkap untuk input teks
    arahkan pengguna untuk input teks
    paparkan teks input di koordinat teks
```

**LAKARAN BEBAS:**

```
jika flag=2
  jika butang kiri tetikus mula diklik
    (xold,yold)=kedudukan semasa
    lakukan sehingga butang kiri dilepaskan
    (x,y)=kedudukan semasa
    g.segmen dari (xold,yold) ke (x,y)
    (xold,yold)=(x,y)
```

**SEGIEMPAT TEPAT:**

```
jika flag=3
  jika butang kiri tetikus mula diklik
    (xold,yold)=kedudukan semasa
  jika butang kiri tetikus dilepaskan
    (x,y)=kedudukan semasa
    lukis kotak dari (xold,yold) ke (x,y)
```

**GARISAN:**

```
jika flag=4
  jika butang kiri tetikus mula diklik
    (xold,yold)=kedudukan semasa
  jika butang kiri tetikus dilepaskan
    (x,y)=kedudukan semasa
    lukis garisan dari (xold,yold) ke (x,y)
```

358  
BULATAN:

```
jika flag=5
  jika butang kiri tetikus mula diklik
    (xold,yold)=kedudukan semasa
  jika butang kiri tetikus dilepaskan
    (x,y)=kedudukan semasa
     $r = \sqrt{(x-xold)^2 + (y-yold)^2}$ 
    lukis bulatan dengan pusat (xold,yold)
    dan jejari=r
```

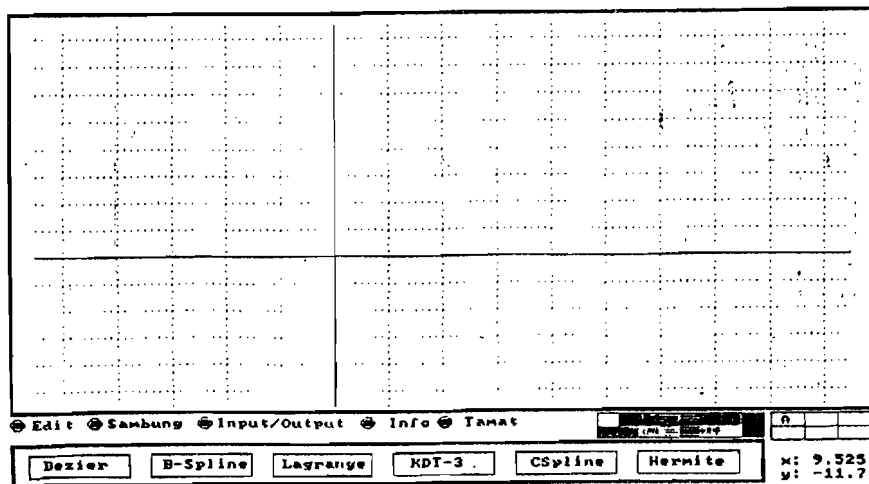
PEWARNA:

