*PERAWATAN MASALAH-MASALAH TIRISAN OLEH PERSAMAAN-PERSAMAAN KAMIRAN ANIH CAUCHY

Mohamad Rashidi Razali
Jabatan Matematik
Fakulti Sains
Universiti Teknologi Malaysia

Di dalam kertas ini, suatu masalah tirisan adalah diselesaikan secara berangka oleh satu kaedah yang menggunakan persamaan-persamaan kamiran anih Cauchy. Kaedah ini adalah direka untuk menyelesai masalah-masalah nilai sempadan yang bercampur dan harmonik bagi domain-domain yang tercantum mudah. Dengan suatu rumusan songsang masalah tirisan itu, satu gambarajah mudah di-kenali adalah diperolehi dengan permukaan bebas diubah ke seluruh satu sisi gambarajah itu. Dengan mengguna kaedah di atas kami mem-perolehi anggaran baik bagi kuantiti-kuantiti yang tidak diketahui dalam masalah tersebut. Kami juga memperolehi kedudukan permukaan bebas tanpa mengguna sebarang prosidur lelaran.

---

* Kertas ini adalah satu terjemahan kertas pengarang yang berjudul "The Treatment of Seepage Problems by Cauchy Singular Integral Equations", yang telah dibentang semasa menghadiri Fifth IMACS International Symposium on Computer Methods for Partial Differential Equations and MiniSymposium on Computer Methods for Cauchy Singular Integral Equations, Lehigh Univ., Bethlehem, Pennsylvania, U.S.A. pada 19hb - 22hb. Jun, 1984. Kertas ini juga telah terbit dalam buku:

A. Gerasoulis and R. Vichnevetsky (1984): Numerical Solution Of Singular Integral Equations, IMACS, M.S. 91 - 93.

1. Pengenalan

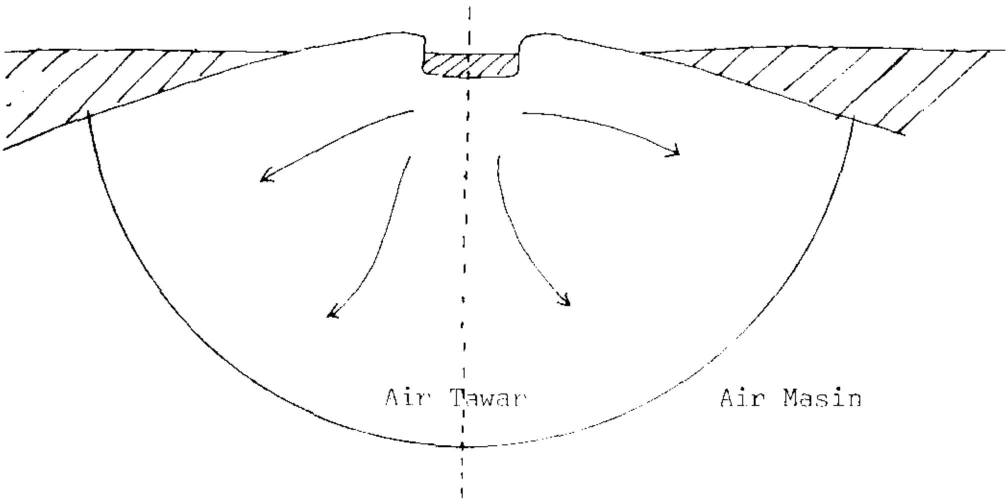
Suatu perkara biasa dalam beberapa masalah yang menimbulkan banyak kegemaran dewasa ini ialah kewujudan satu permukaan bebas yang tidak diketahui kedudukannya. Permukaan ini mungkin menimbulkan banyak kesukaran jika masalah ini dirawat secara terus - suatu prosidur lelaran hendaklah dipergunakan.

Suatu cara baik untuk mengelak kesukaran-kesukaran ini ialah dengan menyongsangkan satah fisikal yang diberi kepada apa yang dikatakan satah keupayaan kompleks dan menyelesaikan masalah yang sepadan [3],[8]. Dengan rumusan begini, permukaan yang tak diketahui kedudukannya itu menjadi satu dari sisi-sisi suatu gambar rajah yang dikenali dalam satah keupayaan kompleks. Kebanyakan pengarang telah menggunakan pendekatan ini di dalam pengiraan mereka berkenaan permukaan bebas. Kami mengikut pendekatan yang sama dalam rawatan kami terhadap masalah tirisan.

