

## KITARAN HARGA DALAM INDUSTRI TERNAKAN

NORMAH MAAN & YUSOF YAACOB

Jabatan Matematik

Fakulti Sains

Universiti Teknologi Malaysia

Karung Berkunci 791

80990 Johor Bahru, Johor

Malaysia

**Abstrak.** Kertas ini membincangkan model harga dan pengeluaran dalam industri ternakan yang melibatkan persamaan pembeza lengah seperti yang dikemukakan oleh Larson[8]. Dalam model ini keluk permintaan linear, proses pengeluaran berkadar terus dengan kuantiti anak ternakan, dan kadar ternakan berkadar terus dengan harga sisihan daripada keseimbangan. Dibuktikan wujud penyelesaian sinusoidal yang menunjukkan bahawa kitaran harga berlaku dalam industri ternakan seperti yang disarankan oleh Larson. Penyelesaian sinusoidal itu boleh didapati dengan menggunakan kaedah langkah.

**Katakunci.** Persamaan pembeza lengah, kitaran harga, sinusoidal, kaedah langkah, keluk permintaan, keluk penawaran, harga keseimbangan.

**Abstract.** This paper discusses price and production model concerning a livestock industry which gives rise to a system of delay differential equations, as proposed by Larson[8]. In this model it is assumed that the demand curve is linear, a lag between planned and (and proportional to) realized production, and that the rate of change of breeding is proportional to the deviation of price from equilibrium. We prove that there exists sinusoidal solutions, which shows that exists price cycle in livestock industries, as conjectured by Larson. The sinusoidal solutions can be obtained by using the method of step.

**Keywords.** Delay differential equations, price cycle, sinusoidal, methods of step, demand curve, supply curve, equilibrium price.

## 1 PENDAHULUAN

Kitaran harga dan pengeluaran bagi berbagai jenis komoditi telah menarik minat ahli ekonomi sejak dulu lagi. Ahli ekonomi seperti Kalecki[7] dan Slutsky[11] mempercayai bahawa kitaran harga dan pengeluaran bagi sesuatu komoditi mempunyai kaitan dengan keadaan fizikal, tarikh barangan berada di pasaran dan tempat barangan itu di pasaran. Ezekiel[4] dan Goodwin[5] pula membuat spekulasi bahawa kitaran ekonomi mungkin satu sifat semula jadi bagi sesuatu sistem ekonomi. Penyelidik seperti Mackey[1], Larson[8] dan Haldane[6] menggunakan model persamaan pembeza lengah untuk menyatakan proses dan kadar pengeluaran.

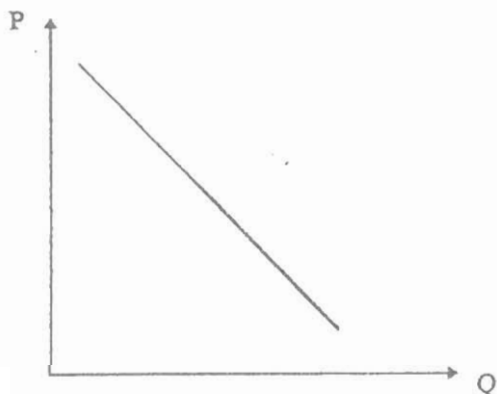
Larson[8] telah membuat penyelidikan tentang kitaran harga dan pengeluaran bagi industri ternakan. Dalam kajiannya beliau mengandaikan satu keluk permintaan dengan harga tertakluk kepada pengeluaran semasa sahaja. Beliau juga mempostulatkan satu kelengahan diantara pengeluaran yang dirancang dan sebenar. Kadar perubahan pembiakan ternakan

berkadar terus dengan perubahan harga. Daripada andaianya itu satu **persamaan pembeza lengah** bagi harga dan pengeluaran diperolehi. Beliau telah memberi satu penyelesaian kepada persamaan pembeza lengah itu tanpa menunjukkan apa-apa kaedah yang digunakan.

