

MATEMATIKA, 2009, Volume 25, Number 2, 135–146
©Department of Mathematics, UTM

Persembahan Kumpulan-2 yang Berperingkat 32 (Presentation of 2-Group of Order 32)

¹Abdullah Tahir Othman & ²Sharmila Karim

¹Jabatan Matematik, Fakulti Sains
Universiti Teknologi Malaysia, 81310 UTM Skudai, Johor

²Sekolah Sains Kuantitatif, Universiti Utara Malaysia
06010 Sintok, Kedah, Malaysia

e-mail: ¹ato@mel.fs.utm.my, ²mila@uum.edu.my

Abstrak Kajian mengenai persembahan kumpulan-2 yang berperingkat 2^n , ($n \leq 6$) telah dipelopori oleh Hall et al. [4] dan diteruskan oleh Sag et al. [7]. Kertas kerja ini fokus kepada persembahan kumpulan-2 yang berperingkat 2^5 yang mana terdapat 51 kumpulan, iaitu 7 kumpulan Abelian dan 44 kumpulan tak-Abelian dan lebih tertumpu kepada pencarian struktur-struktur yang agak unik bagi 44 kumpulan tak-Abelian untuk menunjukkan kumpulan tersebut adalah tidak saling isomorfisma dengan menggunakan perisian GAP (Groups, Algorithms, and Programming).

Katakunci Kumpulan-2; persembahan kumpulan; isomorfisma; kumpulan tak-Abelian.

Abstract Research on the presentation of 2-groups of order 2^n , ($n \leq 6$) was founded by Hall et al. [4] and was continued by Sag et al [7]. This paper focuses on the presentation of 2-groups of order 2^5 where there are 51 groups comprising of 7 Abelian groups and 44 non-Abelian groups. We are more concerned in finding the structures for each of the every 44 non-Abelian groups to show that these groups are not isomorphic to each other using GAP (Groups, Algorithms, and Programming) software.

Keywords 2-Group; group presentation; isomorphism; non-Abelian group.

1 Pengenalan

Masalah dalam memberi gambaran semua kumpulan yang berperingkat n (n integer positif) dengan memberi suatu persembahan dengan penjana dan penghubung untuk setiap jenis kumpulan telah dikaji oleh Cayley [1] pada tahun 1871. Beliau mengatakan ianya adalah masalah umum untuk setiap kumpulan terhingga. Dalam tahun 1872, Sylow [8] telah membuktikan bahawa kumpulan- p terhingga yang berperingkat p^n boleh dinyatakan dalam bentuk persembahan kuasa-penukartertib iaitu setiap kumpulan berperingkat p^n mempunyai persembahan penukartertib ke atas n bilangan penjana dan persembahan bentuk ini adalah konsisten.

Klasifikasi bagi kumpulan kuasa perdana (p^n) untuk $p = 2$ telah diberikan oleh Hall [3] dengan menyatakan terdapat 51 bilangan kumpulan-2 yang berperingkat 2^5 yang terdiri daripada 7 kumpulan Abelian dan 44 kumpulan tak-Abelian. Kumpulan tersebut adalah tidak saling berisomorfisma. Ini kerana Hall et.al [4] telah mengkaji struktur-struktur kumpulan ini iaitu dengan melihat berapakah bilangan unsur yang berperingkat 2,4,8,16 dan 32 bagi setiap kumpulan, bilangan kumpulan pembahagi, peringkat automorfisma bagi kumpulan G , $G/\Phi(G)$ dan $G/Z(G)$ dan senarai subkumpulan Abelian Maksimum. Struktur-

struktur yang dinyatakan adalah tidak unik dan persembahan bagi kumpulan-2 adalah panjang dan rumit.

Lanjutan dari itu, Sag et.al [7] telah memberikan senarai persembahan yang minimum bagi kumpulan-2 dalam bentuk yang ringkas iaitu dengan menyatakan dengan jelas bilangan penjana dan menggunakan perwakilan penukartertib bagi menyatakan hubungan. Persembahan minimum dikemukakan kerana persembahan bagi kumpulan-2 adalah tidak unik dimana wujud 2 atau lebih kumpulan-2 yang berperingkat sama dan berlainan persembahan tetapi saling berisomorfisma.

Dalam kertas kerja ini, persembahan kumpulan-2 yang berperingkat 2^5 yang diberikan oleh Sag et al. [7] diolah kepada bentuk yang mudah dan terdapat juga perbezaan persembahan kumpulan yang diberikan oleh Sag et al. [7] dengan hasil kajian ini. Kita akan melihat tiga struktur bagi setiap kumpulan ini yang mana sudah cukup untuk membuktikan kumpulan-kumpulan tersebut tidak saling berisomorfisma terutamanya bagi 44 kumpulan tak-Abelian iaitu struktur kekisi subkumpulan, pusat kumpulan dan subkumpulan maksimum berperingkat 2^4 . Pencarian struktur-struktur tersebut dilakukan dengan bantuan pengaturcaraan GAP (Groups, Algorithm and Programming) versi 4.2 [6].

