DINAMIKA KELUARGA FUNGSI KUADRAT $Q_c(x) = x^2 + c$ BERDASARKAN TITIK TETAP

Rineka Eight Neenty[1], Siti Khabibah[2], YD. Sumanto[3]

[1,2,3]Program Studi Matematika

Jl. Prof. Soedarto, S.H, Semarang, 50275

ABSTRAK

Sistem dinamik merupakan sistem yang digunakan untuk mengetahui perilaku dinamik pada sebuah fungsi. Perilaku dinamik pada keluarga fungsi kuadrat $Q_c = x^2 + c$ dapat diketahui jika nilai c nya sudah ditentukan. Nilai c yang berbeda pada keluarga fungsi kuadrat Q_c menghasilkan sistem dinamik yang berbeda pula. Untuk mengetahui dinamika titik tetap pada suatu fungsi Q_c, langkah awal yang dilakukan yaitu dengan mencari titik tetap $Q_c(x)$ yaitu p_+ dan p_-. Selanjutnya diselidiki orbit titik- titik disekitar titik tetap, apakah bersifat *attracting, repelling,* atau *neutral*.

Perilaku orbit dari fungsi Q_c dapat diperjelas dengan menggunakan prosedur geometri yaitu analisa grafik dan *phase portrait*

Kata kunci : Titik tetap, analisa grafik, orbit.

1. PENDAHULUAN

Sistem dinamik merupakan cabang dari matematika yang mencoba untuk memahami proses gerak atau perubahan. Dinamika pada keluarga fungsi kuadrat merupakan perubahan – perubahan yang terjadi pada keluarga fungsi kuadrat. Perubahan ini disebabkan karena nilai c yang berbeda- beda.

Sejarah sistem dinamik bermula dari persamaan differensial yang sangat penting dalam ilmu pengetahuan dan tekhnologi. Terdapat banyak metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial, diantaranya transformasi laplace, metode aljabar linier, dan banyak teknik- teknik yang lain. Dalam perkembangannya, analisa teknik untuk menyelesaikan persamaan differensial sebagian besar dikerjakan untuk persamaan differensial linier sedangkan penyelesaian untuk persamaan differensial non linier lebih sulit diselesaikan. Pada kenyataannya, banyak proses – proses penting yang bentuknya adalah non linier.

Dalam sistem dinamis terdapat keluarga fungsi kuadrat $Q_c = x^2 + c$, dengan c adalah bilangan real atau bilangan kompleks. Fungsi kuadrat dengan bentuk kompleks seperti perilaku dinamik pada *Julia set* dan perilaku dinamik dari *Mandelbrot set*.

Perkembangan berikutnya yaitu metode sederhana yang digunakan untuk mengetahui perilaku dinamik dari keluarga fungsi kuadrat yaitu dengan proses iterasi. Sistemdinamik akan mencoba menyederhanakan operasi matematika seperti pada akar pangkat dua atau akar pangkat tiga dengan mengulang- ulang proses sampai berkali- kali. Proses tersebut dinamakan iterasi. Proses ini menghasilkan daftar dari bilangan rill atau bilangan kompleks yang berubah setelah dilakukan subsitusi.

2. ITERASI

Banyak permasalahan dalam ilmu pengetahuan dan matematika yang diselesaikan dengan iterasi. Iterasi merupakan pengulangan suatu proses sampai berkali – kali. Iterasi fungsi merupakan evaluasi fungsi secara terus menerus menggunakan hasil dari aplikasi sebelumnya sebagai input untuk aplikasi berikutnya. Jika diberikan fungsi F , maka $F^2(x)$ merupakan iterasi kedua dari F yaitu $F\left(F\ (x)\right)$ dan iterasi ketiga dari fungsi F yaitu $F\left(F\left(F\ (x)\right)\right)$ yang dapat ditulis $F^3(x)$. Secara umum dapat ditulis $F^n(x)$ merupakan iterasi ke n dari F yang dikerjakan di x. [1]

3. ORBIT

Titik x_0 disebut *seed* (titik awal) dari orbit dan n adalah bilangan asli. Dengan kata lain, orbit merupakan *output-output* dari suatu iterasi yang didaftarkan sesuai urutan yang dicapai. Dalam sistem dinamik kontinu, orbit digambarkan dalam bentuk kurva. Orbit ada tiga macam yaitu