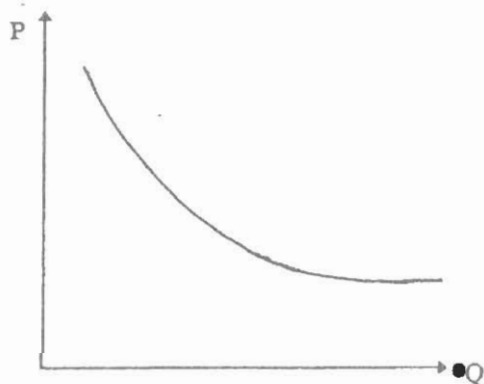
Kita buktikan dalam kertas ini wujud penyelesaian sinusoidal yang lebih am termasuk penyelesaian yang diberikan oleh Larson. Juga dibincangkan satu kaedah penyelesaian bagi persamaan pembeza lengah berkenaan iaitu kaedah langkah.

### 1.1 Keluk permintaan.

Hukum permintaan menyatakan semakin rendah harga sesuatu barang semakin tinggi permintaan ke atas barangan tersebut (lihat Salvatone[9]). Ini bermakna permintaan barangan dan harga mempunyai hubungan songsang. Rajah 1.1a dan Rajah 1.1b menunjukkan contoh keluk permintaan. Perlu diambil perhatian di sini, satu kenaikan harga tidak menurunkan "permintaan"; tetapi ia menurunkan "kuantiti permintaan" yang mewakili pergerakan ke bawah sepanjang keluk permintaan (lihat Dyal dan Karatjas[3]).



Rajah 1.1a



Rajah 1.1b

### 1.2 Keluk penawaran.

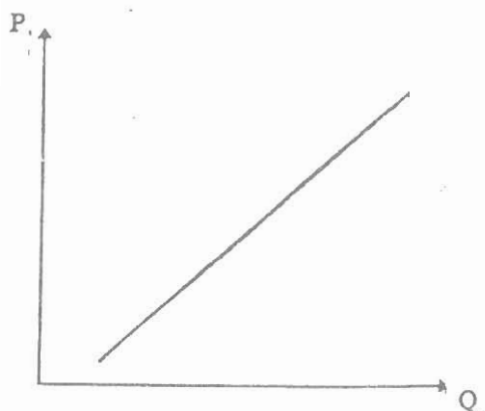
Hukum penawaran menyatakan bahawa semakin tinggi harga sesuatu barang semakin banyak kuantiti barang akan dikeluarkan dan sebaliknya semakin rendah harga sesuatu barang, semakin kurang kuantiti barang akan dikeluarkan oleh para pengeluar (lihat Salvatone[9]). Rajah 1.2a dan Rajah 1.2b menunjukkan contoh keluk penawaran. Dalam keadaan tertentu terdapat juga keluk penawaran yang kecerunanya positif dan melengkuk ke belakang seperti dalam Rajah 1.2c (lihat Sichel dan Eckstein[10]).

## 2 MODEL YANG DIGUNAKAN

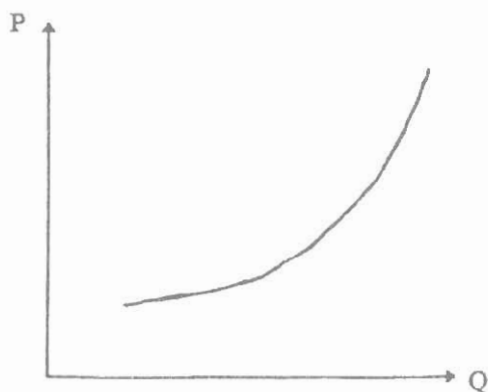
Model industri ternakan yang diperkenalkan oleh Larson[8] dibentuk oleh tiga persamaan berikut. Beliau menganggap keluk permintaan adalah linear iaitu