2 Beberapa Keputusan yang Telah Dihasilkan

Sebelum diterangkan mengenai persembahan kumpulan-2, struktur teorem yang digunakan untuk menghasilkan persembahan kumpulan-2 dinyatakan. Pertama, dua asas lema dinyatakan tanpa bukti.

Lema 1 [5] *Kumpulan G yang berperingkat 2^n mempunyai siri normal*

$$G = G_n \supset G_{n-1} \supset \dots \supset G_0 = \{1\},$$

dimana G_k adalah subkumpulan normal G yang berperingkat 2^k . Apa sahaja siri normal yang diberi boleh digolongkan dalam siri demikian.

Lema 2 [5] *Andaikan G adalah kembangan kuasa 2 kumpulan H . Untuk sesuatu unsur $x \in G - H$, $G = H \cup xH$. Pendaraban dalam G adalah tertakrif dalam pendaraban dalam H dengan merujuk kepada $x^2 = \alpha \in H$, dan $a^x = x^{-1}ax$ untuk semua $a \in H$. Penjelmaan $a \rightarrow a^x$ adalah automorfisma H yang memenuhi syarat*

$$(i) (a^x)^x = \alpha^{-1}a\alpha, \text{ dan}$$

$$(ii) \alpha^x = \alpha.$$

Akasnya, untuk sesuatu $\alpha \in H$ automorfisma H yang memenuhi kedua-dua syarat di atas menentukan sesuatu kembangan.

Untuk kumpulan berperingkat kuasa perdana, Lema 1 adalah penghasilan fakta yang mudah iaitu G mempunyai pusat yang mengandungi unsur selain dari identiti. Lema 2 adalah pengkhususan sifat kembangan kumpulan kitaran.

Dalam teorem yang seterusnya, unsur kumpulan adalah diwakilkan sebagai hasil darab penjana, dengan susunan subskrip yang menurun. Ini merupakan suatu cara yang mudah apabila penukartertib $c_{jk}, k < j$ adalah tertakrif sebagai dalam persamaan (2) dibawah.

Oleh kerana itu, kita mempunyai formula, bermula dengan (2), yang menggunakan simbol hasil darab iaitu,

$$\prod_{l=q}^1 x_l = x_q x_{q-1} \dots x_1.$$

Teorem 1 [5] *Dalam kumpulan G yang berperingkat 2^n , katakan*

$$G = G_n \supset G_{n-1} \supset \dots \supset G_0 = \{1\},$$

menjadi siri normal panjang maksimum dan $\alpha_j \in G_j - G_{j-1}$, $1 \leq j \leq n$, kemudian unsur G adalah hasil darab

$$x = \alpha_n^{a_n} \alpha_{n-1}^{a_{n-1}} \dots \alpha_1^{a_1}, \quad (1)$$

dengan $a_n, \dots, a_1 = 0$ atau 1. Penjana-penjana $\{\alpha_j\}$ memenuhi hubungan pertukaran tertib yang berbentuk

$$C_{jk} = \alpha_k^{-1} \alpha_j^{-1} \alpha_k \alpha_j = \prod_{l=k-1}^1 \alpha_l^{C_{jkl}}, \quad 1 \leq j < k \leq n. \quad (2)$$

dan kuasa duanya mempunyai bentuk

$$\alpha_j^2 = \prod_{l=j-1}^1 \alpha_l^{b_{jl}}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (3)$$

di mana eksponen c_{jkl} dan b_{jl} bersamaan 0 atau 1. Seterusnya hubungan-hubungan penjana memenuhi:

(i) *Untuk $n \geq j > k > l \geq 2$,*

$$(\alpha_j C_{jl})^{-1} (\alpha_k C_{jk})^{-1} (\alpha_l C_{jl}) (\alpha_k C_{jk}) = \prod_{m=l-1}^1 (\alpha_m C_{jm})^{C_{klm}}. \quad (4)$$

(ii) *Untuk $n \geq j > k \geq 2$,*

$$(\alpha_k C_{jk})^2 = \prod_{l=k-1}^1 (\alpha_l C_{jl})^{b_{kl}}. \quad (5)$$

(iii) *Untuk $n \geq j \geq 2$,*

$$\prod_{l=j-1}^1 (\alpha_l C_{jl})^{b_{jl}} = \prod_{l=j-1}^1 \alpha_l^{b_{jl}}. \quad (6)$$

(iv) *Untuk $n \geq j > k \geq 2$,*

$$\left[\prod_{l=1}^{j-1} \alpha_l^{-b_{jl}} \right] a_k \left[\prod_{l=j-1}^1 \alpha_l^{b_{jl}} \right] = \alpha_k C_{jk} \prod_{m=l-1}^1 (\alpha_m C_{jm})^{C_{klm}} \quad (7)$$

Bukti: Perwakilan (1) didasarkan dari pernyataan yang kukuh iaitu jika $x \in G_k$, maka (1) benar dengan $\alpha_j = 0$ untuk $j > k$. Ini boleh dibuktikan dengan aruhan ke atas k . Untuk $k = 0$, ianya benar kerana $G_0 = \{1\}$.

