'Resolvent' Dan Penggunaannya Dalam Mendapatkan Vektoreigen Dan Nilaieigen Suatu Spektrum Yang Diskrit Dengan Melibatkan Usikan Bagi Masalah Tak Degenerat.

Shamsuddin bin Ahmad
Jabatan Matematik
Fakulti Sains
Universiti Teknologi Malaysia.

Teori asas 'Resolvent' dibentangkan. Dari bentuk perwakilan spektranya ia dikembangkan dalam bentuk siri Laurent sebelum digunakan untuk mencari nilaieigen dan vektoreigen.

1. Pengenalan

Kita selalu bertemu dengan persamaan-persamaan yang berbentuk

$$(\lambda\hat{I} - \hat{A})\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{Y} \qquad (1.1)$$

dalam banyak bidang-bidang matematik; dimana A disini adalah operator liniar dan $\lambda \epsilon C$ adalah suatu parameter.

Persamaan

$$(\lambda\hat{I} - \hat{A})\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{0} \qquad (1.2)$$

adalah suatu kes khusus bagi (1.1) yang kita kenali sebagai persamaan nilaieigen bagi (1.1). Penyelesaian $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{0}$ bagi (1.2) dikenali sebagai penyelesaian remeh.

Jika dianggapkan disini yang operator $(\lambda\hat{I} - \hat{A})$ mempunyai suatu operator songsang $\hat{G} = (\lambda\hat{I} - \hat{A})^{-1}$, untuk suatu nilai λ tertentu; maka $\hat{G}$ ini dipanggil operator 'resolvent' atau operator Green bagi (1.1). Dan jika $\hat{G}$ ini wujud, maka wujud -penyelesaian unik

$$\underset{\sim}{X} = \hat{G}\underset{\sim}{Y}$$

untuk nilai λ ini dan untuk $\underset{\sim}{Y}$ yang arbitrari. Dan lagi persamaan nilaieigen (1.2) hanya mempunyai penyelesaian remeh $\underset{\sim}{X} = 0$.
Nilai-nilai λ dimana (1.1) memberikan suatu penyelesaian unik untuk semua nilai $\underset{\sim}{Y}$ dipanggil nilai-nilai nalar bagi $\hat{A}$. Penyelesaian yang tidak remeh diatas dipanggil vektoreigen yang bersepadanan dengan nilai eigen λ.
Jika λ adalah nilaieigen bagi (1.1) dan jika (1.1) memberikan suatu penyelesaian untuk nilai Y tertentu, maka penyelesaian ini bukanlah merupakan satu-satunya penyelesaian tetapi kita masih mendapat penyelesaian lain.

Nilai-nilai λ yang tidak nalar dipanggil sepktrum bagi operator $\hat{A}$. Khususnya disini semuanya nilai-nilaieigen adalah merupakan suatu spektrum tetapi tidak semua titik-titik spektrum merupakan nilai-nilaieigen.

II. Perwakilan spektra bagi 'resolvent'

Jika $\{\phi_n\}$ adalah suatu set fungsieigen yang orthonormal lengkap bagi operator $\hat{A}$ yang swadampingan dan $\{\lambda_n\}$ adalah set bagi nilai-nilaieigen, kita boleh menulis

$$\hat{G} = (z - \hat{A})^{-1} = \sum_n \frac{1}{z - \lambda_n} \hat{P}_n \qquad (2.1)$$

dimana $z = \lambda\varepsilon\{\lambda_n\}$ dan $\hat{P}_n$ adalah operator unjuran yang ditakrifkan oleh

$$\hat{P}_n\phi = c_n\phi_n, \ \phi = \sum_n c_n \phi_n \text{ dengan } c_n = (\phi_n,\phi)$$