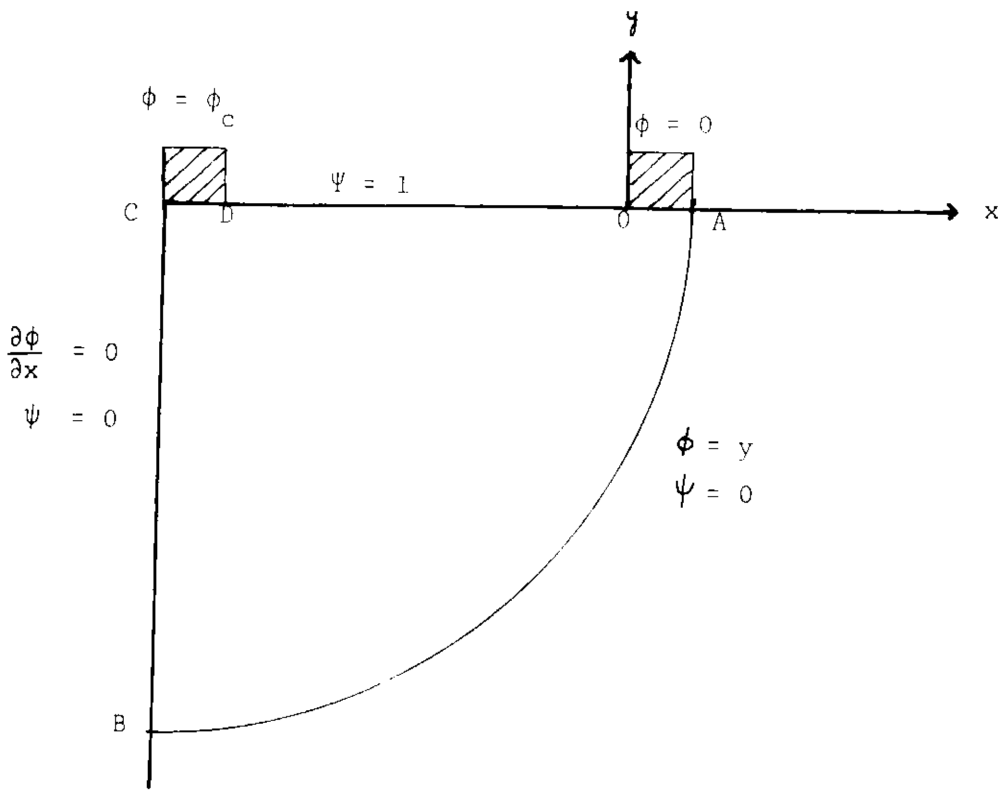
Suatu kaedah untuk penyelesaian berangka masalah nilai sempadan yang bercampur dan harmonik bagi suatu domain tercantum mudah telah pun disyorkan dalam [6] dan [7]. Kami akan menggunakan kaedah ini dalam menyelesaikan masalah-masalah tirisan. Di dalam bahagian ini, kami berikan suatu perihal ringkas berkenaan kaedah tersebut. Pada mulanya, domain yang diberi itu diubah ke seluruh kepada suatu satah setengah atas dengan pemetaan konformal. Masalah nilai sempadan bercampur itu kemudian dirumuskan menjadi apa yang dikatakan masalah Volterra. Ini boleh dibuatkan dengan mengguna persamaan-persamaan Cauchy - Riemann dan pengamiran. Dengan menggunakan analisis klasik dalam [5], suatu persamaan kamiran anih jenis Cauchy di atas lengkok akan diperolehi. Persamaan kamiran ini diselesaikan secara berangka dengan menggunakan sifat-sifat polinomial Chebyshev.

2. Masalah Model

Di sini kami mempertimbangkan masalah tirisan yang pada mulanya diberi dalam [1] dan kemudian dalam [2] dan [4]. Model yang dipertimbangkan adalah diberikan di bawah ini.



Sebuah parit air tawar dibena sepanjang pertengahan datar lumpur yang selari dengan pantai. Air tawar meniris dari parit itu dan memaksa air masin jauh dari permukaan tanah. Suatu keadaan tetap akan tercapai di mana permukaan bebas memisah air tawar dari air masin dan tanah itu bolehlah direklamasikan untuk bercucuk tanam. Pengaliran air tawar itu dianggapkan, bermatra dua, tetap dan tak termampat. Suatu version mudah model, yang menunjukkan setengah dari tatarajah berserta dengan syarat-syarat sempadan, diberikan di bawah ini. Di sini A, B, C dan D adalah titik-titik yang tak diketahui.