1. Titik tetap

Sebuah titik x_0 dikatakan titik tetap jika memenuhi $F(x_0) = x_0$, jika dilakukan iterasi kedua maka $F^2(x_0) = F(F(x_0)) = F(x_0) = x_0$. Jadi secara umum titik tetap $F^n(x_0) = x_0$

2. Titik periodik

Sebuah titik x_0 dikatakan titik *periodic* jika $F^n(x_0) = x_0$, untuk beberapa nilai $n > 0$. Nilai n paling kecil disebut periode primer dari n. Jika x_0 adalah titik *periodic* dengan periode primer n maka orbit dari titik x_0 adalah pengulangan dari barisan bilangan – bilangan :

$$x_0 , F(x_0), \ldots, F^{n-1}(x_0), x_0 , F(x_0), \ldots, F^{n-1}(x_0)$$

3. Titik *Eventually*

Sebuah titik x_0 disebut titik *eventually fixed* jika titik x_0 bukan titik tetap tetapi beberapa titik dalam orbit dari titik x_0 adalah tetap. Sedangakan x_0 disebut *eventually periodic* jika titik x_0 sendiri bukan titik periodik, tetapi beberapa titik pada orbit dari x_0 merupakan titik periodik.

Contoh kasus dalam menentukan titik tetap dan menyelidiki orbit disekitar titik tetap pada keluarga fungsi kuadrat $Q_c(x) = x^2 + c$ yaitu

1. Pada saat $c = -2$

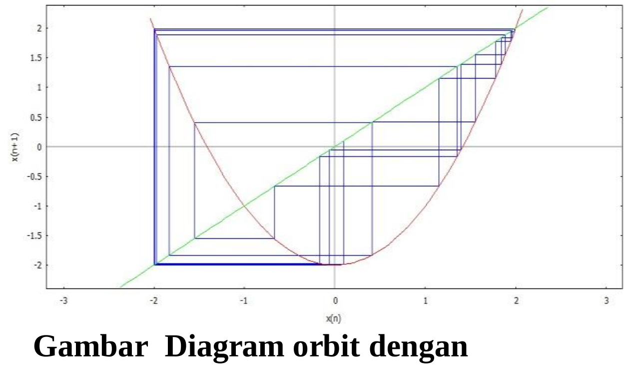
Pada kasus $c = -2$ ini berarti fungsinya adalah $Q_{-2}(x) = x^2 - 2$ mempunyai titik tetap di $p_+ = 2$ dan $p_- = -1$. Fungsi $Q_{-2}(x)$ mempunyai turunan $Q'(x) = 2x$ maka dapat disimpulkan bahwa titik -1 dan 2 adalah titik *repelling* karena $|Q'(-1)| > 1$ dan $|Q'(2)| > 1$.

Iterasi ke	Titik	Hasil	Hasil
0	x_0	0,1	0,01
1	x_1	$-1{,}99$	$-1{,}9999$
2	x_2	1,9601	1,9996
3	x_3	1,84199	1,9984
4	x_4	1,39293	1,993603
5	x_5	$-0{,}05973$	1,974454
6	x_6	$-1{,}99643$	1,89847
7	x_7	1,98574	1,604188
8	x_8	1,943165	0,57342
9	x_9	1,775891	$-1{,}67119$
10	x_{10}	1,15378	0,792874
11	x_{11}	$-0{,}66877$	$-1{,}37135$
12	x_{12}	$-1{,}55274$	$-0{,}1194$
13	x_{13}	0,411015	$-1{,}98574$
14	x_{14}	$-1{,}83107$	1,943182
15	x_{15}	1,352805	1,775958
16	x_{16}	$-0{,}16992$	1,154026
17	x_{17}	$-1{,}97113$	$-0{,}66822$
18	x_{18}	1,885343	$-1{,}55348$
19	x_{19}	1,554517	0,413294

Tabel orbit dengan $x_0 = 0,1$ dan $x_0 = 0,01$

Tabel diatas menunjukkan bahwa fungsi $Q_{-2}(x) = x^2 - 2$ mempunyai orbit titik yang acak atau *chaotic.*

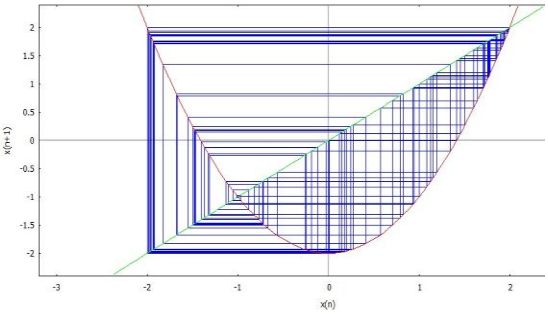
Analisa grafik $Q_{-2}(x) = x^2 - 2$ jika diambil $x_0 = 0{,}1$ adalah



Gambar Diagram orbit dengan $x_0 = 0,1$

Gambar diagram orbit menunjukkan bahwa melalui proses iterasi dengan $x_0 = 0{,}1$ diperoleh orbitnya cenderung *chaotic* atau kacau.