dan mempunyai sifat-sifat

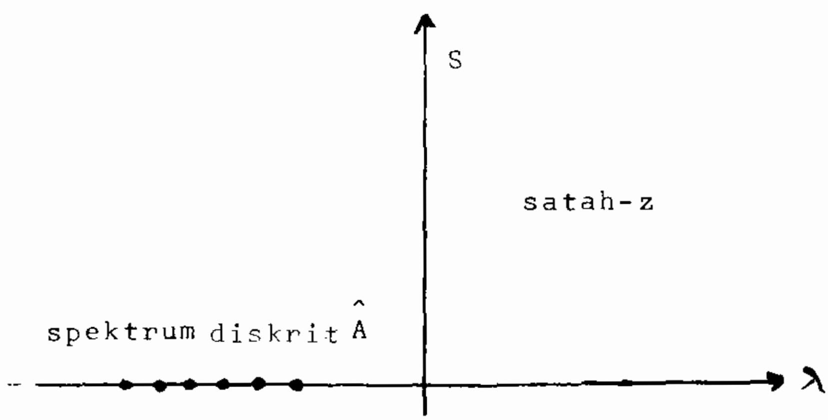
$$\hat{P}_m \hat{P}_n = 0 \text{ jika } m \neq n$$

$$\hat{P}_n^2 = \hat{P}_n \text{ jika } m = n$$

Maka kita panggil (2.1) sebagai perwakilan spektra bagi resolvent.

Perhatikan disini $\hat{G}$ wujud jika dan hanya jika $\lambda = z$ tidak terkandung dalam subruang tertutup yang dijana oleh $\{\lambda_n\}$. $\hat{G}$ juga mempunyai kutub mudah peringkat pertama pada kedudukan-kedudukan nilai-nilaieigen yang diskrit.

Disebabkan $\hat{A}$ adalah 'swadampingan', semua nilai-nilaieigen adalah nyata dan singulariti $\hat{G}$ terletak pada paksi-λ nyata. Jika $Im\{z\} \neq 0$, $z \neq \{\lambda_n\}$ bermakna $\hat{G}(z)$ adalah suatu fungsi analitik didalam satah-z komplek kecuali pada titik-titik dimana yang bersepadanan dengan nilai-nilaieigen bagi A.



Rajah 2.1. Sifat analitik bagi $\hat{G}(z) = (z - \hat{A})^{-1}$. Titik-titik singular pada paksi-λ nyata dan memberikan maklumat mengenai nilai-nilaieigen dan fungsi-fungsieigen bagi $\hat{A}$.

III. Pengembangan-pengembangan usikan bagi $\hat{G}$, $\hat{P}$ dan $(\hat{A} + \varepsilon\hat{V})\hat{P}$

Kita misalkan $\hat{A}$ dan $\hat{A} \pm \varepsilon\hat{V}$ adalah operator swadampingan dengan 'resolvent'

$$\hat{G}_o = \frac{1}{\hat{A} - z} \qquad (3.1)$$

$$G = \frac{1}{\hat{A} + \varepsilon\hat{V} - z} \qquad (3.2)$$

dimana Σ adalah suatu parameter yang menggambarkan usikan dan $\hat{V}$ adalah suatu operator swadampingan.

Disini z boleh dianggap mempunyai nilai yang kompleks.

Kita boleh menulis $\hat{G}$ sebagai

$$\hat{G} = \hat{G}_o - \hat{G}_o\varepsilon\hat{V}\hat{G} \qquad (3.3)$$

atau

$$\hat{G} = \sum_n (-\varepsilon)^n\hat{G}_o(\hat{V}\hat{G}_o)^n \qquad (3.4)$$

dengan menggunakan iterasi.

Disebabkan kita menganggap yang spektrum bagi A semuanya diskrit $\hat{G}_o(z) = \frac{1}{\hat{A} - z}$ adalah suatu fungsi analitik dalam z dengan singulariti-singulariti pada paksi nyata. Oleh itu kutubnya juga terletak pada paksi nyata dan ianya merupakan nilai-nilai eigen bagi $\hat{A}$.

