Prosiding Simposium Kebangsaan
Sains Matematik Ke-V (1992) 337-345

Automorfisma Terkeluar bagi Kumpulan Linear Khas Unjuran Matra-3 ke atas GF_4, $L_3(4)$

oleh

Abdullah Tahir Othman

Jabatan Matematik

Universiti Teknologi Malaysia

Abstrak

Kertas ini bertujuan untuk memberi suatu perwakilan pilihatur bagi kumpulan automorfisma penuh $L_3(4).D_{12}$. Kumpulan ini di pilih kerana ia merupakan salah satu dari subkumpulan maksimum bagi kumpulan Conway Co_3. $L_3(4).D_{12}$ boleh dihasilkan sebagai suatu kumpulan pilihatur di atas 42 titik yang minimum.

1. Pendahuluan

1.1 $L_3(4)$ ialah kumpulan linear khas unjuran matra-3 ke atas medan dengan empat unsur. Ianya simpel berperingkat 20160, dan bertindak 2-transitif ke atas 21 titik daripada geometri unjuran P(2,4). $L_3(4)$ berisomorfisma dengan M_{21}, penstabil 3 titik bagi kumpulan Mathieu M_{24} yang terkenal itu. Sungguhpun $L_3(4)$ mempunyai peringkat yang sama dengan A_8 yang juga simpel, tetapi kedua-duanya tidak berisomorfisma. Ini ialah kerana A_8 mempunyai unsur berperingkat 6 sedangkan $L_3(4)$ tidak mempunyai unsur sedemikian.

1.2 Dalam [3] telah ditunjukkan bahawa kumpulan automorfisma terkeluar penuh bagi $L_3(4)$ ialah $S_3 \times 2 \cong D_{12}$. Automorfisma pertama ialah yang diaruhkan oleh automorfisma medan tak remeh GF_4 . Yang kedua ialah automorfisma pepenjuru bagi $L_3(4)$ yang boleh dihasilkan oleh konjugatan dengan $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \omega & \\ & & 1 \end{bmatrix}$, di mana $\omega \in GF_4$ dan $1+\omega+\bar{\omega} = 0$. Kedua-dua automorfisma ini bersama dengan $L_3(4)$ menjana $L_3(4).S_3$. Automorfisma ketiga ialah automorfisma graf bagi $L_3(4)$ yang menukarkan 21 titik dengan 21 garis. Automorfisma ini yang berperingkat dua bersama dengan kedua-dua automorfisma terdahulu menjana $S_3 \times 2 \cong D_{12}$. Ini bermakna kumpulan automorfisma penuh $L_3(4).D_{12}$ hanya boleh direalisasikan sebagai kumpulan pilihatur di atas 42 titik yang minimum.

1.3 MOG (the Miracle Octad Generator) ialah suatu tatasusunan 6x4 yang telah ditemui oleh Curtis [8]. Ada dua versi MOG dalam percetakan : versi asal boleh dilihat dalam [7] manakala imej-cermin daripadanya digunakan dalam [6]. Versi kedua ini ditandakan sebagai M'.

2. Tatatanda

$H \leq G$	H subkumpulan daripada G.
A_n	kumpulan selang-seli ke atas n huruf.
S_n	kumpulan simetri ke atas n huruf.
$A \times B$	hasil darab langsung bagi A & B.
$A \cong B$	kumpulan-kumpulan A & B berisomorfisma.
$A{:}B$	perluasan belahan bagi A oleh B.
$A.B$	perluasan bagi A oleh B.
$L_m(n)$	kumpulan linear khas unjuran matra-m ke atas GF_n.
M_n	kumpulan Mathieu ke atas n titik.
$PGL_m(n)$	kumpulan linear umum unjuran matra-m ke atas GF_n.

$SL_m(n)$ kumpulan linear khas matra-m ke atas GF_n.

Hampir keseluruhan tatatanda yang digunakan dalam kertas ini ialah mengikut ATLAS [3]. Untuk seterusnya kita tandakan $L_3(4)$ dengan G.