Analisa grafik $Q_{-2}(x) = x^2 - 2$ dengan titik awal $x_0 = 0{,}01$ yaitu



Gambar Diagram orbit dengan $x_0 = 0,01$

Gambar diagram orbit menunjukkan bahwa melalui proses iterasi dengan $x_0 = 0,01$ diperoleh orbitnya cenderung *chaotic* atau kacau.

Fungsi $Q_{-2}(x) = x^2 - 2$ mempunyai titik *neutral* di $x = \frac{1}{2}$, yaitu $|Q'(x)| = \frac{1}{2}$ dan mempunyai titik *eventually fixed* di $x = 1, -2$, dan 0.

Untuk mencari titik periodik pada fungsi $Q_{-2}(x) = x^2 - 2$ yaitu dengan mencari $Q^2(x) = (x^2 - 2)^2 - 2$ terlebih dahulu.

Dari persamaan $Q^2(x) = (x^2 - 2)^2 - 2$ diperoleh $p_+ = 2, p_- = -1$ dan $q_+ = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, q_- = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Sehingga diperoleh titik periodik dari persamaan $Q_{-2}(x) = x^2 - 2$ adalah pada

$q_+ = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,62, q_- = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1,62$.

2. Pada saat $c < -2$

Jika $c < -2$ maka Q_c mempunyai dua titik tetap yaitu

$$p_+ = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1-4c}\right) > 0$$

$$p_- = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4c}\right) < 0$$

Misal diambil $c = -2,5$ maka fungsi Q_c mempunyai dua titik tetap yaitu

3. $p_+ = \frac{1+\sqrt{11}}{2} \approx 2,16$ dan $p_- = \frac{1-\sqrt{11}}{2} \approx -1,16$

Untuk mengetahui perilaku orbit dari fungsi $Q_{-2,5}(x)$ yaitu dengan mengambil titik awal disekitar titik tetap, misal diambil titik awal $x_0 < 2,16$ yaitu dimisalkan $x_0 = 1$ maka dengan iterasi dapat diketahui orbitnya yaitu:

Iterasi ke	Titik	Hasil
0	x_0	1
1	$x_1 = Q(x_0)$	$-1,5$
2	$x_2 = Q(x_1)$	$-0,25$
3	$x_3 = Q(x_2)$	$-2,4375$
4	$x_4 = Q(x_3)$	3,441
⋮	⋮	⋮
n	$x_n = Q(x_{n-1})$	∞

Tabel orbit dengan $x_0 = 1$

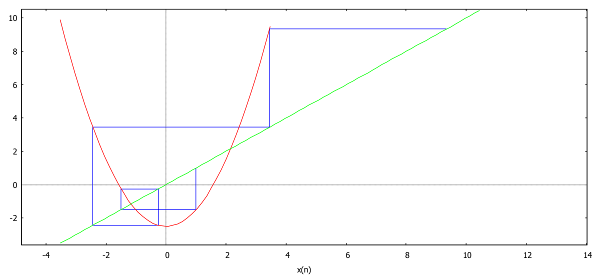
Dari tabel diatas dapat diperoleh bahwa orbit dari Q_c yang cenderung akan menuju ke tak hingga. Sedangkan jika diambil $x_0 > 2,16$ misal diambil $x_0 = 1,5$ maka orbitnya adalah

Iterasi ke	Titik	Hasil
0	x_0	1,5
1	$x_1 = Q(x_0)$	$-0,25$
2	$x_2 = Q(x_1)$	$-2,4375$
3	$x_3 = Q(x_2)$	3,44
⋮	⋮	⋮
n	$x_n = Q(x_{n-1})$	∞

Tabel orbit dengan $x_0 = 1,5$

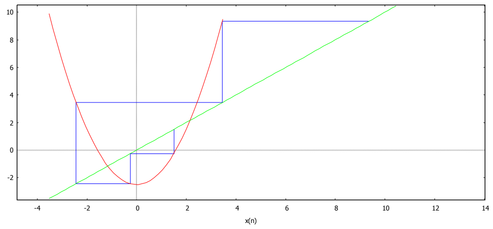
Dari tabel orbit dengan $x_0 = 1,5$ dapat diperoleh bahwa orbit dari Q_c yang cenderung akan menuju ke tak hingga.