Dari $\hat{A}\phi_i = \lambda_i\phi_i$, kita dapat suatu hubungan yang setara dengannya iaitu

$$\hat{A}\hat{P}_i = \lambda_i\hat{P}_i$$

dimana λ_i adalah nilai-nilaieigen dan $\hat{P}_i$ adalah suatu 'pengunjur' keatas vektoreigen ϕ_i.

Untuk nilai ε yang cukup kecil, kita ada suatu kontor Γ_o didalam satah-z sehingga nilaieigen tak terusik λ_o terletak di dalam kontor Γ_o. Oleh itu

$$\oint_{\Gamma_o} \hat{G}_o(z)\, dz = \oint_{\Gamma_o} \sum_n \frac{\hat{P}_n}{\lambda_n - z}\, dz$$

$$\oint_{\Gamma_o} \frac{\hat{P}_o}{\lambda_o - z} = - 2\pi i\, \hat{P}_o$$

maka $$\hat{P}_o = - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_o} \hat{G}_o(z)\, dz \qquad (3.5)$$

dimana $\hat{P}_o$ pengunjur keatas subruang H yang dijana oleh vektoreigen bagi $\hat{A}$ yang dipunyai oleh λ_o.

Dari bab I, kita ketahui $(\hat{A} - z)\hat{G}_o = I$ (3.6)

Oleh itu

$$\hat{A}\hat{P}_o = - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_o} \hat{A}\hat{G}_o\, dz$$

$$= - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_o} z\hat{G}_o\, dz \qquad (3.7)$$

Sekarang apa yang kita mahu adalah pengembangan P dan $(\hat{A} + \varepsilon\hat{P})$ dalam kuasa ε, dimana $\hat{P}$ projek keatas subruang yang dijana oleh vektor-vektoreigen yang dipunyai oleh nilai-nilaieigen λ bagi $\hat{A} + \varepsilon\hat{V}$ yang menuju λ_o bila had $\varepsilon \to 0$.

Jika untuk ε kecil, semua λ menuju λ_o yang terletak dalam kontor Γ_o.

Dengan menggunakan analogi (3.6), kita perolehi

$$\hat{P} = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_o} \hat{G}(z)\,dz \qquad (3.8)$$

dan dari analogi (3.7), kita perolehi

$$(\hat{A} + \varepsilon\hat{V})\hat{P} = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_o} z\hat{G}(z)\,dz \qquad (3.9)$$

Gantikan (3.4) dalam (3.8), maka diperolehi

$$\hat{P} = \hat{P}_o + \sum_{n=1}^{n} (-\varepsilon)^n \hat{A}^n \qquad (3.10)$$

dimana

$$\hat{A}^n = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_o} \hat{G}_o(\hat{V}\hat{G}_o)^n\,dz \qquad (3.11)$$

Untuk menilaikan $\hat{A}^n$ ini kita mesti gunakan pengembangan $\hat{G}_o$ dalam siri Laurent, iaitu

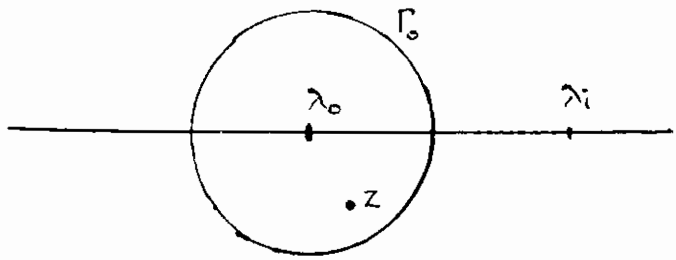
$$\hat{G}_o = \frac{\hat{P}_o}{\lambda_o - z} + \sum_{j\neq 0}^{\infty} \frac{\hat{P}_j}{\lambda_j - z} \qquad (3.12)$$

$$= \frac{\hat{P}_o}{\lambda_o - z} + \sum_{j\neq 0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-\lambda_o)^{k-1}}{(\lambda_j - \lambda_o)^k}\hat{P}_j \qquad (3.13)$$

dimana sebutan pertama mempunyai satu kutub mudah di dalam Γ_o pada $z = \lambda_o$ dan sebutan kedua merupakan suatu siri geometri yang menumpu jika

$$\left|\frac{z-\lambda_o}{\lambda_j - \lambda_o}\right| < 1$$

dengan kata lain, kita perolehi hanyalah kuasa positif bagi $(z - \lambda_o)$; yang mana ianya benar untuk fungsi analitik.