$$P(t) = a - bQ(t) \quad (2.1)$$

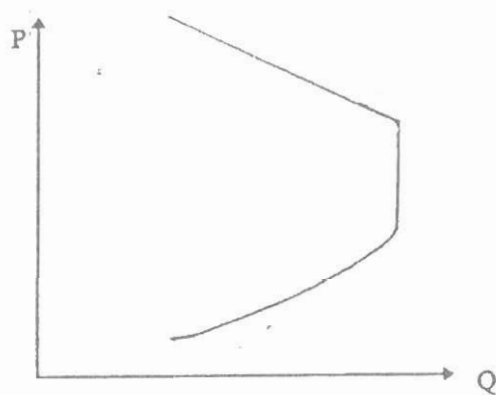
dengan  $P(t)$  dan  $Q(t)$  masing-masing merupakan harga dan pengeluaran pada masa  $t$ ,



Rajah 1.2a



Rajah 1.2b



Rajah 1.2c

dengan  $a$  dan  $b$  pemalar. Kemudian beliau mempostulatkan satu proses pengeluaran

$$Q(t) = cB(t - r) \quad (2.2)$$

dengan  $B(t - r)$  bilangan pengeluaran anak ternakan pada masa  $t$  dikira  $r$  unit masa yang lepas dan  $c$  pemalar. Akhirnya diandaikan bahawa kadar pengeluaran bagi anak ternakan berkadar terus dengan harga sisihan daripada harga keseimbangan

$$B'(t) = m(P(t) - \bar{P}) \quad (2.3)$$

dengan  $B'(t)$  kadar pengeluaran bagi anak ternakan,  $\bar{P}$  harga keseimbangan dan  $m$  pemalar.

Dengan menganggap harga ternakan mempengaruhi perubahan kadar pengeluaran yang dirancang, daripada (2.3) didapati

$$B'(t) = m(Q(t) - \bar{Q}) \quad (2.4)$$

dengan  $\overline{Q}$  pengeluaran pada masa harga dalam keseimbangan.

Untuk mendapat penyelesaian bagi (2.1), (2.2) dan (2.3), kita perlu mendapatkan satu persamaan yang mempunyai pembolehubah dalam harga,  $P$ , sahaja dan pengeluaran,  $Q$ , sahaja. Untuk mendapatkan satu persamaan dalam harga, gantikan hujah  $t$  dalam persamaan (2.3) kepada  $t - r$  yang akan menghasilkan

$$B'(t - r) = m(P(t - r) - \overline{P}) \quad (2.5)$$

Dengan memperbezakan persamaan (2.2) dan menggantikan  $B'(t - r) = Q'(t)/c$  dalam (2.5), maka didapati

$$Q'(t) = k(P(t - r) - \overline{P}) \quad (2.6)$$

dengan  $k = cm$ . Seterusnya dengan memperbezakan persamaan (2.1) dan menggantikan  $Q'(t) = -P'(t)/b$  ke dalam persamaan (2.6) akan menghasilkan persamaan pembeza dalam harga iaitu

$$p'(t) = -bkp(t - r) \quad (2.7)$$

dengan  $p = P - \overline{P}$ .

Prosedur yang sama seperti di atas mengenai pengeluaran akan menghasilkan satu persamaan pembeza untuk pengeluaran

$$q'(t) = -bkq(t - r) \quad (2.8)$$

dengan  $q = Q - \overline{Q}$ .

Dengan  $bk = \kappa$ , persamaan (2.7) dan (2.8) boleh ditulis sebagai

$$x'(t) = -\kappa x(t - r) \quad (2.9)$$

dengan  $x$  pembolehubah bagi  $p$  atau  $q$ .

### 3 PENYELESAIAN PERSAMAAN

Bagi persamaan pembeza biasa nilai awal perlu diketahui tetapi bagi persamaan pembeza langkah(ppl) fungsi awal perlu diketahui. Salah satu kaedah yang digunakan bagi mendapat penyelesaian ppl adalah kaedah langkah. Beberapa teorem dan takrif berkaitan dengan ppl adalah seperti di bawah.

