PERSAMAAN CIRIAN MATRIKS SEKUTUAN DARIPADA SUATU GRAF KEKISI

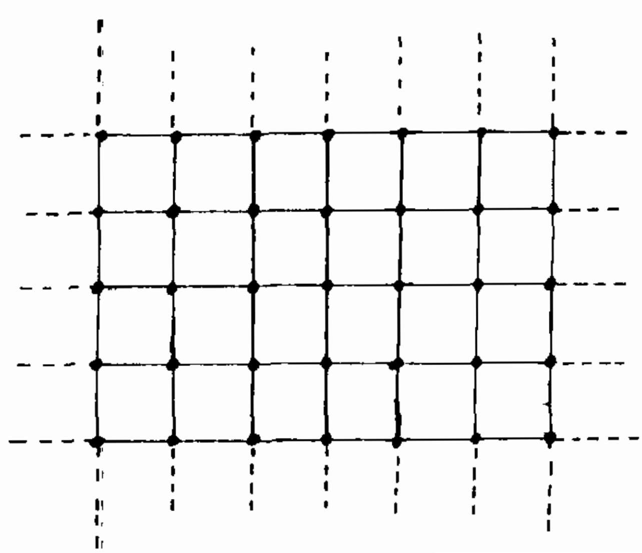
Oleh : Abdullah Tahir Hj. Othman
Jabatan Matematik
Fakulti Sains
Universiti Teknologi Malaysia

Pra kata

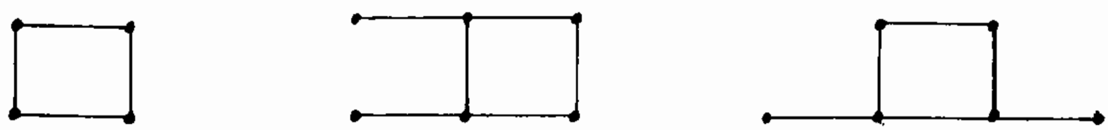
Nilaieigen daripada graf, khususnya graf kekisi mempunyai sifat-sifat yang menarik dan telah diberi perhatian yang serius di akhir-akhir ini kerana penggunaannya di dalam bidang fizik, kimia dan kajihayat. Contoh-contoh penggunaan di dalam kimia dapat di lihat dalam (1), manakala di dalam Fizik pula dalam (2). Hakikat ini mendorong saya untuk menulis secara ringkas tentang tajuk di atas.

Pendahuluan

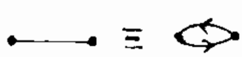
Graf-graf yang akan diberi perhatian nanti adalah graf-graf kekisi segiempat sama yang merupakan subgraf daripada graf infinit berikut:



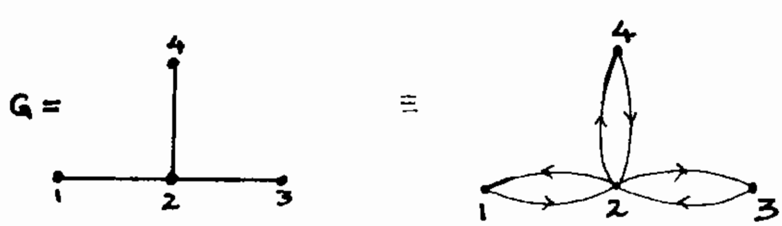
Contoh-contoh subgraf adalah:-



Matriks 'adjacency', Ad(G) daripada graf G dengan n bucu-bucu ialah matriks (a_{ij}) yang bersusunan n x n , di mana a_{ij} = 1 jika bucu i dihubungkan ke bucu j dan sifar pada lainnya. Matriks sekutuan A(G) daripada graf G pula ialah matriks dengan unsur-unsur a_{ij} sebarangan dan tak sifar jika ujud sisi berarah daripada graf menghubungkan bucu i ke bucu j. Spectrum (nilai-nilaieigen) daripada matriks ini dipanggil spectrum daripada graf (3,4).