Ingat sekarang apa yang kita mahu adalah mengira reja $\hat{A}^n$ bagi kutub $\hat{G}(\hat{V}\hat{G}_o)^n$ pada λ_o. Tetapi kita ketahui yang reja bagi kutub $\hat{G}_o(\hat{V}\hat{G}_o)^n$ pada λ_o adalah pekali C_{-1} bagi sebutan $(z - \lambda_o)^{-1}$ dalam pengembangan Laurent $\hat{G}_o(\hat{V}\hat{G}_o)^n$. Kita boleh memperolehi pengembangan Laurent ini secara mudah dengan mendarabkan bersama-samanya setiap pengembangan Laurent bagi $\hat{G}_o$ sebanyak $(n + 1)$ kali, kemudian barulah diambil pekali bagi sebutan yang mengandungi $(z - \lambda_o)^{-1}$.

Contoh

$$\hat{A}^1 = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_o}\left\{\frac{\hat{P}_o}{\lambda_o - z} + \sum_{j\neq 0}^{\infty}\hat{P}_j\left(\frac{1}{\lambda_j - \lambda_o} + \frac{z - \lambda_o}{(\lambda_j - \lambda_o)^2} + \ldots\right)\right\}$$

$$\times\ V \times \left\{\frac{\hat{P}_o}{\lambda_o - z} + \sum_{k\neq 0}^{\infty}\hat{P}_k\left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_o} + \frac{z - \lambda_o}{(\lambda_k - \lambda_o)^2} + \ldots\right)\right\}dz$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_o}\left\{\left(\frac{\hat{P}_o}{\lambda_o - z}\ \hat{V}\sum_{k\neq 0}^{\infty}\frac{\hat{P}_k}{k - \lambda_o}\right) + \left(\sum_{j\neq 0}^{\infty}\frac{\hat{P}_j\hat{V}\hat{P}_o}{(\lambda_j - \lambda_o)(\lambda_o - z)}\right)\right\}dz$$

Oleh itu

$$\hat{A}^1 = \hat{P}_o\,\hat{V}\sum_{k\neq 0}^{\infty}\frac{\hat{P}_k}{\lambda_k - \lambda_o} + \sum_{j\neq 0}^{\infty}\frac{\hat{P}_j\hat{V}\hat{P}_o}{\lambda_j - \lambda_o} \qquad (3.14)$$

IV. <u>Pengiraan bagi mendapatkan vektoreigen ϕ dan nilaieigen λ betul kepada peringkat tertentu</u>

(a) Pengiraan vektoreigen bagi operator $\hat{A} + \varepsilon\hat{V}$.

Jika λ_o tak degenerat, $\hat{A}\phi_o = \lambda_o\phi_o$; dimana ϕ_o adalah vektoreigen bagi A yang bersepadanan dengan λ_o. Misalkan $(\hat{A} \pm \varepsilon\hat{V})\phi = \lambda\phi$ dimana $\lim_{\varepsilon\to o} \phi_1 = \phi_o$ dan $\lim_{\varepsilon\to o}\lambda = \lambda_o$, maka dari sifat keselanjaran bagi pendarapan skalar

$$(\phi, \phi_o) \neq 0, \text{ jika } \lim_{\varepsilon\to o} (\phi, \phi_o) = 1$$

maka dipilihlah $(\phi, \phi_o) = 1$ bagi memudahkan seperti yang biasa dilakukan.