#### Takrif 1(lihat Driver[2])

Satu penyelesaian  $x(t; \theta(t))$  bagi

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - r)), \quad t \geq 0 \quad (3.1)$$

dengan fungsi awal yang selanjat

$$x(t) = \theta(t), \quad -r \leq t \leq 0 \quad (3.2)$$

adalah satu fungsi selanjat,  $x(t; \theta(t))$  yang memenuhi persamaan (3.1) dan (3.2). Pembezaan di  $t = 0$  ialah pembezaan bagi  $x(t)$  dari sebelah kanan iaitu

$$x'_+(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{x(t) - x(0)}{t - 0} \quad \square$$

Persamaan (3.1) ialah ppl dengan lengahnya malar iaitu  $r$ .

**Takrif 2 (lihat Driver[2])**

Pertimbangkan persamaan

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-r)), \quad t \geq 0 \quad (3.3)$$

dengan  $0 < x(t-r) \leq t$ . Fungsi  $f$  dikatakan memenuhi syarat Lipschitz dengan pemalar Lipschitz  $K_1$  dan  $K_2$  jika

$$\begin{aligned} & ||f(t, x_1(t), x_1(t-r)) - f(t, x_2(t), x_2(t-r))|| \\ & \leq K_1 ||x_1(t) - x_2(t)|| + K_2 ||x_1(t-r) - x_2(t-r)|| \quad \square \end{aligned}$$

Satu cara yang mudah untuk menentukan sesuatu fungsi itu bersifat Lipschitz ialah menggunakan Teorem 1 di bawah.

**Teorem 1 (lihat Driver[2])**

Jika fungsi  $f$  mempunyai terbitan-terbitan separa yang pertama yang selanjar terhadap semua hujah kecuali hujah yang pertama, maka  $f$  bersifat Lipschitz.  $\square$

**Teorem 2 (lihat Driver[2])**

Jika fungsi  $f$  memenuhi syarat Lipschitz, maka wujud penyelesaian unik bagi persamaan (3.1) dan (3.2).  $\square$

Penyelesaian bagi persamaan (3.1) dan (3.2) boleh didapati dengan kaedah langkah seperti di bawah.

**3.1 Kaedah Langkah**

Penyelesaian dengan kaedah langkah bermaksud penyelesaian diperolehi secara selang demi selang seperti berikut:

**Penyelesaian untuk selang  $[0, r]$** 

Dengan mengamirkan persamaan (3.1) dari 0 ke  $t$ , kita dapati

$$\begin{aligned} \int_0^t x'(s) ds &= \int_0^t f(s, x(s), x(s-r)) ds \\ x(t) &= \theta(0) + \int_0^t f(s, x(s), x(s-r)) ds \\ &= x_1(t) \quad 0 \leq t \leq r \end{aligned} \quad (3.4)$$

**Penyelesaian untuk selang  $[r, 2r]$** 

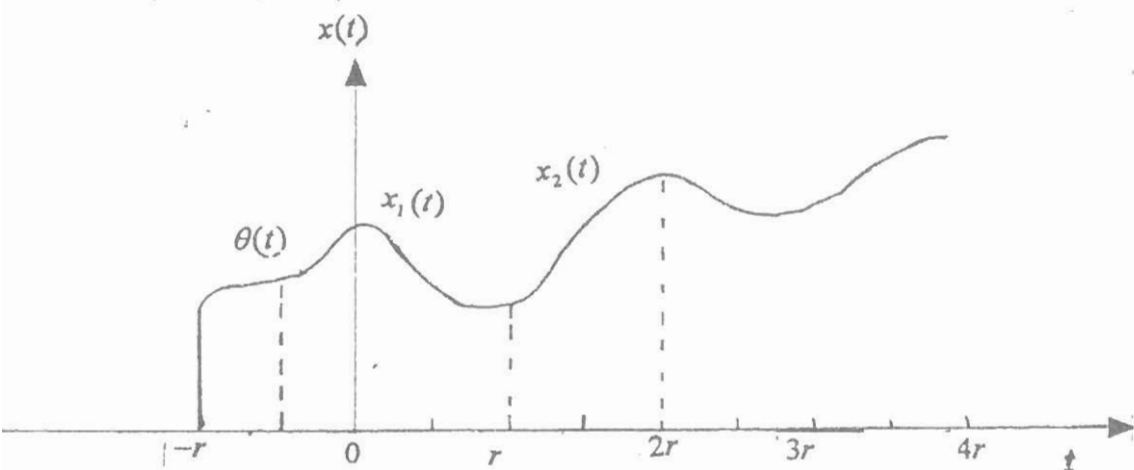
Dengan mengulangi prosedur di atas dengan fungsi awalnya