Pada amnya kita berminat dengan graf-graf berarah. Oleh itu setiap sisi dalam graf-graf yang dibincang adalah setara dengan satu 2-kitar (a 2-cycle), iaitu 

Contoh:



Matriks sekutuan bagi graf di atas ialah:-

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

di mana a_{ij} adalah sebarangan.

Matriks 'adjacency' , Ad(G) boleh diperolehi dari matriks sekutuan di atas dengan menggantikan $a_{ij} = 1$, untuk setiap i dan j. Artikel ini, secara ringkas akan menunjukkan bagaimana mendapatkan persamaan cirian daripada matriks sekutuan secara graf.

Takrif-takrif dalam tiori graf

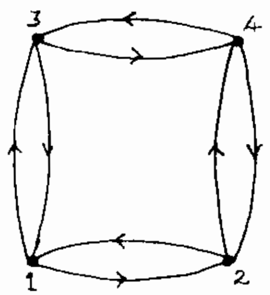
Sisi daripada sebarang graf G adalah garis menghubungkan dua bucu (atau titik). Darjah daripada satu bucu ialah bilangan sisi-sisi yang mempunyai bucu berkenaan sebagai titik-hujung. Suatu jujukan-sisi dalam G ialah satu jujukan terhingga daripada sisi-sisi berbentuk

$$(V_0, V_1), (V_1, V_2), \ldots\ldots\ldots, (V_{m-1}, V_m)$$

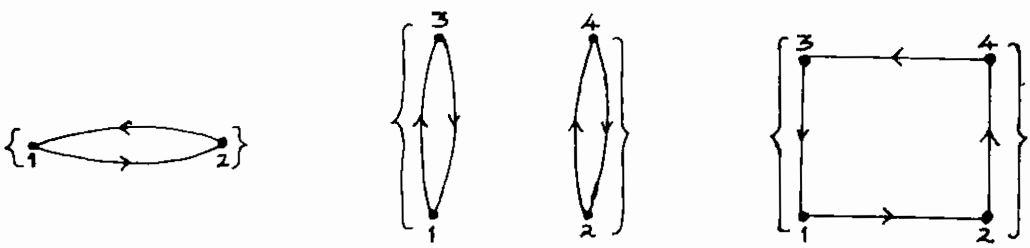
Suatu jujukan-sisi yang mana kesemua sisi-sisi berbeza dipanggil suatu lintasan (5). Jika bucu-bucu V_0, V_1, ..., V_m adalah berbeza (kecuali, mungkin $V_0 = V_m$) , maka lintasan dipanggil suatu rantai. Suatu rantai dikatakan tertutup jika $V_0 = V_m$, dan rantai tertutup yang mengandungi setidak-tidaknya satu sisi dipanggil satu kitar.

Suatu 'set tak bercantum daripada kitar-kitar' dalam suatu graf ialah suatu set daripada kitar-kitar berarah yang tidak mengandungi pasangan kitar-kitar dengan bucu yang sama.

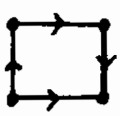
Contoh:-



Contoh-contoh 'set tak bercantum daripada kitar-kitar' bagi graf di atas adalah



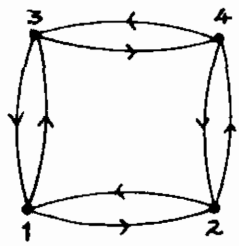
N.B.



bukan merupakan suatu kitar berarah.

Unsur a_{ij} bagi sisi e_k menghubungkan bucu-bucu i dan j dipanggil berat daripada sisi. Hasildarab berat daripada semua sisi-sisi dalam subgraf H daripada suatu graf G ditanda dengan f(H).