Jika ianya benar untuk semua $x \in G_{k-1}$, kemudian dari $G_k = G_{k-1} \cup \alpha_k G_{k-1}$, ia benar untuk k yang seterusnya.

Untuk $j > k$, G_k dan G_{k-1} adalah subkumpulan normal G_j . Maka pemetaan

$$\alpha = \alpha^{(j)} = \alpha_j^{-1} \alpha \alpha_j$$

membawa subkumpulan normal ini kepada subkumpulan normal yang sama. Oleh kerana ianya pemetaan satu ke satu, $(G_k - G_{k-1})^j = G_k - G_{k-1} = \alpha_k G_{k-1}$. Maka

$$\alpha_j^{-1} \alpha_k \alpha_j \in \alpha_k G_{k-1}$$

yang mana ianya dinyatakan dalam persamaan (2).

Persamaan (3) menerangkan $\alpha_j^2 \in G_{j-1}$. Hubungan (4) dan (5) menghasilkan penjelasan $\alpha \rightarrow \alpha^{(j)}$ automorfisma bagi G_{j-1} . Persamaan (6) dan (7) adalah 2 syarat perlu yang diberikan dalam Lema 2. Persamaan (3)-(7) adalah turutan dari Lema 2. \square

Teorem 2 [5] *Set hasil darab (1) ke atas n huruf $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ membentuk suatu kumpulan G yang berperingkat 2^n jika hasil darabnya adalah ditentukan oleh hubungan yang berbentuk dalam persamaan (2) dan (3), yang memenuhi syarat (4)-(7). Untuk $k \leq n$, set G_k iaitu hasil darab $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ adalah subkumpulan normal bagi G .*

Bukti: Dengan menggunakan bahagian akhir Lema 2 dan aruhan ke atas k dalam pembuktian Teorem 1, maka set hasil darab $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ membentuk kumpulan G_k yang merupakan kembangan kuasa 2 bagi G_{k-1} . Barisan hasil darab di sebelah kanan (2) mengimplikasikan bahawa G_k adalah memetakan kepada G_k sendiri dengan sesuatu perkedalam automorfisma G_n . Maka G_k adalah normal. \square

Persamaan (2) dan (3) membawa kepada ketidakisomorfisma bagi sesuatu kumpulan dengan kumpulan lain yang sama peringkatnya.

3 Persembahan Kumpulan- p

Takrif 1 [2] *Persembahan kumpulan dipanggil persembahan kuasa-penukartertib untuk kumpulan- p terhingga dengan $X = \{a_1, \dots, a_n\}$ dan hubungan R , adalah berbentuk*

$$a_i^p = \prod_{k=i+1}^n a_k^{\beta(i,k)}, \quad 0 \leq \beta(i,k) < p, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad \text{dan} \quad (8)$$

$$[a_j, a_i] = \prod_{k=j+1}^n a_k^{\beta(i,j,k)}, \quad 0 \leq \beta(i,j,k) < p, \quad 1 \leq i < j \leq n-1 \quad (9)$$

di mana

$$a_n^p = [a_n, a_i] = 1. \quad (10)$$

Satu contoh persembahan kuasa-penukartertib di atas bagi kumpulan-2 yang berperingkat 2^5 ialah $n = 5, p = 2$, dan $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$.

Dari persamaan (8), kita ambil $\beta(i, k) = 0$ bagi semua i, k di mana $1 \leq i \leq 4$, maka $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = a_4^2 = 1$.

Dari persamaan (10),

$$a_5^2 = 1, [a_5, a_1] = 1, [a_5, a_2] = 1, [a_5, a_3] = 1, [a_5, a_4] = 1.$$

Kemudian, dari persamaan (9),

$$\text{ambil } i = 1, j = 2, [a_2, a_1] = a_3^{\beta(1,2,3)} a_4^{\beta(1,2,4)} a_5^{\beta(1,2,5)},$$

$$\text{ambil } i = 1, j = 3, [a_3, a_1] = a_4^{\beta(1,3,4)} a_5^{\beta(1,3,5)},$$

$$\text{ambil } i = 1, j = 4, [a_4, a_1] = a_5^{\beta(1,4,5)},$$

$$\text{ambil } i = 2, j = 3, [a_3, a_2] = a_4^{\beta(2,3,4)} a_5^{\beta(2,3,5)},$$

$$\text{ambil } i = 2, j = 4, [a_4, a_2] = a_5^{\beta(2,4,5)}, \text{ dan}$$

$$\text{ambil } i = 3, j = 4, [a_4, a_3] = a_5^{\beta(3,4,5)}.$$

Sekarang, katakan

$$\begin{aligned} \beta(1, 2, 3) &= \beta(1, 2, 4) = \beta(1, 3, 4) = \beta(1, 3, 5) = \beta(1, 4, 5) \\ &= \beta(2, 4, 5) = \beta(2, 3, 4) = \beta(2, 3, 5) = \beta(3, 4, 5) = 0, \text{ dan } \beta(1, 2, 5) = 1, \end{aligned}$$

maka

$$[a_2, a_1] = a_5, [a_3, a_2] = 1, [a_4, a_3] = 1, [a_3, a_1] = 1, [a_4, a_1] = 1, [a_4, a_2] = 1.$$