Dengan analisis grafik diperoleh



Gambar Diagram orbit $Q_{-2,5}(x) = x^2 - 2,5$ dengan $x_0 = 1$

Gambar diatas menunjukkan bahwa orbit fungsi $Q_{-2,5}(x) = x^2 - 2,5$ dengan mengambil titik awal $x_0 = 1$ dengan $n = 3$ akan menuju ke tak hingga. Dari tabel orbit dengan $x_0 = 1,5$ dapat diperoleh bahwa orbit dari Q_c yang cenderung akan menuju ke tak hingga. Dengan anlisis grafik diperoleh



Gambar Diagram orbit $Q_{-2,5}(x)$ dengan $x_0 = 1,5$

Gambar diagram orbit diatas menunjukkan bahwa orbit fungsi $Q_{-2,5}(x) = x^2 - 2,5$ dengan mengambil titik awal $x_0 = 1,5$ dengan $n = 2$ akan menuju ke tak hingga.

Pada kasus $c = -2,5$ hanya mempunyai dua titik tetap yaitu $p_+ = 2,16$ dan $p_- = -1,16$ yang merupakan titik p_+ dan p_-adalah jenis titik tetap *repelling*. Untuk mengetahui fungsi Q_c mempunyai titik periodik yaitu dengan iterasi kedua $Q^2(x) = (x^2 - 2,5)^2 - 2,5$. Faktor dari persamaan $Q^2(x)$ salah satunya adalah $p_+ = 2,16$ dan $p_- = -1,16$ dan faktor yang lain yaitu

$$q_+ = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{-4c - 3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{7}\right) \approx 0,82$$

$$q_- = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{-4c - 3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{7}\right) \approx -1,82$$

Sehingga fungsi $Q^2(x)$ mempunyai titik tetap yaitu yaitu $p_+ = 2,16$ dan $p_- = 1,16$ dan mempunyai titik periodik yaitu $q_+ = 0,82$ dan $q_- = -1,82$.

Pada kasus $c < -2$ semua titik setelah beberapa iterasi akan menuju ke tak hingga. Semua orbit dari titik – titik tersebut pada interval $I =$ [-p_+, p_+] yaitu $I = [-2,16; 2,16]$ akan menuju ke tak hingga. Selanjutnya akan dianalisis orbit dari titik – titik lain yang tidak pernah meninggalkan $I =$ [-p_+, p_+]. Dimisalkan

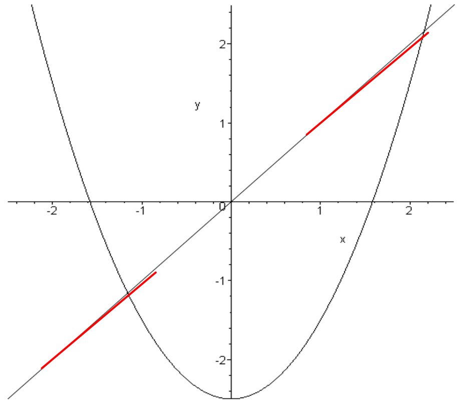
$\Lambda = \{x \in I | Q_c^n(x) \in I$ untuk semua $n\}$

Dimisalkan titik titik yang meninggalkan I tersebut dinotasikan dengan

A_1: himpunan titik – titik yang keluar dari I setelah satu iterasi Q_c.

$A_2 = (-0,58; 0,58)$ yang meninggalkan dua interval tertutup yaitu

$I = [-2,16;\ -0,58]$ dan $[0,58; 2,16]$. Misal jika diambil $x_0 = 0,2$ maka gambar analisis grafiknya yaitu