$$x(t) = x_1(t) \quad 0 \leq t \leq r$$

kita dapati penyelesaiannya ialah

$$\begin{aligned} x(t) &= x(r) + \int_r^t f(s, x(s), x(s-r)) ds \\ &= x_1(t) + \int_r^t f(s, x(s), x(s-r)) ds \\ &= x_2(t) \quad r \leq t \leq 2r \end{aligned} \quad (3.5)$$

Penyelesaian untuk selang  $[2r, 3r], [3r, 4r], \dots$  boleh diperolehi dengan mengulangi prosedur di atas (lihat Rajah 3.1).



Rajah 3.1

### Contoh 1

Dalam Contoh ini dipertimbangkan persamaan (2.9) dengan  $\kappa = 1$  dan langkahnya,  $r = 1$ . Fungsi awalnya pula satu pemalar iaitu  $x(t) = 1$ . Oleh itu ppl yang akan diselesaikan ialah

$$x'(t) = -x(t-1) \quad (3.6)$$

dengan fungsi awalnya

$$x(t) = 1, \quad -1 \leq t \leq 0$$

Penyelesaian bagi ppl ini boleh didapati dengan kaedah langkah seperti di bawah:

#### Penyelesaian untuk selang $[0, 1]$

Dengan mengamirkan persamaan (3.6) dari 0 ke  $t$ , kita dapati

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) - \int_0^t x(s-1) ds \\ &= 1 - \int_0^t x(s-1) ds \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dengan penggantian  $v = s - 1$ , (3.7) menjadi

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 - \int_{-1}^{t-1} x(v) dv \quad -1 \leq v \leq 0 \\ &= 1 - \int_{-1}^{t-1} dv \\ &= 1 - t \quad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

#### Penyelesaian untuk selang $[1, 2]$

Dengan mengulangi prosedur di atas dengan fungsi awal

$$x(t) = 1 - t \quad 0 \leq t \leq 1$$

kita dapat penyelesaiannya ialah

$$\begin{aligned} x(t) &= x(1) - \int_1^t x(s-1) ds \\ &= (1-t) - \int_0^{t-1} x(v) dv \quad 0 \leq v \leq 1 \\ &= \frac{3}{2} - t - \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

Penyelesaian untuk selang  $[2,3], [3,4], \dots$  boleh diperolehi dengan mengulangi prosedur di atas.

Larson memberi penyelesaian bagi persamaan (2.9) hanya kepada satu set parameter iaitu  $\kappa = 1$ ,  $r = \pi/2$ . Dengan teorem di bawah kita dapat buktikan wujud penyelesaian sinusoidal untuk set  $r$  dan  $\kappa$  yang lain.

### Teorem 3

Pertimbangkan persamaan

$$x'(t) = -\kappa x(t-r), \quad t \geq 0 \quad (3.9a)$$

dengan fungsi awal yang selanjut

$$x(t) = \theta(t), \quad -r \leq t \leq 0 \quad (3.9b)$$

Jika  $r\kappa = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2, \dots$ , maka wujud penyelesaian sinusoidal bagi (3.9a) dan (3.9b).  $\square$

### Bukti

Jelas bahawa fungsi sebelah kanan persamaan (3.9a) memenuhi syarat Lipschitz. Oleh itu (3.9a) dan (3.9b) mempunyai penyelesaian unik.

