BAB III

KONSEP DASAR

3.1. Definisi Entropi

Definisi 3.1

a. Notasi $\mathfrak{U} = [\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_k]$ atau secara singkat $\mathfrak{U} = [A_i]$ mempunyai arti bahwa $\mathfrak{U}$ adalah partisi yang terdiri dari peristiwa $\mathscr{A}_i$. Peristiwa-peristiwa tersebut akan disebut elemen-elemen $\mathfrak{U}$.

b. Suatu partisi dengan hanya dua elemen disebut partisi biner. Jadi :

$$\mathfrak{U} = [\mathscr{A} , \overline{\mathscr{A}}]$$

adalah partisi biner yang terdiri dari $\mathscr{A}$ dan komplemen $\overline{\mathscr{A}}$.

c. Suatu partisi dimana elemen-elemennya adalah peristiwa elementer $\{ \zeta_i \}$ ruang $\mathscr{S}$ akan dinyatakan dengan $\mathfrak{G}$ dan akan disebut dengan partisi elemen.

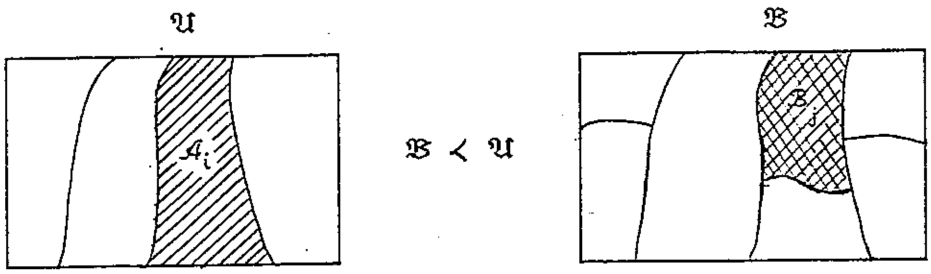
Definisi 3.2

Penghalusan (refirement) partisi $\mathfrak{B}$ dari partisi $\mathfrak{U}$ adalah partisi $\mathfrak{B}$ sedemikian hingga setiap elemen $\mathscr{B}_j$ dari $\mathfrak{B}$ adalah himpunan bagian suatu elemen $\mathscr{A}_i$ dari $\mathfrak{U}$ (gambar 3-1).

Digunakan notasi :

$\mathfrak{B} < \mathfrak{U}$ untuk menyatakan bahwa $\mathfrak{B}$ adalah penghalusan dari $\mathfrak{U}$ dan menyatakan bahwa $\mathfrak{U}$ lebih besar dari $\mathfrak{B}$.

Jadi : $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ bhb $\mathcal{B}_j \subset \mathcal{A}_i$



Gambar 3-1.

Penghalusan bersama dua partisi adalah panghalusan pada kedua-duanya.

Partisi $\mathfrak{D}$ dalam gambar 3-2 adalah penghalusan bersama partisi $\mathfrak{A}$ dan $\mathfrak{B}$.

Definisi 3.3

Perkalian dua partisi $\mathfrak{A} = [\ \mathcal{A}_i\ ]$ dan $\mathfrak{B} = [\ \mathcal{B}_j\ ]$ adalah partisi dimana elemen-elemennya adalah semua irisan $\mathcal{A}_i\mathcal{B}_j$ elemen-elemen $\mathfrak{A}$ dan $\mathfrak{B}$. Partisi ini akan dinyatakan dengan :

$$\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{B}$$

Terlihat, $\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{B}$ adalah penghalusan bersama terbesar untuk $\mathfrak{A}$ dan $\mathfrak{B}$.

Sifat-sifat :

Dari definisi terlihat bahwa :

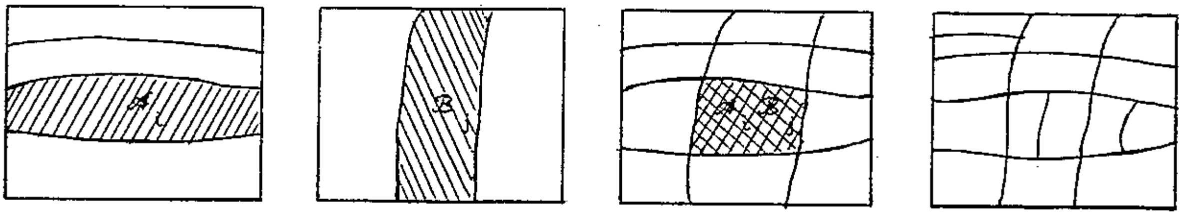
$\mathfrak{S} \prec \mathfrak{A}$ untuk sebarang $\mathfrak{A}$