$\sum_{H_r} f(H_r)$ bermaksud jumlah daripada $f(H_r)$ untuk setiap H_r yang mana H_r adalah set kitar tak bercantum pada r bucu-bucu. Sebagai contoh, perhatikan graf berikut:-



$$\sum_{H_2} f(H_2) = a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{24}a_{42} + a_{34}a_{43}, \text{ dan}$$

$$\sum_{H_4} f(H_4) = a_{12}a_{24}a_{43}a_{31} + a_{13}a_{34}a_{42}a_{21}$$

<u>Persamaan Cirian daripada matriks sekutuan bagi suatu graf</u>

Misalkan G ialah sebarang graf berarah dengan n bucu-bucu, dan A(G) ialah matriks sekutuannya . Kita memerlukan koefisien-koefisien dalam pengembangan persamaan cirian:-

$$\Delta(-\lambda) = |A(G) - \lambda I|$$
$$= \sum_{r=0}^{n} C_r (-\lambda)^{n-r} \qquad \ldots\ldots\ (1.4.1)$$

di mana C_r ialah koefisien (2,6).

Ditakrifkan $C_0 = 1$ dan untuk $r > 0$,

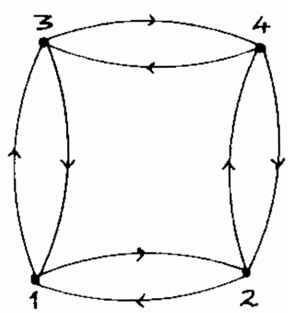
$$C_r = \sum_{\gamma_r} (-1)^{\ell_{\gamma_r}} f(\gamma_r) \qquad \ldots\ldots\ (1.4.2)$$

dimana $f(\gamma_r)$ ialah hasildarab berat sisi daripada set kitar tak bercantum γ_r dan ℓ_{γ_r} ialah bilangan kitar genap dalam γ_r.

Perjumlahan di ambil pada seluruh set kitar takbercantum γ_r , di atas r bucu-bucu. Ini bererti kaedah mencari C_r memerlukan penelitian atau pemeriksaan bentuk graf dan seterusnya mendapatkan set-set kitar tak bercantum.

Contoh 1.

G =



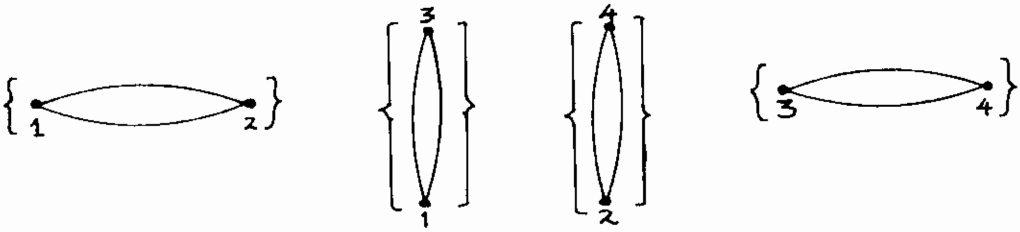
$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix}$$

Daripada (1.4.1) dan (1.4.2)

$$|A(G) - \lambda I| = (-\lambda)^4 + C_1(-\lambda)^3 + C_2(-\lambda)^2 + C_3(-\lambda) + C_4$$

C_1 : $C_1 = 0$ kerana tidak ada 'kitar' di atas satu bucu.

C_2 : SKT (set kitar takbercantum) di atas dua bucu adalah:-



i.e. 4 set kesemuanya. Setiap set mengandungi hanya satu kitar genap. Oleh itu $\ell_{\gamma_r} = 1$; jadi di dapati