3. Perwakilan pilihatur bagi G

Berdasarkan [6], kita ambil tiga titik tetap dengan tandaan 'x' di dalam rajah di bawah dan selebih lima titik daripada 'batu-bata' di sebelah kiri sebagai garis di ∞, $z = 0$. Satah afin 16-titik dikoordinatkan dengan paksi-x mengufuk (kiri ke kanan) dan paksi-y mencancang (atas ke bawah) supaya titik unjuran $(0,0,1)^t$ terletak di atas sebelah kiri.

$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\omega\\0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\bar{\omega}\\0\\1\end{pmatrix}$
x	$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\omega\\1\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\bar{\omega}\\1\\1\end{pmatrix}$
x	$\begin{pmatrix}1\\\omega\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\\omega\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\\omega\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\omega\\\omega\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\bar{\omega}\\\omega\\1\end{pmatrix}$
x	$\begin{pmatrix}1\\\bar{\omega}\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\\bar{\omega}\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\\bar{\omega}\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\omega\\\bar{\omega}\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\bar{\omega}\\\bar{\omega}\\1\end{pmatrix}$

M'

$\xrightarrow{\quad}$ x

		0	1	ω	$\bar{\omega}$	y $\downarrow$
∞	0					0
x	1					1
x	ω					ω
x	$\bar{\omega}$					$\bar{\omega}$

M'

Rajah I

Seterusnya kita tandakan 21 titik dengan integer seperti berikut:

21	20	1	2	3	4
x	19	5	6	7	8
x	18	9	10	11	12
x	17	13	14	15	16

Rajah 2

Dengan bantuan CAYLEY [2], kita dapati G dijana oleh dua pilihatur berikut [9] :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim (1,2)(3,4)(5,6)(7,8)(9,10)(11,12)(13,14)(15,16) = u$$

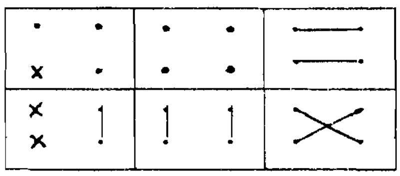
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega & \omega & \bar{\omega} \\ 0 & 1 & \omega \end{pmatrix} \sim (1,7,6,12,5,13,19)(2,9,4,16,17,8,3)(10,11,14,20,18,$$

$$15,21) = v$$

iaitu, $G = < u,v >$.

4. Perwakilan pilihatur bagi $G.S_3 \cong P\Gamma L_3(4)$

4.1 Automorfisma medan bagi G berpadanan dengan

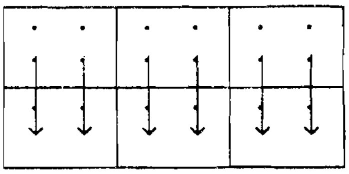


iaitu suatu pilihatur

$$w = (3,4)(7,8)(11,16)(12,15)(9,13)(10,14)(17,18).$$

Unsur ini bersama dengan G menjana $G.2_2 \cong P\Sigma L_3(4)$.

4.2 Automorfisma pepenjuru bagi G adalah setara dengan tindakan berikut :



iaitu $x = (5,9,13)(6,10,14)(7,11,15)(8,12,16)(19,18,17)$.

Unsur ini bersama dengan G menjana $G.3 \cong PGL_3(4)$.

4.3 Dalam [6] telah ditunjukkan bahawa kedua-dua automorfisma di atas bersama dengan G menjana subkumpulan maksimum $G.S_3$ bagi M_{24}, iaitu,

$$G.S_3 = < u, v, w, x >.$$

5. Perwakilan pilihatur bagi $G.D_{12}$

5.1 Untuk mendapatkan kumpulan automorfisma terkeluar penuh bagi G, selain daripada kedua-dua automorfisma yang telah dibincangkan di bahagian 4, kita juga perlu menimbangkan automorfisma graf yang menukarkan 21 titik dengan 21 garis. 21 garis ini adalah 21 pentad yang bergabung dengan satu triad untuk membentuk oktad, iaitu, kesemua 21 oktad yang mengandungi ketiga-tiga titik tetap. Kita boleh wakilkan 21 pentad tersebut di dalam rajah berikut :-