Dengan itu persembahan kuasa-penukartertib bagi kumpulan-2 yang berperingkat 32 ialah

$$\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 | a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = a_4^2 = a_5^2 = 1, [a_2, a_1] = a_5, [a_3, a_1] = 1, [a_4, a_1] = 1, [a_3, a_2] = 1, [a_4, a_2] = 1, [a_4, a_3] = 1, [a_5, a_1] = 1, [a_5, a_2] = 1, [a_5, a_3] = 1, [a_5, a_4] = 1 \rangle.$$

4 Persembahan Kumpulan-2 Tak-Abelian Berperingkat 2^5

Dalam bahagian ini, 44 persembahan kumpulan-2 yang tak-Abelian yang diolah daripada Sag et al. [7] kepada bentuk yang mudah dihasilkan. Selain itu struktur-struktur bagi setiap kumpulan iaitu kekisi subkumpulan, pusat kumpulan, $Z(G)$ dan subkumpulan maksimum normal diberikan. Sila rujuk kepada Jadual 1. Perbezaan hasil kajian Sag et al. [7] dengan hasil penyelidikan ini juga diberikan seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 2.

Tatatanda berikut digunakan dalam jadual di bawah.

C_n	kumpulan kitaran berperingkat n
D_n	kumpulan dihedral berperingkat n
Q_n	kumpulan kuarternion berperingkat n
M_n	kumpulan modular berperingkat n
SD_n	kumpulan semidihedral berperingkat n
$H \times K$	hasil darab langsung
$H \rtimes K$	hasil darab semi langsung

5 Kesimpulan

Kami telah berjaya mengolah persembahan kumpulan berperingkat 32 dan memberikan persembahan kumpulan yang berbeza dari yang dihasilkan oleh Sag et al. [7] berdasarkan Teorem 1.

Rujukan

- [1] A. Cayley, *Desiderata and Suggestion No 1 The Theory of Groups*, Amer. J. Math., (1878).
- [2] R. Eugene, *The Groups of Order 128*, *J. of Algebra*, 67(1980), 129-142.
- [3] P. Hall, *The Classification of Prime-Power Groups*, *J. Reine Angew Math.* 182(1940), 130-141
- [4] M. Hall & J. K Senior, *The Groups of Order 2^n ($n \leq 6$)*, Macmillan Company, New York, 1964.
- [5] J. Rodney, *The Groups of Order 128*, *J. of Algebra*, 129(1990), 136-158.
- [6] GAP-Groups, Algorithms, and Programming (<http://www.gap-system.org>)
- [7] T. W. Sag & J.W. Wamsley, *Minimal Presentations for Groups of Order 2 ($n \leq 6$)*, *Australian Math Soc J. Ser A15.* (1973), 461-469.
- [8] L. Sylow, *Theoremes Sur Les Groupes De Substitutions*, *Math. Ann.*, 5(1872), 584-59.