f () = $a_{12}\ a_{21}$ f () = $a_{13}\ a_{31}$

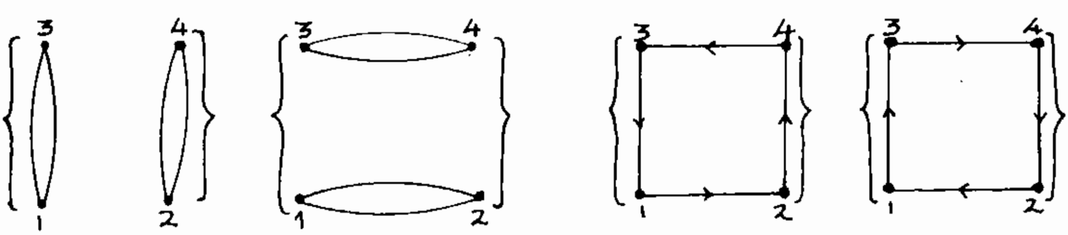
f () = $a_{24}\ a_{42}$ f () = $a_{34}\ a_{43}$

$$C_2 = \Sigma_{\gamma_2} (-1)^{\ell_{\gamma_2}}\ f(\gamma_2)$$

$$= -(a_{12}\ a_{21} + a_{13}\ a_{31} + a_{24}\ a_{42} + a_{34}\ a_{43})$$

C_3 : C_3 = 0 kerana tidak ada SKT di atas tiga bucu

C_4 : SKT di atas empat bucu adalah:



$(1)_{\gamma_4}$ $(2)_{\gamma_4}$ $(3)_{\gamma_4}$ $(4)_{\gamma_4}$

$$\ell_{\gamma_4}(1) = \ell_{\gamma_4}(2) = 2.$$

$$\ell_{\gamma_4}(3) = \ell_{\gamma_4}(4) = 1.$$

$$f(\gamma_4^{(1)}) = a_{13}\ a_{31}\ a_{24}\ a_{42} \qquad f(\gamma_4^{(2)}) = a_{12}\ a_{21}\ a_{34}\ a_{43}$$

$$f(\gamma_4^{(3)}) = a_{12}\ a_{24}\ a_{43}\ a_{31} \qquad f(\gamma_4^{(4)}) = a_{13}\ a_{34}\ a_{42}\ a_{21}$$

$$C_4 = \Sigma_{\gamma_4^{(i)}} (-1)^{\ell_{\gamma_4}(i)} f(\gamma_4^{(i)})$$

$$= (-1)^2\ a_{13}\ a_{31}\ a_{24}\ a_{42} + (-1)^2 a_{12}\ a_{21}\ a_{34}\ a_{43}$$

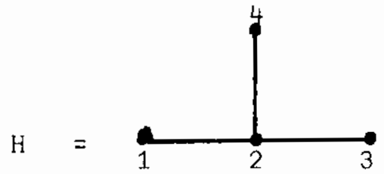
$$-a_{12}\ a_{24}\ a_{43}\ a_{31} - a_{13}\ a_{34}\ a_{42}\ a_{21}$$

$$= a_{13}\ a_{31}\ a_{24}\ a_{42} + a_{12}\ a_{21}\ a_{34}\ a_{43} - a_{12}\ a_{24}\ a_{43}\ a_{31} - a_{13}\ a_{34}\ a_{42}\ a_{21}$$

Menggantikan C_1 , C_2 , C_3 dan C_4 ke dalam $|A(G) - \lambda I|$, kita perolehi persamaan cirian matriks sekutuan bagi graf G sebagai

$$|A(G) - \lambda I| = (-\lambda)^4 - (a_{12}\ a_{21} + a_{13}\ a_{31} + a_{24}\ a_{42} + a_{34}\ a_{43})(-\lambda)^2$$
$$+ (a_{13}\ a_{31}\ a_{24}\ a_{42} + a_{12}\ a_{21}\ a_{34}\ a_{43} - a_{12}\ a_{24}\ a_{43}\ a_{31} - a_{13}\ a_{34}\ a_{42}\ a_{21})$$

Contoh : 2 :



$$A(H) = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A(H) - \lambda I| = (-\lambda)^4 + C_1(-\lambda)^3 + C_2(-\lambda)^2 + C_3(-\lambda) + C_4$$