Jika $\hat{P}$ unjurkan sebarang $\underset{\sim}{X} \in H$ seluruhnya ke dalam ϕ kita boleh mengambil sebarang $\underset{\sim}{X} \in H$ untuk menjana ϕ. Walaubagaimanapun kita mesti pastikan yang $\hat{P}\underset{\sim}{X} \neq 0$. Pilihan yang jelas yang boleh dibuat adalah dengan mengambil $\underset{\sim}{X} = \phi_o$ kerana kita ketahui yang $(\phi, \phi_o) \neq 0$, iaitu ϕ_o mempunyai komponen yang tidak sifar di dalam arah ϕ. Oleh itu

$$\hat{P}\phi_o = \phi \qquad (4.1)$$

Sebagai contoh kita ambil pengiraan dalam sebutan betul sehingga peringkat pertama. Dari (3.10) didapati

$$\hat{P} = \hat{P}_o + (-\varepsilon)\hat{A}^1$$

dan gantikan (3.14) dalam persamaan di atas, kemudian masukkan dalam (4.1) maka didapati

$$\phi = \phi_o - \varepsilon \sum_{i\neq 0} \frac{\hat{P}_i \hat{V} \phi_o}{\lambda_i - \lambda_o} \qquad (4.2)$$

Misalkan kita kembangkan ϕ dalam suatu siri Fourier $\phi = \sum_j C_j \phi_j^o$ dalam sebutan-sebutan asas yang takterusik $\{\phi_j^o\}$, dimana $\phi_o^o = \phi_o$ dengan $\hat{A}\phi_j^o = \lambda_j\phi_j^o$

Oleh itu

$$C_j = (\phi_j^o, \phi) = (\phi_j^o, \phi_o) - e \sum_{i \neq 0} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_o} (\phi_j^o, \hat{P}_i \hat{V} \phi_o)$$

$$= \delta_{jo} - \sum \frac{V_{jo}}{\lambda_j - \lambda_o} \Bigg|_{j \neq 0} \qquad (4.3)$$

dimana $V_{jo} = (\Phi_j^o, \hat{V}\,\Phi_o)$.

Bandingkan (4.3) dengan siri Fourier, didapati

$$\phi = \phi_o - \varepsilon \sum_{j \neq 0} \frac{V_{jo}}{\lambda_j - \lambda_o} \phi_j^o \qquad (4.4)$$

iaitu pembetulan betul kepada ε(peringkat pertama).

(b) Pengiraan nilaieigen λ bagi operator $\hat{A} + \varepsilon\hat{V}$.

Untuk mendapatkan nilaieigen λ bagi $\hat{A} + \varepsilon\hat{V}$, kita mesti mendapatkan bentuk tak tersirat bagi $(\hat{A} + \varepsilon\hat{P})V$.

Dari (3.9) didapati

$$(\hat{A} + \varepsilon\hat{V} - \lambda_o)\hat{P} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_o} (z - \lambda_o)\hat{G}(z)\, dz \qquad (4.5)$$

dan dengan menggunakan cara yang sama seperti sebelumnya kita boleh menilaikan bahagian kanan dari (4.5) dengan memasukkan (3.4) dan (3.13) kedalamnya, iaitu

(i) Misalkan n=0, maka $\hat{G}(z) = \hat{G}_o$ dan

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_o} (z - \lambda_o)\Big\{\frac{\hat{P}_o}{\lambda_o - z} +$$

$$\Big\{\sum_{i \neq 0} \hat{P}_i \quad \frac{1}{\lambda_i - \lambda_o} + \frac{z - \lambda_o}{(\lambda_i - \lambda_o)^2} + \ldots\ldots \Big\}\, dz$$

dimana tidak ada sebutan-sebutan dalam kuasa $(\lambda_o - z)^{-1}$.