$\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \,.\, \mathfrak{A}$ $\qquad \mathfrak{A} \,.\, (\mathfrak{B} \,.\, \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{B}) \,.\, \mathfrak{C}$

Bila $\mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{A}_2 \prec \mathfrak{A}_3$ maka $\mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{A}_3$

Bila $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ maka $\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$

$\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$ $\mathfrak{D}$



$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{B}$ $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{A}$ $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{B}$ $\mathfrak{D} \prec \mathfrak{A}$ $\mathfrak{D} \prec \mathfrak{B}$

Definisi 3.4

Entropi partisi $\mathfrak{A}$ didefinisikan sebagai jumlahan

$$H(\mathfrak{A}) = -\,(p_1 \log p_1 + \ldots + p_n \log p_n) = \sum_{n=1}^{n} \varphi(p_i)$$

dimana $p_i = P(\mathscr{A}_i)$ dan $\varphi(p) = -\,p \log p$.

Peristiwa berkemungkinan sama.

Bila : $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/N$ maka :

$$H(\mathfrak{A}) = -\frac{1}{N}\log\frac{1}{N} - \ldots - \frac{1}{N}\log\frac{1}{N} = \log N$$

Teorema 3.1

Bila $\varphi(p) = -\,p\log p$ dan $p_1 < p_2$ maka :

$$\varphi(p_1+p_2) \le \varphi(p_1) + \varphi(p_2) \qquad (3\text{-}1)$$

Bukti:

$p_1 < p_2 < p_1+p_2$

$\log p_1 < \log p_2 < \log\,(p_1+p_2)$

$p_1\log p_1 < p_1\log(p_1+p_2)$ $\qquad$ $p_2\log p_2 < p_2\log(p_1+p_2)$

$-p_1\log p_1 > -p_1\log(p_1+p_2)$ $\qquad$ $-p_2\log p_2 > -p_2\log(p_1+p_2)$

$$\begin{aligned}\varphi(p_1+p_2) &= -\,(p_1+p_2)\log(p_1+p_2)\\ &= -\,p_1\log(p_1+p_2) - p_2\log(p_1+p_2)\\ &< -\,p_1\log p_1 - p_2\log p_2\\ &< \varphi(p_1) + \varphi(p_2)\end{aligned}$$

Kesamaan diambil $p_1 = 0$.

Hasil-hasil diatas membawa sifat-sifat entropi sebagai berikut :

1. Diberikan partisi $\mathfrak{A} = [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n]$, dibentuk $\mathfrak{B} = [\mathcal{B}_a, \mathcal{B}_b, \ldots, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n]$ yang didapat dengan memecah $\mathcal{A}_1$ kedalam dua elemen $\mathcal{B}_a$ dan $\mathcal{B}_b$ seperti dalam gambar 3-3. Maka akan berlaku :

$$H(\mathfrak{A}) \leq H(\mathfrak{B}) \qquad (3\text{-}2)$$

Bukti :

Terlihat : $H(\mathfrak{A}) - \varphi(p_a+p_b) = H(\mathfrak{B}) - \varphi(p_a) - \varphi(p_b)$

karena setiap ruas masing-masing sama dengan sumbangan (kontribusi) pada $H(\mathfrak{A})$ dan $H(\mathfrak{B})$ yang disebabkan elemen bersama $\mathfrak{A}$ dan $\mathfrak{B}$. Karena itu (3-2) terbukti dari ketaksamaan dalam (3-1).

Contoh 3-1 :

Dalam tabel berikut terdaftar probabilitas peristiwa-peristiwa partisi $\mathfrak{A}$ dan penghalusannya $\mathfrak{B}$ yang didapat seperti diatas.

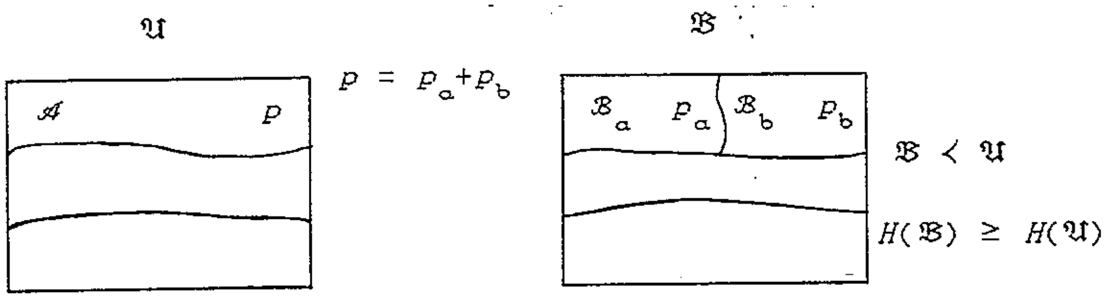
$\mathfrak{A}$	$p = 0,4$		0,35	0,25
$\mathfrak{B}$	$p_a = 0,22$	$p_b = 0,18$	0,35	0,25

untuk keadaan ini :