∞	e	a	b	c	d
x	e	a	b	c	d
x	e	a	b	c	d
x	e	a	b	c	d

(∞)

	0	a	a	a	a
x		b	b	b	b
x		c	c	c	c
x		d	d	d	d

(0)

		a	c	d	b
x	1	c	a	b	d
x		d	b	a	c
x		b	d	c	a

(1)

		a	b	d	c
x		c	d	b	a
x	ω	b	a	c	d
x		d	c	a	b

(ω)

		a	b	c	d
x		c	d	a	b
x		d	c	b	a
x	$\bar{\omega}$	b	a	d	c

($\bar{\omega}$)

Dengan menggunakan integer yang berpadanan dalam rajah 2, tiap satu dari 21 pentad (garis) di atas boleh diwakilkan oleh suatu set yang terdiri dari lima integer dan dijadualkan seperti di bawah :

Garis	Set titik	Perwakilan
L1	{ 21,1,5,9,13 }	22
L2	{ 21,2,6,10,14 }	23
L3	{ 21,3,7,11,15 }	24
L4	{ 21,4,8,12,16 }	25
L5	{ 19,1,6,11,16 }	26
L6	{ 19,2,5,12,15 }	27
L7	{ 19,4,7,10,13 }	28
L8	{ 19,3,8,9,14 }	29
L9	{ 18,1,8,10,15 }	30
L10	{ 18,2,9,7,16 }	31
L11	{ 18,5,14,11,4 }	32
L12	{ 18,13,6,3,12 }	33
L13	{ 17,1,7,12,14 }	34
L14	{ 17,2,13,8,11 }	35

L15	{ 17,5,10,3,16 }	36
L16	{ 17,9,6,15,4 }	37
L17	{ 20,21,19,18,17 }	38
L18	{ 20,1,2,3,4 }	39
L19	{ 20,5,6,7,8 }	40
L20	{ 20,9,10,11,12 }	41
L21	{ 20,13,14,15,16 }	42

5.2 Perwakilan pilihatur bagi $G.S_3$ diatas 42 titik-titik.

Sekarang kita perhatikan tindakan keempat-empat unsur yang telah dibincangkan dalam bahagian 3 dan 4 ke atas 21 garis tersebut. Pertama, tindakan involusi u ke atas 21 garis, katakan garis L1, ialah sebagaimana berikut :

L1 ≡ { 21,1,5,9,13 } $\longleftrightarrow$ { 21,2,6,10,14 } ≡ L2, i.e. 22 $\longleftrightarrow$ 23.

Jadi dengan tindakan di atas bersama dengan u kita akhirnya memperolehi :

a = (1,2)(3,4)(5,6)(7,8)(9,10)(11,12)(13,14)(15,16)(22,23)(24,25)
(26,27)(28,29)(30,31)(32,33)(34,35)(36,37).

Dengan cara yang sama, kita dapat ketiga-tiga unsur berikut yang diaruhkan oleh v, w dan x masing-masingnya :

b = (1,7,6,12,5,13,19)(2,9,4,16,17,8,3)(10,11,14,20,18,15,21)(22,
28,26,34,40,33,27)(23,41,32,42,38,30,24)(25,36,35,29,39,31,37)

c = (3,4)(7,8)(9,13)(10,14)(11,16)(12,15)(17,18)(24,25)(28,29)
(30,34)(31,35)(32,36)(33,37)(41,42)

d = (5,9,13)(6,10,14)(7,11,15)(8,12,16)(17,19,18)(26,30,34)
(27,31,35)(28,32,37)(29,33,36)(40,41,42).