Kita andaikan  $x = e^{\lambda t}$ , dengan  $\lambda$  adalah nilai eigen dengan bahagian nyata sifar. Masukkan  $x = e^{\lambda t}$  dalam persamaan (3.9a) menghasilkan

$$\lambda = -\kappa e^{-\lambda r} \quad (3.10)$$

Kemudian biarkan  $\lambda = i\beta$  dan asingkan nilai nyata dan khayalan untuk memberikan dua persamaan iaitu

$$\beta = \kappa \sin r\beta \quad (3.10a)$$

$$0 = \kappa \cos r\beta \quad (3.10b)$$

Daripada (3.10b)

$$r\beta = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$$

Masukkan nilai  $r\beta$  ini dalam persamaan (3.10a), untuk mendapatkan

$$r\kappa = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2, \dots$$

### Contoh 2

Larson[8] telah mengkaji data yang diperolehi daripada United States Department of Agriculture mengenai harga daging dan pengeluaran bagi suatu jenis ternakan merangkumi

masa 15 tahun. Harga dan kuantiti pengeluaran itu didapati boleh dipadankan dengan keluk kosinus dan sinus dengan kitaran lengkap  $2\pi$  radian yang mengambil masa selama 4 tahun. Masa yang diambil daripada ternakan lahir sehingga siap untuk disembelih dan dijual dagingnya ialah 12 bulan. Ini bermakna dalam kes ini, langkah  $\tau = \pi/2$  dan fungsi awal  $\theta(t) = \cos t$ . Oleh itu suatu contoh fungsi harga di bawah model ini boleh didapati dengan menyelesaikan persamaan pembeza berikut.

$$p'(t) = -p(t - \pi/2), \quad t \geq 0 \quad (3.11)$$

dan fungsi awalnya

$$p(t) = \cos t, \quad -\pi/2 \leq t \leq 0$$

dengan  $\kappa = 1$  seperti dalam Teorem 3.

**Penyelesaian untuk selang  $[0, \pi/2]$**

Dengan mengamirkan persamaan (3.11) dari 0 ke  $t$ , kita dapati

$$p(t) = p(0) - \int_0^t p(s - \pi/2) ds \quad (3.12)$$

Dengan penggantian  $v = s - \pi/2$ , (3.12) menjadi

$$\begin{aligned} p(t) &= 1 - \int_{-\pi/2}^{t-\pi/2} p(v) dv \quad -\pi/2 \leq v \leq 0 \\ &= 1 - \int_{-\pi/2}^{t-\pi/2} \cos v dv \\ &= \cos t \quad 0 \leq t \leq \pi/2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

**Penyelesaian untuk selang  $[\pi/2, \pi]$**

Bagi selang ini keputusan dalam (3.13) diambil sebagai fungsi awalnya. Dengan mengamirkan persamaan (3.11) dari  $\pi/2$  ke  $t$ , kita dapati

$$\begin{aligned} p(t) &= p(\pi/2) - \int_{\pi/2}^t p(s - \pi/2) ds \\ &= - \int_{\pi/2}^t p(s - \pi/2) ds \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dengan penggantian  $v = s - \pi/2$ , persamaan (3.14) menjadi

$$\begin{aligned} p(t) &= - \int_0^{t-\pi/2} \cos v dv \\ &= \cos t \end{aligned}$$

Dengan prosedur yang sama, penyelesaian untuk selang  $[\pi, 3\pi/2], [3\pi/2, 2\pi], \dots$  ialah  $p(t) = \cos t$ . Oleh itu kita ambil kesimpulan bahawa penyelesaian bagi persamaan (3.11) adalah  $p(t) = \cos t, 0 \leq t \leq \infty$ .