Katakan Q_c menandakan kadar tirisan seyunit lebar parit tersebut dan P pengali ketelapan: saperti dalam [1], pembolehubah-pembolehubah tak berdimensi di bawah ini diperkenalkan:

$$(x,y) = (2R/Q_c) \quad (x',y') \qquad (1)$$
$$(\phi,\psi) = (2/Q_c) \quad (\phi',\psi') \qquad (2)$$

di mana prima menandakan kuantiti-kuantiti fisikal, ϕ adalah fungsi keupayaan (kepala piezometrik) dan ψ adalah fungsi strim. Di sini $R = P\ (\gamma_s\ /\ \gamma_f - 1)$ di mana γ_f dan γ_s adalah masing-masing berat spesifik air tawar dan air masin.

Memang boleh ditunjukkan bahawa ϕ dan ψ memenuhi

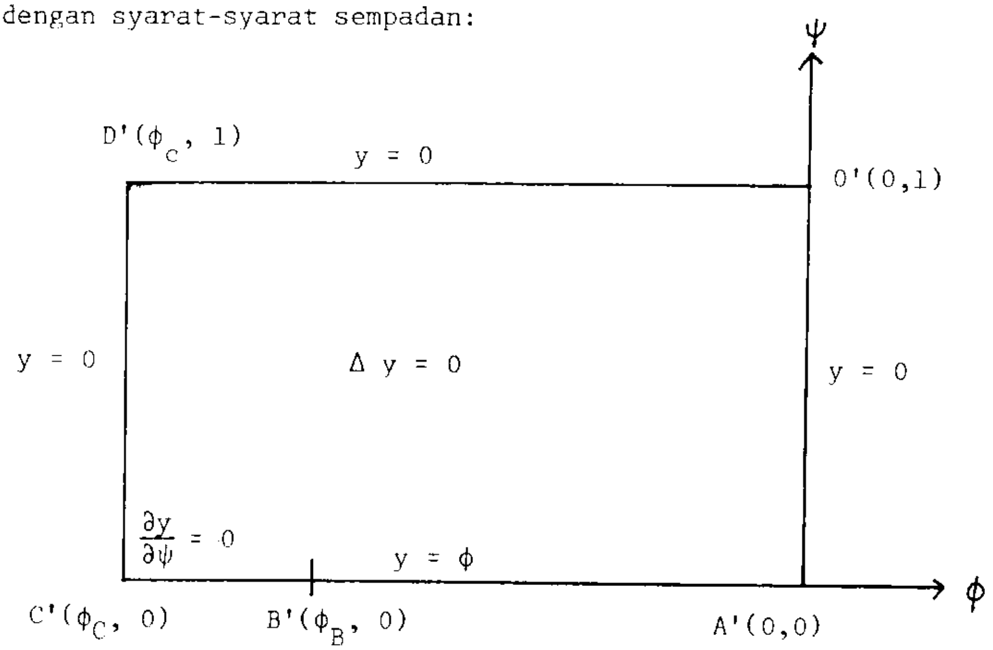
$$\Delta\phi = 0 \quad , \quad \Delta\phi = 0 \qquad (3)$$
$$\phi = 0 \quad \text{di atas OA} \qquad (4)$$
$$\psi = 1 \quad \text{di atas OD} \qquad (5)$$
$$\phi = \phi_c \quad \text{di atas DC} \qquad (6)$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \ , \ \psi = 0 \ \text{di atas CB} \qquad (7)$$
$$\phi = y \ , \ \psi = 0 \ \text{di atas permukaan bebas AB} \qquad (8)$$

...5/-

$$\phi = y \ , \ \psi = 0 \text{ di atas permukaan bebas AB} \qquad (8)$$

Masalah tersebut kemudian disongsangkan supaya x dan y adalah pembolehubah-pembolehubah bersandar manakala ϕ dan ψ adalah pembolehubah-pembolehubah bebas. Dengan lain perkataan, $x = x(\phi,\psi)$ dan $y = y(\phi,\psi)$. Dengan kesongsangan ini, gambarajah yang terhasil adalah satu segiempat tepat dengan permukaan bebas AB yang tak diketahui itu menjadi salah satu dari sisi-sisinya.