Jadual 1: Persembahan Kumpulan Peringkat 32

Bil	Persembahan Kumpulan	Struktur Kekisi subkumpulan		Subkumpulan Maksimum Normal	Z(G)
		Bil Kelas Konjugat	Bil Subkumpulan		
4.1	$D_8 \times C_2 \times C_2 = \langle a, b, c, d \mid a^4 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, ba = a^5b, ac = ca, ad = da, bc = cb, bd = db, cd = dc \rangle$	118	158	$C_4 \times C_2 \times C_2, D_8 \times C_2, C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$	$\{1, a^2, c, d, a^2, c, a^2d, cd, a^2cd\}$
4.2	$Q_8 \times C_2 \times C_2 = \langle a, b, c, d \mid a^4 = c^2 = d^2, a^2 = b^2 = 1, ba = a^3b, ac = ca, ad = da, bc = cb, bd = db, cd = dc \rangle$	78	78	$C_4 \times C_2 \times C_2, Q_8 \times C_2$	$\{1, b^2, c, d, b^2c, b^2d, cd, b^2cd\}$
4.3	$((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \times C_2 = \langle a, b, c, d \mid a^4 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, ba = ab, ac = ca, ad = da, cb = a^2bc, bd = db, cd = dc \rangle$	82	94	$Q_8 \times C_2, C_4 \times C_2 \times C_2, D_8 \times C_2, (C_4 \times C_2) \rtimes C_2$	$\{1, a, a^2, a^3, d, ad, a^2d, a^3d\}$
4.4	$(C_2 \times (C_2 \rtimes C_4)) \times C_2 = \langle a, b, c, d \mid a^2 = b^2 = c^4 = d^2 = 1, ba = ab, ac = ca, ad = da, cb = abc, bd = db, cd = dc \rangle$	66	94	$C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2, C_4 \times C_2 \times C_2, (C_4 \rtimes C_2) \times C_2$	$\{1, a, c^2, d, ad, ac^2, c^2d, ac^2d\}$
4.5	$(C_4 \rtimes C_4) \times C_2 = \langle a, b, c \mid a^4 = b^4 = c^2 = 1, ba = a^2b, ac = ca, bc = cb \rangle$	46	54	$C_4 \times C_2 \times C_2, C_4 \rtimes C_4$	$\{1, a^2, b^2, c, a^2c, b^2c, a^2b^2, a^2b^2c\}$
4.6	$M_{16} \times C_2 = \langle a, b, c \mid a^8 = b^2 = c^2 = 1, ba = a^2b, ac = ca, bc = cb \rangle$	34	38	$C_4 \times C_2 \times C_2, C_8 \times C_2, C_8 \rtimes C_2$	$\{1, a^2, a^4, a^6, c, a^2c, a^4c, a^6c\}$
4.7	$D_8 \times C_4 = \langle a, b, c \mid a^4 = b^2 = c^4 = 1, ba = a^3b, ac = ca, bc = cb \rangle$	47	62	$C_4 \rtimes C_4, C_4 \times C_4, D_8 \times C_2, C_4 \times C_2 \times C_2, (C_4 \rtimes C_2) \times C_2$	$\{1, a^2, c, c^2, c^3, a^2c, a^2c^2, a^2c^3\}$

Jadual 1(Sambungan): Persembahan Kumpulan Peringkat 32

4.8	$Q_8 \times C_4 =$ $\langle a, b, c \mid a^4 = c^4 = 1, a^2 = b^2, ba = a^2b,$ $ac = ca, bc = cb \rangle$	35	38	$Q_8 \times C_2,$ $C_4 \times C_4,$ $C_4 \rtimes C_4.$	$\{1, b^2, c,$ $c^2, c^3, b^2c,$ $b^2c^2, b^2c^3\}$
4.9	$(C_4 \times C_2) \rtimes C_4 =$ $\langle a, b, c \mid a^4 = b^2 = c^4 = 1, ba = ab,$ $ac = ca, cb = a^2bc \rangle$	38	46	$C_4 \times C_2 \times C_2,$ $C_4 \times C_4,$ $C_4 \rtimes C_4,$ $(C_4 \rtimes C_2) \times C_2.$	$\{1, a, a^2, a^3,$ $c^2, ac^2, a^2c^2,$ $a^3c^2\}$
4.10	$C_8 \rtimes (C_2 \times C_2) =$ $\langle a, b, c \mid a^8 = b^2 = c^2 = 1, ba = ab,$ $ac = ca, cb = a^4bc \rangle$	31	34	$(C_4 \times C_2) \rtimes C_2,$ $C_8 \times C_2,$ $C_8 \rtimes C_2.$	$\{1, a, a^2, a^3,$ $a^4, a^5, a^6,$ $a^7\}$
4.11	$(C_2 \times C_4) \rtimes C_4 =$ $\langle a, b, c \mid a^2 = b^4 = c^4 = 1, ba = ab,$ $ac = ca, cb = abc \rangle$	38	50	$C_4 \times C_2 \times C_2.$	$\{1, a, b^2,$ $c^2, ab^2, ac^2,$ $b^2c^2, ab^2c^2\}$
4.12	$C_8 \rtimes C_4 = \langle a, b \mid a^8 = b^4 = 1, ba = a^2b \rangle$	20	22	$C_4 \times C_4,$ $C_8 \times C_2.$	$\{1, a^2, a^4,$ $a^6, b^2, a^2b^2,$ $a^4b^2, a^6b^2\}$
4.13	$(C_8 \times C_2) \rtimes C_2 =$ $\langle a, b, c \mid a^8 = b^2 = c^2 = 1, ba = ab,$ $ca = abc, cb = bc \rangle$	25	34	$C_8 \times C_2,$ $C_4 \times C_2 \times C_2.$	$\{1, a, a^4,$ $a^6, b, a^2b,$ $a^4b, a^6b\}$
4.14	$C_4 \rtimes C_8 = \langle a, b \mid a^4 = b^8 = 1, ba = a^3b \rangle$	19	22	$C_4 \times C_4,$ $C_8 \times C_2.$	$\{1, a^2, b^2,$ $b^4, b^6, a^2b,$ $a^2b^4, a^2b^6\}$
4.15	$M_{32} = \langle a, b \mid a^{16} = b^2 = 1, ba = a^2b \rangle$	13	14	$C_8 \times C_2,$ $C_{16}.$	$\{1, a^2, a^4,$ $a^6, a^8, a^{10},$ $a^{12}, a^{14}\}$
4.16	$D_{16} \times C_2 =$ $\langle a, b, c \mid a^8 = b^2 = c^2 = 1, ba = a^7b,$ $ac = ca, bc = cb \rangle$	38	70	$C_8 \times C_2,$ $D_8 \times C_2,$ $D_{16}.$	$\{1, a^4,$ $c, a^4c\}$
4.17	$SD_{16} \times C_2 =$ $\langle a, b, c \mid a^8 = b^2 = c^2 = 1, ba = a^3b,$ $ac = ca, bc = cb \rangle$	34	54	$D_8 \times C_2,$ $Q_8 \times C_2,$ $C_8 \times C_2,$ $SD_{16}.$	$\{1, a^4,$ $c, a^4c\}$