Berdasarkan bahagian 4, kita perolehi :

$G = \langle a,b \rangle$,

$G.2_2 = \langle a,b,c \rangle$,

$G.3 = < a,b,d >$,

$G.S_3 = < a,b,c,d >$,

5.3 Perwakilan pilihatur bagi $G.2_1$.

Dalam bahagian ini kita mencari suatu involusi e yang akan menukarkan 21 titik dengan 21 garis. Daripada [3] diketahui bahawa pemusat bagi e dalam G ialah suatu subkumpulan berperingkat 72 dan subkumpulan ini ialah salah satu daripada subkumpulan maksimum bagi G dan berbentuk $3^2:Q_8$, dimana Q_8 ialah kumpulan quaternion berperingkat 8. Perhatikan bahawa suatu 3-subkumpulan Sylow daripada G berisomorfisma dengan $C_3 x\ C_3$ dan penormal, N, bagi 3-subkumpulan Sylow ini dalam G ialah kumpulan $3^2:Q_8$, iaitu,

$$N \cong 3^2:Q_8 \leq G \leq S_{42} .$$

Sekarang e boleh diperolehi dengan mendapatkan pemusat, C, bagi N dalam S_{42}. Pemusat ini ditemui sebagai kumpulan 4-Klein, iaitu, $C \cong V_4$. Oleh kerana salah satu daripada involusi C tidak mempunyai titik tetap, maka involusi ini ialah e. Jadi kita perolehi

e = (1,26)(2,36)(3,31)(4,25)(5,27)(6,30)(7,24)(8,37)(9,29)(10,23)
(11,34)(12,32)(13,38)(14,41)(15,40)(16,39)(17,35)(18,33)
(19,22)(20,42)(21,28),

dan $G.2_1 = < a,b,e >$.

5.4 Perwakilan-perwakilan pilihatur bagi $G.2_3$, $G.2^2$ dan $G.D_{12}$.

Jelaslah daripada keputusan di atas kita mempunyai :

(i) $G.2_3 = < a,b,ce > = < a,b,f >$,

dengan $f = (ce)^3$ = (1,22)(2,23)(3,24)(4,25)(5,26)(6,27)(7,29)
(8,28)(9,34)(10,35)(11,36)(12,37)(13,30)(14,31)
(15,33)(16,32)(17,41)(18,42)(19,40)(20,38)(21,39).

(ii) $G.2^2 \cong G.2_1.2_2 = \langle a,b,c,e \rangle$, dan

(iii) $G.D_{12} \cong G.S_3 x2 = \langle a,b,c,d,e \rangle$.

6. Rujukan

[1] N.BIGGS and A.T.WHITE, *Permutation Groups and Combinatorial Structures,* Cambridge University Press(1979).

[2] J.J.CANNON, *A Language for Group Theory,* The Cayley Manual, Sydney University (1982).

[3] J.H. CONWAY, R.T. CURTIS, S.P. NORTON, R.A. PARKER and R. AWILSON, *An Atlas of Finite Groups,* Oxford University Press (1985).

[4] J.H.CONWAY, *Three Lectures on Exceptional Groups,* Chap. VII in 'Finite Simple Groups'(M.B.Powell and G.Higman, Eds) (1971).

[5] J.H. CONWAY, *Hexacode and Tetracode - MOG and MINIMOG* in 'Computational Group Theory' (Ed. M.D.Atkinson), 359-365, Academic Press, London, Orlands & N.York (1984).

[6] R.T.CURTIS, *Further Elementary Techniques Using the Miracle Octad Generator,* Proceedings of the Edinburgh Math. Soc. (1989) 32, 345-353.

[7] R.T.CURTIS, *A New Combinatorial Approach to M_{24},* Math. Proc. Cambridge Phil. Soc (1976), 79, 25-41.

[8] R.T.CURTIS, *On the Mathieu Group M_{24} and Related Topics,* Ph.D. Thesis, Cambridge (1972).

[9] A.T.OTHMAN, *Permutation representations of extensions of the projective special linear group $L_3(4)$ and the projective special unitary group $U_4(3)$,* Ph.D Thesis, University of Birmingham (1990).