Dalam kajiannya Larson juga mendapati fungsi awal bagi pengeluaran adalah  $\sin t$ . Ini kerana fasa bagi fungsi harga dan pengeluaran berbeza sebanyak  $\pi/2$ . Oleh itu ppl bagi pengeluaran adalah

$$\begin{aligned}q'(t) &= -q(t - r) \\ q(t) &= \sin t, \quad -\pi/2 \leq t \leq 0\end{aligned}$$

Dengan prosedur yang sama seperti di atas, akan didapati penyelesaian bagi pengeluaran ialah

$$q(t) = \sin t$$

Dengan demikian, kita perolehi satu set penyelesaian bagi harga,  $p(t)$  dan pengeluaran yang dirancang,  $q(t)$  iaitu

$$\begin{aligned}p(t) &= \cos t \\ q(t) &= \sin t\end{aligned}$$

Daripada persamaan di atas kita dapati

$$p^2(t) + q^2(t) = 1$$

Rajah 3.2 menunjukkan hubungan antara harga dan pengeluaran yang dirancang, yang mempunyai ciri-ciri kesamaan dengan keluk penawaran yang berkecerunan positif dan melengkuk ke belakang (lihat Sichel dan Eckstein[10]).

### Contoh 3

Jika kita pertimbangkan fungsi awal bagi harga dan pengeluaran ialah  $\cos t$ , maka kita dapati sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned}p'(t) &= -p(t - r) \\ p(t) &= \cos t, \quad -\pi/2 \leq t \leq 0\end{aligned}$$

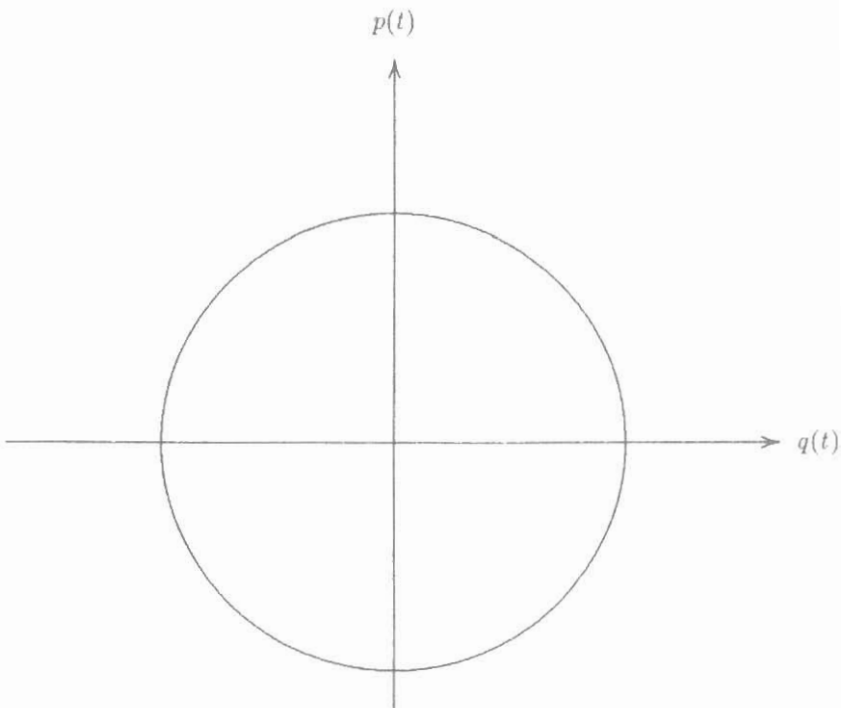
dan

$$\begin{aligned}q'(t) &= -q(t - r) \\ q(t) &= \cos t, \quad -\pi/2 \leq t \leq 0\end{aligned}$$