Gambarajah berikut menggambarkan segiempat tepat akhir berserta dengan syarat-syarat sempadan:



3. <u>Perihal berkenaan kaedah penyelesaian.</u>

Kami menggunakan pemetaan-pemetaan konformal untuk mengubah segiempat tepat ke seluruh suatu satah setengah atas:

$$w_1(z) \quad = \quad z - \phi_c/2 \quad = \phi_1 + i\psi_1 \qquad (9)$$

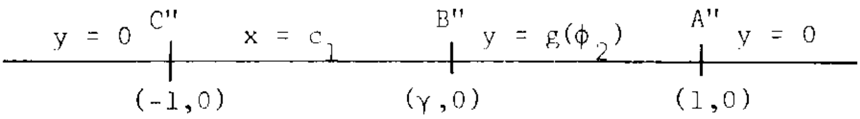
$$w_2(w_1) \quad = \quad \mathrm{Sn}\ (\lambda w_1 | k) = \phi_2 + i\psi_2 \qquad (10)$$

Pemetaan pertama adalah untuk menganjak segiempat tepat itu supaya bucu-bucu A, O', D', C' adalah masing-masing $-\phi_c/2$,

...6/-

$-\phi_c/2 + i$, $\phi_c/2 + i$, $\phi_c/2$. Pemetaan kedua adalah pemetaan biasa dari satu segiempat tepat keseluruh suatu satah setengah atas. Untuk $\phi_C = -4.0$ dan $\phi_B = -2.6$, $\lambda = K/2$ di mana K adalah kamiran lengkap berelips jenis pertama. Untuk hal khusus ini, K = 3.165103 dan $m = k^2 = 0.970563$.

Satah kerja untuk masalah Volterra adalah diberikan di bawah ini:



di mana A", B" dan C" adalah masing-masing bayangan-bayangan bagi A', B' dan C'. Di sini $\gamma = -0.741845$. Syarat sempadan di atas B"A" adalah diperolehi dengan mengguna pemetaan songsang w_2^{-1} dan boleh ditunjuk menjadi:

$$
\begin{aligned}
y &= g(\phi_2) \\
&= \frac{2}{K} \int_0^{\phi_2} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} - 2 \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Kami catatkan di sini bahawa $x = C_1$ (satu pemalar) adalah syarat yang sepadan kepada $\partial y/\partial \psi_2 = 0$ bagi masalah nilai sempadan bercampur itu.

Dengan mengguna analisis klasik dalam [5], persamaan kamiran anih Cauchy berikut diperolehi.

Untuk $s \in$ B" C":

$$
-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{\gamma} v(t) \frac{dt}{t-s} + C_1 = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma}^{1} g(t) \frac{dt}{t-s} \qquad (12)
$$

Untuk mengubah $(-1,\gamma)$ kepada $(-1,1)$, kami menakrifkan:

$$t_1 = \frac{2}{\gamma + 1}\left(t + \frac{1-\gamma}{2}\right) \qquad (13)$$

dan persamaan kamiran akhir menjadi

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} y(t_1)\,\frac{dt_1}{t_1 - s_1} + C_1 = \frac{1}{\pi}\int_{\gamma}^{1} g(t)\,\frac{dt}{t-s} \qquad (14)$$

Kami hampirkan $y(t_1)$ dengan mengguna siri terpangkas polinomial-polinomial Chebyschev jenis kedua berserta dengan satu sebutan interpolasi:

$$y(t_1) = \sqrt{1 - t_1^2}\,\sum_{j=0}^{N} \alpha_j U_j(t_1) - 1.3(1 + t_1) \qquad (15)$$

Sebutan kedua adalah ditambah untuk menjamin keselanjaran **y** pada kedua simpang lengkuk yang dibincang itu dan ianya diperolehi dengan interpolasi linear.

Kami catatkan di sini bahawa:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}\,U_n(t)}{t-s}\,dt = -T_{n+1}(s) \qquad (16)$$

di mana $T_{n+1}(s)$ adalah polinomial Chebyshev jenis pertama dengan darjah $n+1$. Maka, dengan memasukkan (15) ke dalam (14), kami memperolehi

$$\sum_{j=0}^{N} \alpha_j T_{j+1}(s_1) + C_1 = \frac{1}{\pi}\int_{\gamma}^{1} g(t)\,\frac{dt}{t-s} - \frac{1.3}{\pi}\left[2 + (s_1+1)\ln\frac{(1-s_1)}{(1+s_1)}\right] \qquad (17)$$

Kamiran dalam (17) tidak menimbulkan sebarang kerumitan kerana ianya tak anih.