(ii) Misalkan n = 1, maka kita mesti timbangkan sebutan $(-\varepsilon)\hat{G}_o\hat{V}\hat{G}_o$ oleh itu kita mesti nilaikan

$$-\frac{1}{2\pi i}(-\varepsilon)\oint_{\Gamma_o}(z-\lambda_o)\,\frac{\hat{P}_o}{\lambda_o - z} + \sum_{i\neq 0}\hat{P}_k\,\frac{1}{\lambda_i-\lambda_o} + \frac{z-\lambda_o}{(\lambda_k-\lambda_o)^2} + \ldots)\}\ \times\ \hat{V}\ \times\{\frac{\hat{P}_o}{\lambda - z}\quad \sum_{k\neq 0}\hat{P}_k\left(\frac{1}{\lambda_k-\lambda_o} + \ldots\right.$$

$$\frac{z-\lambda_o}{(\lambda_k-\lambda_o)^2} + \ldots)\}\ dz$$

dan didapati hanya sebutan $-(\hat{P}_o\ \hat{V}\ \hat{P}_o)(-\varepsilon)$ yang mengandungi sebutan $(z-\lambda_o)^{-1}$. Oleh itu didapati

$$(\hat{A} + \varepsilon\hat{V} - \lambda_o)\hat{P} = \varepsilon\hat{P}_o\ \hat{V}\ \hat{P}_o \qquad (4.6)$$

atau

$$(\hat{A} + \varepsilon\hat{V})\hat{P} = \lambda_o\hat{P} + \varepsilon\hat{P}_o\ \hat{V}\ \hat{P}_o \qquad (4.6)$$

Dan sekarang barulah kita boleh mengira nilaieigen λ betul kepada peringkat pertama dalam ε.

Kita tuliskan yang masalah nilaieigen untuk $\hat{A} + \varepsilon\hat{V}$ adalah

$$(\hat{A} + \varepsilon\hat{V})\hat{P} = \hat{P} \qquad (4.7)$$

Tetapi kita dapati surihan bagi matriks $\hat{P}$ iaitu Tr P = 1 untuk kes yang 'tak degenerat' . Oleh itu

$$\mathrm{Tr}\ (\hat{A} + \varepsilon\hat{V})\hat{P}\} = \lambda \qquad (4.8)$$

Dari (4.6)', didapati

$$\lambda = \mathrm{Tr}\ (\hat{A} + \varepsilon\hat{V})\hat{P} = \lambda_o + \varepsilon\,\mathrm{Tr}\ (\hat{P}_o\ \hat{V}\ \hat{P}_o)$$

$$= \lambda_o + \varepsilon\mathrm{Tr}\ (\hat{V}\ \hat{P}_o) \qquad (4.9)$$

kerana $\mathrm{Tr}(\hat{P}_o\ \hat{V}\ \hat{P}_o) = \mathrm{Tr}\ (\hat{V}\ \hat{P}_o\hat{P}_o) = \mathrm{Tr}\ (\hat{V}\ \hat{P}_o)$.

Kita juga ketahui yang surihan bagi suatu matriks tidak bergantung kepada asas yang digunakan, oleh itu kita boleh gunakan asas $\{\phi_i^o\}$ untuk menilaikan $\mathrm{Tr}\ (\hat{V}\hat{P}_o)$. Maka

$$\mathrm{Tr}\ (\hat{V}\ \hat{P}_o) = \sum_i\ (\phi_i^o, \hat{V}\ \hat{P}_o\ \phi_i^o) = \sum_i\ \delta_{oi}\ (\phi_i^o\ ,\ \hat{V}\ \phi_o)$$

$$= (\phi_o,\ \hat{V}\ \phi_o).$$

Oleh sebab itu pembetulan peringkat pertama bagi nilai eigen diberikan oleh

$$\lambda = \lambda_o + \varepsilon\ (\phi_o,\ \hat{V}\ \phi_o) \qquad (4.10)$$

Sekarang kita cuba dapatkan pembetulan peringkat kedua bagi nilaieigen dalam sebutan ε^2. Untuk ini mesti mendapatkan nilai bahagian kanan (4.5) untuk $n = 2$. Dalam mendapatkan nilai tersebut kita gunakan cara yang sama seperti yang kita lakukan sebelum ini. Iaitu