Berpandukan graf H di atas, jelas kepada kita bahawa $C_1 = 0$, $C_3 = 0$ dan $C_4 = 0$ kerana tidak ada set kitar takbercantum di atas satu bucu, tiga bucu dan empat bucu masing-masing. Secara mudah daripada graf H didapati

$$C_2 = -(a_{12}a_{21} + a_{23}a_{32} + a_{24}a_{42})$$

Ini menghasilkan persamaan cirian berikut:

$$|A(H) - \lambda I| = (-\lambda)^4 - (a_{12}a_{21} + a_{23}a_{32} + a_{24}a_{42})(-\lambda)^2 \quad \ldots (1.4.3)$$

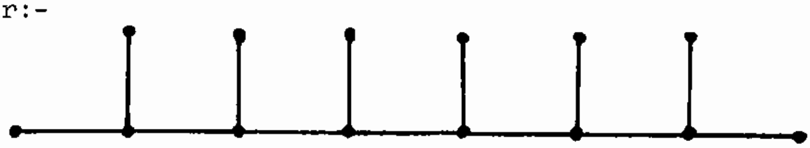
Daripada persamaan (1.4.3), dapatlah dinyatakan bahawa graf H mempunyai dua <u>nilaieigen</u> taksifar, i.e.

$\lambda^2 = a_{12}a_{21} + a_{23}a_{32} + a_{24}a_{42}$. Bentuk graf seperti ini, iaitu graf-graf dengan dua nilaieigen taksifar telah menarik minat pakar-pakar Nuklear Fizik. Sebagai contoh, lihat (2).

Penutup

Telah diperlihatkan melalui dua contoh di atas bahawa mencari persamaan cirian bagi suatu graf kekisi dengan menggunakan tiori graf mempunyai beberapa keistimewaan. Antaranya kita dapat menghindarkan kesilapan aljabar yang boleh berlaku jika digunakan pengembangan biasa (mencari penentu). Kesilapan ini biasanya terjadi jika graf yang terlibat mempunyai lebih dari tiga bucu. Selain dari itu, daripada bentuk graf yang diberi secara otomatis kita dapat tentukan koefisien-koefisien C_i yang kita kehendaki. Ini perlu terutamanya dalam usaha untuk mengkaji bentuk-bentuk graf yang boleh menghasilkan hanya dua nilaieigen taksifar atau bentuk-bentuk graf dengan kesemua nilaieigen-nilaieigennya adalah sifar. Graf-graf sedemikian mempunyai keistimewaan-keistimewaan tersendiri, khususnya dalam Nuklear Fizik.

Sebagai contoh, dapat dibuktikan dengan menggunakan tiori di atas bahawa bentuk graf seperti berikut mempunyai hanya dua nilaieigen taksifar:-



Akhirnya diharapkan 'artikel' yang sangat sederhana ini dapat membangkitkan minat kita untuk mengikuti perkembangan tiori graf selanjutnya.

Wassalam.

BAHAN-BAHAN RUJUKAN

(1) A.T. Balaban (E.d.),"Chemical Applications of Graph Theory" Academic Press, London, 1976.

(2) W.Cox, J. Phys. A. Math, Nucl. Gen., Vol 7, No. 1; Vol. 7, No. 6 & Vol. 7, No. 18.

(3) R.J. Wilson, On The Adjacency Matrix of A Graph, in "Combinatorics", (Eds. D.J.A.Welsh and D.R. Woodall) The Institute of Mathematics and its Applications, Southend-on-Sea, England.

(4) N.Biggs, "Algebraic Graph Theory", Cambridge University Press, 1974.

(5) R.J. Wilson, "Introduction to graph theory", Oliver & Boyd, Edinburgh, 1972.

(6) F. Harary, "A graph theoretic method for the complete reduction of a matrix with a view toward finding its eigenvalues", J. Maths. Physics, 38 (1959), 104-111.

* * *