Nilai-nilai pemalar C_1 dan pengali-pengali $\{\alpha_j\}_{j=0}^{N}$ boleh diperolehi dengan kolokasi. Kami mengambil titik-titik kolokasi pada sifar

...8/-

$\{\eta_i\}_{i=1}^{N+2}$ untuk $T_{N+2}(s_1)$, iaitu:

$$\eta_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2} \cdot \frac{\Pi}{N+2}\right) \tag{18}$$

4. Keputusan-keputusan berangka

Sayogia diberitahu di sini bahawa C_1 bukanlah kordinat - x bagi C tetapi ianya satu pemalar kamiran. Kordinat - x bagi C boleh ditentukan jika kita buat satu penyesuaian agar kordinat - x bagi C adalah sifar. Penambahan penyesuaian ini kepada pemalar kamiran C_1 memberikan x_c yang dikehendaki.

Nilai-nilai x_A, x_D, dan x_C adalah diberikan dalam Jadual A dan mereka kemudian dibanding dengan nilai-nilai yang telah diperolehi dalam Jadual 2 dalam [4]. Hasil-hasil kami bersetuju benar dengan penyelesaian-penyelesaian secara analisis dalam [2] dengan N yang kecil. Mereka adalah lebih baik dari nilai-nilai yang diperolehi dengan kaedah beza terhingga [1] dan kaedah persamaan kamiran sempadan yang biasa [4], dimana 32 titik telah diguna dalam kiraan.

JADUAL A

	x_A	x_D	x_C
Penyelesaian analisis	0.499	-3.970	-4.311
Charmonman [1]	0.499	-3.893	-4.214
Liu & Liggett [4]	0.443	-3.855	-4.192
N = 4	0.499	-3.962	-4.314
N = 8	0.499	-3.969	-4.311
N = 16	0.499	-3.970	-4.311

....9/=

Dalam jadual B, kami berikan kordinat -x dan -y bagi beberapa titik sepanjang permukaan bebas AB dengan N = 8.

JADUAL B

x	y	x	y
0.4994	0.0000	-0.4930	-1.4000
0.4793	-0.2000	-0.8042	-1.6000
0.4191	-0.4000	-1.1657	-1.8000
0.3187	-0.6000	-1.5878	-2.0000
0.1778	-0.8000	-2.0938	-2.2000
-0.0039	-1.0000	-2.7508	-2.4000
-0.2270	-1.2000	-4.3110	-2.6000

5. Kesimpulan

Penggunaan persamaan kamiran anih berserta pemetaan konformal adalah suatu teknik berguna dalam menyelesaikan masalah-masalah tirisan. Ia bergantung kepada kenyataan bahawa suatu rumusan songsang masalah itu boleh membawa kepada masalah nilai sempadan bercampur dan harmonik bagi suatu gambarajah yang dikenali.

Penghargaan.

Saya ingin melahirkan penghargaan ikhlas kepada Dr. K.S. Thomas dari Universiti Southampton. Kertas ini mengandungi sebahagian dari thesis saya yang ditulis semasa di bawah pengawasannya. Saya juga terhutang budi kepada Universiti Teknologi Malaysia atas bantuan kewangan sepanjang tempuh penyelidikan ini di Southampton.

Rujukan

[1] Charmonman, S. (1966)
A Numerical Method of Solution of Free Surface Problems.
J. Geophys. Res. 71, pp. 3861 - 3868.

[2] Hewson - Browne, R.C. (1974)
An Analytical Solution for the problem of a Confined aquifer in Which a fresh-water Canal runs along the middle of a mud flat.
Quart. J. Mech. Appl. Math. 27,pp. 143 - 148.

[3] Jeppson, R.W. (1968)
Seepage through dams in the complex potential plane.
Proc. Amer. Soc. Civil Eng., J.Irr. & Drainage Div., Vol. 94, pp. 23 - 39.

[4] Liu, P.L. - F. and Liggett. J.A. (1978)
An efficient numerical method of two-dimensional steady ground water problems.
Water Resour. Res. 14, pp. 385 - 390.

[5] Muskhelishvili N.T. (1953)
Singular Integral Equations.
P. Noordhoft N.V. Groningen - Holland.

[6] Razali, M.R. and Thomas, K.S. (1982)
Singular integral equations and mixed boundary value problems for harmonic functions.
Edited by C.T.H. Baker and G.F. Miller, Acad. Press, London.

[7] Razali, M.R. (1983)
Singular integral equations and mixed boundary value problems for harmonic functions.
Ph. D. Thesis, Univ. Of Southampton.

[8] Thom. A and Apelt, C.J. (1961)
Field Computations in Engineering and Physics.
Van Nostrand, London.

.../-

@@@@@@@@@@@@