Jadual 1(Sambungan): Persembahan Kumpulan Peringkat 32

4.18	$Q_{16} \times C_2 =$ $\langle a, b, c \mid a^3 = c^2 = 1, a^4 = b^2,$ $ba = a^7 b, ac = ca, bc = cb \rangle$	30	38	$Q_8 \times C_2,$ $C_8 \times C_2,$ $Q_{16}.$	$\{1, b^2,$ $c, b^2 c\}$
4.19	$\langle a, b, c \mid a^3 = b^4 = c^2 = 1, a^4 = b^2,$ $ab = ba, ca = a^7 c, bc = cb \rangle$	31	46	$C_8 \times C_2,$ $D_{16},$ $Q_{16},$ $SD_{16},$ $(C_4 \times C_2) \rtimes C_2.$	$\{1, a^4,$ $b, a^4 b\}$
4.20	$\langle a, b, c \mid a^3 = b^4 = c^2 = 1, a^4 = b^2,$ $ab = ba, ca = a^2 bc, cb = a^4 bc \rangle$	25	46	$D_8 \times C_2,$ $C_8 \times C_2,$ $C_4 \rtimes C_4.$	$\{1, a^4, a^2 b,$ $a^4 b\}$
4.21	$\langle a, b, c \mid a^3 = b^4 = c^4 = 1, a^4 = b^2,$ $b^2 = c^2, ab = ba, ca = abc, cb = b^3 c \rangle$	21	30	$Q_8 \times C_2,$ $C_8 \times C_2,$ $C_4 \rtimes C_4.$	$\{1, c^2, a^2 b,$ $a^4 b\}$
4.22	$C_8 \rtimes C_4 = \langle a, b \mid a^3 = b^4 = 1, ba = a^7 b \rangle$	18	26	$C_8 \times C_2,$ $C_4 \rtimes C_4.$	$\{1, a^4,$ $b^2, a^4 b^2\}$
4.23	$C_8 \rtimes C_4 = \langle a, b \mid a^3 = b^4 = 1, ba = a^3 b \rangle$	18	26	$C_8 \times C_2,$ $SD_{16},$ $Q_{16},$ $C_4 \rtimes C_4.$	$\{1, a^4,$ $b^2, a^4 b^2\}$
4.24	$\langle a, b, c \mid a^4 = b^4 = c^2 = 1, ba = ab,$ $ca = a^3 c, cb = abc \rangle$	22	34	$C_4 \times C_4,$ $C_8 \rtimes C_2,$ $Q_8 \rtimes C_2.$	$\{1, ab^2, a^2,$ $a^3 b^2\}$
4.25	$\langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = c^4 = 1, a^4 = c^2, b^2 = c^3,$ $ba = abc, ca = a^2 c \rangle$	15	18	$C_8 \times C_2,$ $C_8 \rtimes C_2.$	$\{1, a^2, b^4,$ $a^2 b^4\}$
4.26	$\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ac)^4 = (bc)^4 = 1,$ $b^2 = c^2, ab = ba, cbca = acbc \rangle$	65	106	$C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2,$ $D_8 \rtimes C_2,$ $(C_2 \rtimes C_4) \times C_2.$	$\{1, (ac)^2,$ $(bc)^2,$ $(ac)^2 (bc)^2\}$
4.27	$\langle a, b, c \mid a^4 = b^4 = c^2 = 1, ab = ba,$ $ca = a^2 c, cb = b^3 c \rangle$	54	90	$C_4 \times C_4,$ $D_8 \times C_2.$	$\{1, a^2, b^2,$ $a^2 b^2\}$
4.28	$\langle a, b, c \mid a^4 = b^4 = c^4 = 1, a^2 = c^2, ab = ba,$ $ca = a^2 c, cb = b^3 c \rangle$	34	42	$C_4 \times C_4,$ $Q_8 \times C_2,$ $C_4 \rtimes C_4.$	$\{1, b^2, c^2,$ $b^2 c^2\}$