Gambar Grafik Orbit titik A_1 dan A_2

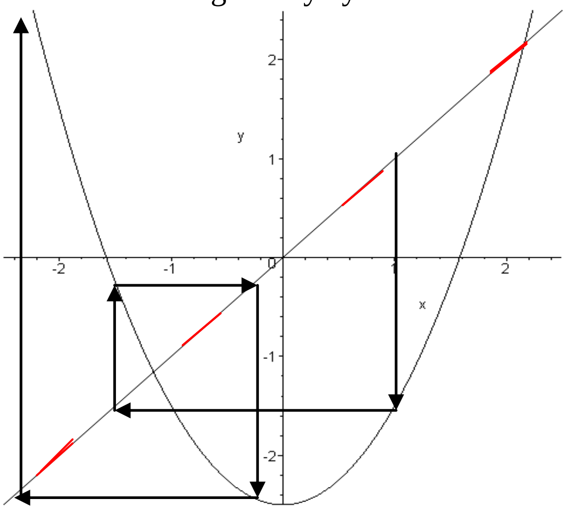
Gambar grafik orbit diatas menunjukkan bahwa orbit dari $x \in A_2$ keluar dari I setelah dua iterasi. Jadi, jika $x \in A_2$, maka $Q_c^n(x) \to \infty$ untuk $n \to \infty$ dan A_2 bukan merupakan himpunan Λ.

$A_3 = \{x \in I | Q_c(x) \in A_2\}.$

Orbit dari $x \in A_3$ keluar dari I setelah 3 iterasi.

$A_3 = (-1,82; -0,82)$, $(-0,58; 0,58)$ dan $(0,82; 1,82)$ yang meninggalkan empat interval tertutup yaitu $I = [-2,16; -1,82]$, $[-0,82; -0,58]$ dan $[0,58; 0,82]$, $[1,82; 2,16]$.

Gambar analisis grafiknya yaitu



Gambar Grafik Orbit titik A_1 dan A_3 dengan $x_0 = 1$

Gambar orbit diatas menunjukkan bahwa orbit dari $x \epsilon A_3$ keluar dari I setelah tiga iterasi. Jadi, jika $x \epsilon A_3$, maka $Q_c^n(x) \to \infty$ untuk $n \to \infty$ dan A_3 bukan merupakan himpunan Λ.

Jadi secara umum diperoleh

$$A_k = \{x \epsilon I | Q_c(x) \epsilon A_{k-1}\}$$

Jumlah interval dari A_k adalah dua kali jumlah interval dari A_{k-1}. Jika $x \epsilon A_k$, maka $Q_c^n(x) \to \infty$ untuk $n \to \infty$ dan A_k bukan merupakan himpunan Λ. Sehingga diperoleh

$$\Lambda = I - U_{k=1}^{\infty} A_k$$

Jadi himpunan Λ diperoleh setelah menghilangkan semua interval terbuka A_k yaitu memuat 2^k interval tertutup. Himpunan ini disebut himpunan Cantor.

4. PENUTUP

Berdasarkan pembahasan pada bab- bab sebelumnya dapat diambil kesimpulan sebagai berikut

1. Titik tetap pada keluarga fungsi kuadra $Q_c(x) = x^2 + c$ dapat diketahui dengan rumus $Q_c(x) = x$ sedangkan untuk mengetahui adanya titik periodik yaitu dengan membuat grafik iterasi kedua dari fungsi $Q_c(x)$ yang berpotongan dengan garis $y = x$.
2. Pada keluarga fungsi kuadrat $Q_c(x) = x^2 + c$ dengan parameter $c = -2$ maka dapat diketahui orbit titiknya cenderung kacau atau *chaotic*.
3. Pada saat parameter $c < -2$ maka orbit titik tetap setelah beberapa iterasi akan menuju ke tak hingga. Sedangkan titik yang tidak meninggalkan grafik disebut dengan himpunan Cantor.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Devaney dan Robert, L. 1992. *A First Course in Chaotic Dynamical System, Theory and Experiment.* Addison – Wesley publishing Company Inc. massachusets.

[2]. Edwin J.Purcell, Dale verlag. 2001. *Calculus and analytic Geometri*. Edisi 5 cet.13. Erlangga. Jakarta.

[3]. E. Villate, Jaime. 2006. *Introduction to dynamical systems: a hands-on approach with Maxima*. University of Porto. College of Engineering. Porto, Portugal.

[4]. Hutahaean, E. 1980. *Fungsi Riil*. Penerbit ITB. Bandung.

[5]. Perko, L. 2001. *Differential Equations and Dynamical System(edisi ke tiga)*. Springer – Verlag. Newyork.

[6]. Tuwankotta, Johan Matheus. 2010. *Discrete Dynamical System and Chaos*. Departemen Matematika, FMIPA, ITB. Bandung.

[7]. Warsoma Djohan dan Budi, Wono setya. 2007. *Diktat Kalkulus I*. Departemen Matematika, FMIPA, ITB. Bandung.

.