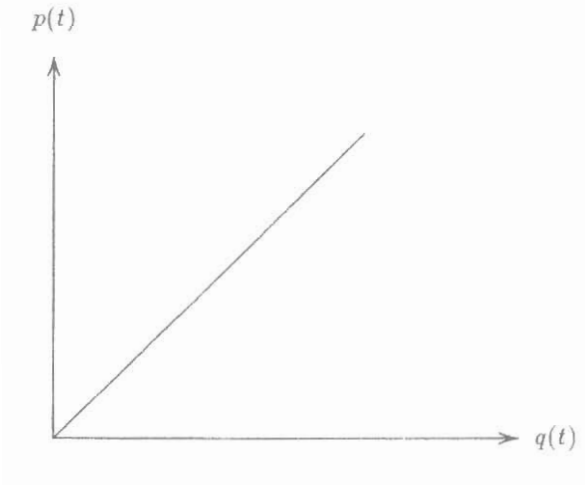
Dengan prosedur yang sama seperti di atas kita dapati penyelesaian bagi persamaan harga dan pengeluaran ialah

$$p(t) = q(t) = \cos t$$

Keluk penawaran yang didapati adalah seperti Rajah 3.3 iaitu keluk penawaran yang biasa didapati.



Rajah 3.2 Keluk penawaran bagi Contoh 2



Rajah 3.3 Keluk penawaran bagi Contoh 3

#### 4 PERBINCANGAN DAN KESIMPULAN

Penyelesaian bagi persamaan

$$p'(t) = -\kappa p(t-r)$$

dan

$$q'(t) = -\kappa q(t-r)$$

bergantung kepada fungsi awal,  $\kappa$  dan  $r$ . Dengan set nilai  $\kappa$  dan  $r$  tertentu dan fungsi awal sinusoidal akan memberikan penyelesaian sinusoidal. Dalam kes ini perancangan pengeluaran masa hadapan dapat dilakukan berasaskan kepada informasi yang lepas. Ini berlaku apabila sesuatu harga ternakan di pasaran akan mengakibatkan perubahan dalam kadar pengeluaran untuk jangka masa tertentu yang memberi kesan kepada perubahan harga ternakan itu.

Ciri utama teori ini ialah coraknya yang tetap. Model ini menghasilkan kitaran selama 4 tahun (lihat Contoh 2) berbanding teorem "cobweb" yang mempunyai 2 tahun kitaran (lihat Larson[8]).

#### RUJUKAN

- [1] J. Belair dan M.C. Mackey, Consumer Memory And Price Fluctuations In Commodity Markets: An Integrodifferential Model, *Journal Of Dynamics And Differential Equation* **3** (1989), 299-325.
- [2] R.D. Driver, *Applied Mathematical Sciences 20: Ordinary And Delay Differential Equations*, Springer Verlag New York Heidelberg Berlin, 1977.
- [3] J.A. Dyal dan N. Karatjas, *Basic Economics Second Edition*, Maxwell Macmillan International New York, 1985.
- [4] M. Ezekiel, The Cobweb Theorem, *Quar. J. Econ.* **52** (1938), 255-280.
- [5] R.M. Goodwin, The Nonlinear Accelerator And The Persistence of Business Cycles, *Econometrica* **19** (1951), 1-17.
- [6] J.B.S. Haldane, A Contributions To The Theory Of Price Fluctuations, *Rev. Econ. Study* **1** (1933), 186-195.
- [7] M. Kalecki, A Macroeconomic Theory Of The Business Cycle, *Econometrica* **3** (1935), 327-344.
- [8] A.B. Larson, The Hog Cycle As Harmonic Motion, *Journal of Farm Economic* **46** (1964), 375-386.
- [9] D. Salvatone, *Microeconomics Theory And Applications*, Macmillan Publishing Company New York, 1986.
- [10] W. Sichel dan P. Eckstein, *Basic Economic Concepts*, Rand M'Nally College Chicago, 1974.
- [11] E. Slutsky, The Summation Of Random Causes As The Source Of Cyclic Processes, *Econometrica* **5** (1937), 105-146.