$$\hat{Q} = -\frac{1}{2\pi i}\oint (z - \lambda_o)(-\varepsilon\ )^2\hat{G}_o\hat{V}\hat{G}_o\hat{V}\hat{G}_o\ \ dz$$

$$\hat{Q} = \varepsilon^2 (\hat{P}_o \hat{V} \hat{P}_o \hat{V} \sum_{1 \neq 0} \frac{\hat{P}_i}{\lambda_i - \lambda_o} + \hat{P}_o \hat{V}_o \sum_{i \neq 0} \frac{\hat{P}_i}{i - o} \hat{V}\hat{P}_o +$$

$$\sum_{1 \neq 0} \frac{\hat{P}_i}{\lambda_i - \lambda_o} \hat{V} \hat{P}_o \hat{V} \hat{P}_o)$$

Oleh itu $\lambda^{(2)} = \text{Tr}\ \hat{Q} = - \varepsilon^2 \sum_{i \neq 0} \sum_{j=0} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_o} (\phi_i, \hat{V} \hat{P}_1 \hat{V} \hat{P}_o \phi_j)$

$$= - \varepsilon^2 \sum_{i \neq 0} \frac{1}{\lambda_i - \lambda\lambda_o} (\phi_o, \hat{V} \hat{P}_i \hat{V} \phi_o) \qquad (4.11)$$

di mana $\text{Tr}(\hat{P}_o \hat{V} \hat{P}_o \hat{V}) \sum_{i \neq 0} \frac{\hat{P}_i}{\lambda_i - \lambda_o}) =$

$$\text{Tr}\ (\sum_{i \neq 0} \frac{\hat{P}_i}{\lambda_i - \lambda_o} \hat{V} \hat{P}_o \hat{V} \hat{P}_o) = 0$$

Tapi $\hat{P}_i \hat{V} \phi_o = (\hat{V} \phi_o, \phi_i) \phi_i$ dan digantikan dalam (4.11).

didapati

$$\lambda^{(2)} = -\varepsilon^2 \sum_{i \neq 0} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_o} (\phi_o, (\hat{V}\phi_o, \phi_i) \hat{V} \phi_i)$$

$$= \varepsilon^2 \sum_{i \neq 0} \frac{|(\phi_o, \hat{V}\phi_i)|^2}{\lambda_o - \lambda_i} \qquad (4.12)$$

Oleh itu nilaieigen λ betul kepada peringkat kedua dalam sebutan λ ialah

$$\lambda = \lambda_o + \varepsilon(\phi_o, \hat{\hat{V}}\phi_o) + \varepsilon^2 \sum_{i \neq 0} \frac{|(\ _o, V \phi_i)|^2}{\lambda_o - \lambda_i} \qquad (4.13)$$

V. Perbincangan

Kita telah lihat bagaimana kita menggunakan tiori 'resolvent' dalam mendapatkan nilaieigen dan vektoreigen bagi suatu operator yang swadampingan dengan melibatkan usikan untuk masalah 'tak degenerat. Kalau diperhatikan nilaieigen dan vektoreigen yang didapati dengan cara ini dan dengan cara yang lain, memang sabenarnya sama. Yang berbeza cuma dari segi pendekatan dalam mendapatkan nilai-eigen dan vektoreigen tersebut. Tetapi buat masa ini orang lebih suka menggunakan cara yang telah diperlihatkan di atas disebabkan pendekatan yang digunakan lebih mudah dan bersesuaian dengan tiori aljibra liniar dan tiori analisis matriks serta tiori analisis fungsian.

VI. Rujukan

1. Lusternik and Sobolev: Elements of Functional Analysis, Frederick Ungar Publishing Co. New York (1965).

2. E.N. Economou: Green's Functions in Quantum Physics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1979).

3. J. Mathon: Nota-nota Kuliah M.Sc dalam 'Functional Analysis' (1981/82).

4. Messiah, A: Quantum Mechanics, Vol II, North Holland Publication (1973).

5. L.D. Landau, E.M. Lifshitz: Quantum Mechanics, 3rd Revised edition (1977).