Jadual 1(Sambungan): Persembahan Kumpulan Peringkat 32

4.29	$\langle a, b, c \mid a^4 = b^2 = c^2 = (bc)^4 = 1, ab = ba, ca = a^3c \rangle$	47	74	$C_4 \times C_2 \times C_2,$ $C_4 \rtimes C_4,$ $D_8 \times C_2,$ $(C_4 \rtimes C_2) \times C_2.$	$\{1, a^2, (bc)^2, a^2(bc)^2\}$
4.30	$\langle a, b, c, d \mid a^4 = b^4 = c^2 = d^2 = 1, a^2 = b^2, ba = a^2b, ac = ca, ad = da, cb = bcd, bd = db, cd = dc \rangle$	37	50	$C_4 \times C_2 \times C_2,$ $Q_8 \times C_2,$ $C_4 \rtimes C_4,$ $(C_4 \rtimes C_2) \times C_2.$	$\{1, b^2, d, b^2d\}$
4.31	$\langle a, b, c, d \mid a^4 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, ab = ba, ac = ca, da = abd, bc = cd, bd = db, dc = a^2cd \rangle$	39	58	$C_4 \times C_2 \times C_2,$ $D_8 \times C_2,$ $C_4 \rtimes C_4,$ $(C_4 \rtimes C_2) \times C_2.$	$\{1, a^2, b, a^2b\}$
4.32	$\langle a, b, c \mid a^4 = b^4 = c^2 = 1, ab = ba, ca = a^3c, cb = a^2b^3c \rangle$	38	58	$C_4 \times C_4,$ $D_8 \times C_2,$ $Q_8 \times C_2,$ $(C_4 \rtimes C_2) \times C_2.$	$\{1, a^2, b^2, a^2b^2\}$
4.33	$\langle a, b, c \mid a^4 = b^4 = c^4 = 1, b^2 = a^2c^2, ab = ba, ca = a^3c, cb = bc^3 \rangle$	28	34	$C_4 \times C_4,$ $C_4 \rtimes C_4.$	$\{1, a^2, c^2, a^2c^2\}$
4.34	$\langle a, b, c \mid a^4 = b^4 = c^2 = 1, ab = ba, ca^2 = a^2c, cb = a^2bc, ca = a^2b^2c \rangle$	30	42	$C_4 \times C_4,$ $C_4 \rtimes C_4,$ $(C_4 \rtimes C_2) \times C_2.$	$\{1, a^2, b^2, a^2b^2\}$
4.35	$D_8 * D_8 =$ $\langle a, b, c, d \mid a^4 = b^4 = c^4 = d^4 = 1, a^2 = b^2 = c^2 = d^2, ab = ba, ac = ca, cb = a^2bc, bd = db, cd = dc, da = a^3d \rangle$	83	110	$(C_4 \times C_2) \rtimes C_2,$ $D_8 \times C_2.$	$\{1, d^2\}$
4.36	$D_8 * Q_8 =$ $\langle a, b, c, d \mid a^4 = b^4 = c^4 = d^2 = 1, a^2 = b^2 = c^2, ab = ba, ac = ca, cb = a^2bc, bd = db, cd = dc, da = a^3d \rangle$	73	78	$(C_4 \times C_2) \rtimes C_2,$ $Q_8 \times C_2.$	$\{1, c^2\}$
4.37	$\langle a, b, c \mid a^8 = b^2 = c^2 = 1, ba = a^7b, ca = a^5c, bc = cb \rangle$	34	58	$(C_4 \times C_2) \rtimes C_2,$ $D_8 \times C_2,$ $C_8 \rtimes C_2,$ $D_{16},$ $SD_{16}.$	$\{1, a^4\}$

Jadual 1(Sambungan): Persembahan Kumpulan Peringkat 32

4.38	$\langle a, b, c \mid a^2 = b^4 = c^2 = 1, a^4 = b^2, ba = a^7b, ca = a^2c, bc = cb \rangle$	30	42	$(C_4 \times C_2) \rtimes C_2,$ $Q_8 \times C_2,$ $C_8 \rtimes C_2,$ $Q_{16},$ $SD_{16}.$	$\{1, b^2\}$
4.39	$\langle a, b \mid a^2 = b^4 = 1, ba = abab^3ab, b^3a = ababab^3ab^3abab^3ab^3 \rangle$	26	50	$D_8 \times C_2,$ kumpulan yang mempunyai persembahan $\langle a, b \mid a^4 = b^4 = 1, abab = 1, ba^2 = ab^3 \rangle$	$\{1, b^2ab^2a\}$
4.40	$\langle a, b, c \mid a^3 = b^2 = c^2 = 1, ba = a^2b, ca = abc, bc = cb \rangle$	23	42	$D_3 \times C_2,$ $C_6 \rtimes C_2.$	$\{1, a^4\}$
4.41	$\langle a, b, c \mid a^3 = b^4 = c^2 = 1, a^4 = b^2, ba = abc, ca = a^2c, bc = cb \rangle$	19	26	$Q_8 \times C_2,$ $C_8 \rtimes C_2.$	$\{1, b^2\}$
4.42	$D_{32} = \langle a, b \mid a^{16} = b^2 = 1, ba = a^{15}b \rangle$	14	36	$C_{16},$ $D_{16}.$	$\{1, a^8\}$
4.43	$SD_{32} = \langle a, b \mid a^{16} = b^2 = 1, ba = a^7b \rangle$	13	28	$C_{16},$ $D_{16},$ $Q_{16}.$	$\{1, a^8\}$
4.44	$Q_{32} = \langle a, b \mid a^{16} = 1, a^8 = b^2, ba = a^{15}b \rangle$	12	20	$C_{16},$ $Q_{16}.$	$\{1, a^8\}$