```
jika flag=6
  jika butang kiri tetikus diklik
    (x,y)=kedudukan semasa
    warnakan kawasan
```

#### IV. MANUAL PENGGUNAAN

**KEPERLUAN:** Sebuah komputer 8088/80286/80386/80486 dengan MS-DOS 3.0 atau lebih kini, 640KB RAM, video EGA/VGA, tetikus dan pencetak HP Laserjet II/III.

**MEMULAKAN:** Taipkan GEO2. Paparan pengenalan/logo muncul, kemudian tekan sebarang kekunci untuk mendapatkan antaramuka GEOGIRA. Bermula dari peringkat ini semua kawalan adalah dibuat dengan membawa tetikus ke kawasan yang diperlukan dan kemudian klik. Untuk menamatkan GEOGIRA, bawa tetikus ke butang Tamat dan klik.



Rajah 4.1: Paparan GEOGIRA II

**KAWASAN PAPARAN:** Paparan terbahagi kepada empat kawasan seperti pada Rajah 4.1 di atas. Setiap tugas dapat dilaksanakan dengan membawa tetikus ke butang masing-masing dan kemudian klik:

1. *Kawasan Kerja* ialah kotak besar untuk memplot titik dan melakar lengkung. Kawasan ini memenuhi sistem koordinat  $(x,y)$  dari  $(-6,-11.5)$  hingga  $(9.9,17.6)$ . Kedudukan semasa tetikus di kawasan ini ditunjukkan pada sebelah kanan penjuru bawah skrin.

2. *Kawasan Lengkung* ialah kotak terbawah yang mengandungi butang-butang untuk setiap lengkung. Klik pada butang kiri tetikus memberikan lakaran lengkung, sementara butang kanan memberikan maklumat mengenai lengkung itu.

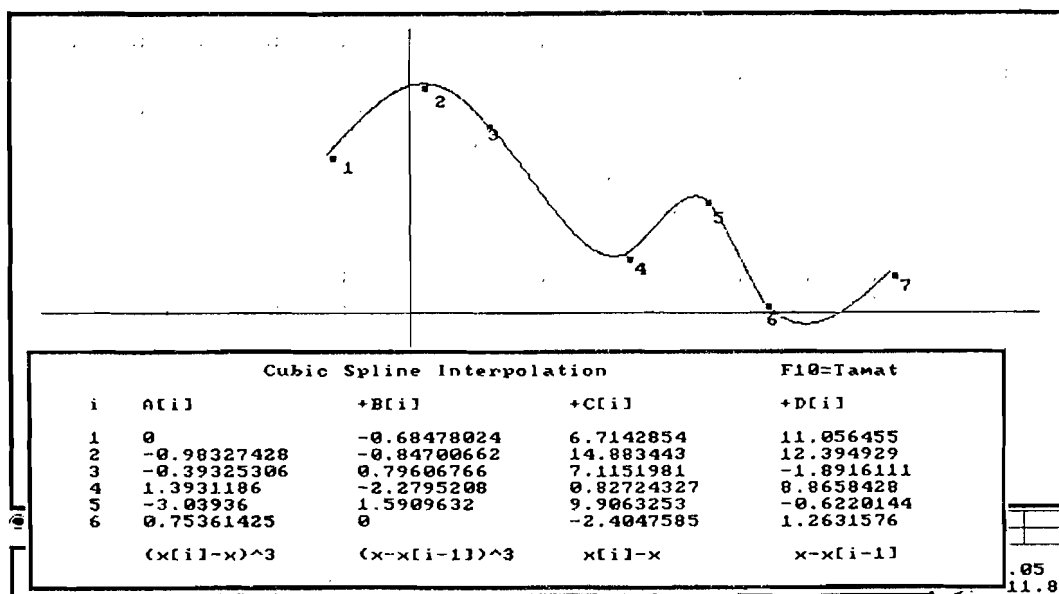
3. *Kawasan Objek* mengandungi dua kotak, iaitu satu untuk memilih warna dan satu lagi untuk objek. Objek-objek yang disediakan ialah *teks*, *lakaran bebas*, *segiempat tepat*, *garisan*, *bulatan* dan *pewarna*.

4. *Kawasan Kawalan* mengandungi 4 butang, iaitu *Edit* (input/ sunting titik-titik plot), *Sambung* (sambung lengkung dengan titik-titik tambahan), *Input/Output* (padam skrin, simpan fail, panggil fail dan cetak) dan *Tamat* (tamatkan sesi).

**MENGAWAL PENGGUNAAN:** Bagi *Kawasan Kerja* klik pada butang kiri tetikus untuk memplot titik. Klik pada butang kanan pula memberikan objek-objek lakaran (lalaian ialah lakaran bebas). Titik-titik plot boleh diinput dengan dua cara, iaitu dengan mengklik pada butang tetikus atau memilih menu *Edit*. Maksimum sebanyak 8 titik plot dibenarkan.

**MENJANAKAN LENGKUNG:** Lengkung-lengkung mudah dijanakan dengan mengklik butang kiri pada *Kawasan Lengkung*. Lengkung akan hanya dijana selepas minimum 2 titik diplot. Beberapa lengkung boleh dijanakan serentak berasaskan titik-titik yang sama.

**MENJANAKAN PERSAMAAN:** Persamaan bagi setiap lengkung boleh didapati dengan mengklik butang kanan pada *kawasan lengkung*. Rajah 4.2 di bawah menunjukkan persamaan untuk splin kubik.



Rajah 4.2: Persamaan Yang Didapati Untuk Splin Kubik berasaskan titik-titik plot

## V. KESIMPULAN dan PENUTUP

Projek pembangunan GEOGIRA akan terus dimajukan untuk meliputi lebih banyak lengkung matematik yang dirasakan boleh membantu di dalam Rekabentuk Berbantuan Komputer. Umpamanya, teknik-teknik Hermite dan Splin kini telah berkembang dengan pesatnya dengan mengambil kira banyak lagi faktor-faktor. Teknik-teknik ini menghasilkan lengkung yang berbeza, masing-masing sesuai digunakan untuk tujuan tertentu.

Satu daripada rancangan masa hadapan ialah untuk memperkenalkan permukaan-permukaan tiga dimensi, yang merupakan teras dalam bidang Rekabentuk Berbantuan Komputer. GEOGIRA akan menjadi lebih lengkap jika unsur-unsur tiga-dimensi ini dapat disertakan. Dengan itu, ia dijangka boleh menarik minat pengusaha-pengusaha dari kalangan berbagai disiplin supaya menghargai dan menghayati konsep-konsep matematik.

Program ini telah dikodkan secara berstruktur dan modular. Ini akan memudahkan lagi usaha untuk mengembangkannya pada masa akan datang mengikut perkembangan keperluannya.

#### RUJUKAN

- [1]. Shahrudin Salleh, *GEOGIRA I: Interfas Untuk Pemandaran Lengkung*, Matematika Jilid 7.1 UTM, 1992.
- [2]. Foley, van Dam, Feiner & Hughes, "Computer Graphics: Principles and Practice", 2nd Edition, Addison-Wesley, 1990.
- [3]. Chapra & Canale, "Numerical Methods for Engineers", 2nd Edition, McGraw-Hill, 1989.
- [4]. Scheid F., "2000 Solved Problems In Numerical Analysis", Mc-Graw-Hill, 1989.
- [5]. Barkakati, "Turbo C++ Bible", Sams, 1990.
- [6]. Halo Professional v2.0 Programmer's Guide & Library, Media Cybernetics, 1990.
- [7]. Rogers & Adams, "Mathematical Elements for Computer Graphics", 2nd Edition, Mc-Graw-Hill, 1990.