Jadual 2: Perbezaan Persembahan Berbanding Kajian Sag

Kumpulan	Persembahan kumpulan yang dihasilkan oleh Sag	Persembahan kumpulan yang dihasilkan dalam penyelidikan ini
4.4	$\langle a, b, c \mid a^2 = b^4 = c^2 = 1, \\ ba = abab^3ab, ba = ababab^3, \\ ac = ca, cb = bc \rangle$	$C_2 \times (C_2 \times C_4) \times C_2 = \\ \langle a, b, c, d \mid a^2 = b^2 = c^4 = d^2 = 1, ba = ab, \\ ac = ca, ad = da, cb = abc, bd = db, cd = dc \rangle$
4.6	$\langle a, b, c \mid a^2 = b^5, c^4 = 1, \\ ba = ab^5, ac = ca, cb = bc \rangle$	$M_{16} \times C_2 = \\ \langle a, b, c \mid a^5 = b^2 = c^2 = 1, ba = a^2b, ac = ca, bc = cb \rangle$
4.11	$\langle a, b \mid a^4 = b^4 = (a^2b^3ab)^2 = 1, \\ [a, b, a] = 1, [a, b, b] = 1 \rangle$	$(C_2 \times C_4) \rtimes C_4 = \\ \langle a, b, c \mid a^2 = b^4 = c^4 = 1, ba = ab, ac = ca, cb = abc \rangle$
4.13	$\langle a, b \mid a^2 = b^5 = 1, [a, b, a] = 1, [a, b, b] = 1 \rangle$	$(C_8 \times C_2) \rtimes C_2 = \\ \langle a, b, c \mid a^5 = b^2 = c^2 = 1, ba = ab, \\ ca = abc, cb = bc \rangle$
4.20	$\langle a, b \mid a^5 = b^2 = (ba^3ba)^2 a^4 = 1, \\ [a, b, a] = 1, [a, b, b] = 1 \rangle$	$\langle a, b, c \mid a^5 = b^4 = c^2 = 1, a^4 = b^2, ab = ba, \\ ca = a^2bc, cb = a^4bc \rangle$
4.24	$\langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, \\ ba = a^3babab \rangle$	$\langle a, b, c \mid a^4 = b^4 = c^2 = 1, ba = ab, ca = a^3c, cb = abc \rangle$
4.25	$\langle a, b \mid a^5 = b^5 = 1, a^4 = b^4, ba = aba^2b^5 \rangle$	$\langle a, b, c \mid a^5 = b^5 = c^4 = 1, a^4 = c^2, b^2 = c^3, \\ ba = abc, ca = a^2c \rangle$
4.30	$\langle a, b, c \mid a^4 = b^2 = c^4 = 1, a^2 = c^2, \\ ba = ab, ca = a^2c, [b, c, b] = 1 \rangle$	$\langle a, b, c, d \mid a^4 = b^4 = c^2 = d^2 = 1, a^2 = b^2, \\ ba = a^2b, ac = ca, ad = da, cb = bcd, \\ bd = db, cd = dc \rangle$
4.31	$\langle a, b, c \mid a^2 = c^2 = b^4 = 1, ba = ab, \\ ca = ab^2c, [b, c, c] = 1 \rangle$	$\langle a, b, c, d \mid a^4 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, ab = ba, \\ ac = ca, da = abd, bc = cd, bd = db, dc = a^2cd \rangle$
4.40	$\langle a, b \mid a^2 = b^5 = 1, [a, b, a] = 1, \\ [a, b, b] = b^4 \rangle$	$\langle a, b, c \mid a^5 = b^2 = c^2 = 1, ba = a^2b, \\ ca = abc, bc = cb \rangle$
4.41	$\langle a, b \mid a^4 = b^5 = 1, a^2 = b^4, \\ [a, b, a] = 1, [a, b, b] = b^4 \rangle$	$\langle a, b, c \mid a^5 = b^4 = c^2 = 1, a^4 = b^2, \\ ba = abc, ca = a^2c, bc = cb \rangle$