$H(\mathfrak{A}) = -(0,4\log 0,4 + 0,35\log 0,35 + 0,25\log 0,25) = 1,559$

$H(\mathfrak{B}) = -(0,22\log 0,22 + 0,18\log 0,18 + o,35\log 0,35 + 0,25\log 0,25)$
$= 1,956$

Jadi $H(\mathfrak{A}) = 1,559 < 1,956 = H(\mathfrak{B})$



Gambar 3-3

2. Bila :

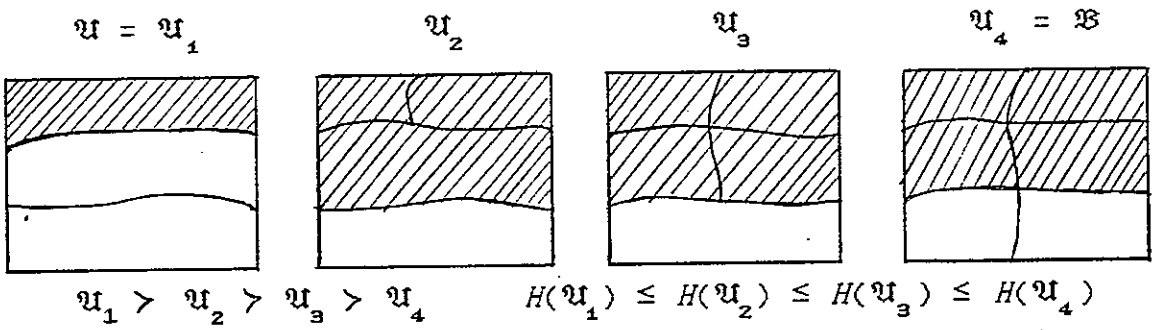
$$\mathfrak{B} < \mathfrak{U} \quad \text{maka} \quad H(\mathfrak{B}) \geq H(\mathfrak{U}) \qquad (3\text{-}3)$$

Bukti :

Dengan mengulang pembentukan gambar 3-3 dibentuk rantai penghalusan : $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1 > \ldots > \mathfrak{U}_{m-1} > \mathfrak{U}_m \ldots >$ $\mathfrak{U}_n = \mathfrak{B}$ dimana $\mathfrak{U}_m$ didapat dengan memecah satu elemen $\mathfrak{U}_{m-1}$ seperti dalam gambar 3-4. Dari konstruksi ini dan (3-2) terlihat bahwa :

$$H(\mathfrak{U}) = H(\mathfrak{U}_1) \leq \ldots \leq H(\mathfrak{U}_n) = H(\mathfrak{B})$$

dan (3-3) terbukti.



Gambar 3-4

3. Untuk sebarang $\mathfrak{U}$

$$H(\mathfrak{U}) \leq H(\mathfrak{S}) \qquad (3\text{-}4)$$

dimana $\mathfrak{S}$ adalah partisi elemen.

Bukti :

Terbukti dari (3-2) karena $\mathfrak{S}$ adalah penghalusan $\mathfrak{U}$.

4. Untuk sebarang $\mathfrak{A}$ dan $\mathfrak{B}$

$$H(\mathfrak{A}.\mathfrak{B}) \geq H(\mathfrak{A}) \qquad H(\mathfrak{A}.\mathfrak{B}) \geq H(\mathfrak{B}) \tag{3-5}$$

Bukti :

Terbukti dari (3-2) karena $\mathfrak{A}.\mathfrak{B}$ adalah penghalusan dari $\mathfrak{A}$ dan $\mathfrak{B}$.

Contoh 3-2 :

Dalam eksperimen pelemparan dadu, probabilitas enam peristiwa $\{f_1\}, \ldots ,\{f_6\}$ masing-masing sama dengan : 0,1 0,1 0,15 0,2 0,2 0,25.

Probabilitas peristiwa-peristiwa partisi :

$$\mathfrak{A} = [\text{genap}, \text{ganjil}] \text{ dan } \mathfrak{B} = [i \leq 3,\ i > 3]$$

diberikan oleh :

$$P\{\text{genap}\} = 0,55 \qquad P\{i \leq 3\} = 0,35$$

$$P\{\text{ganjil}\} = 0,45 \qquad P\{i > 3\} = 0,65$$

Perkalian $\mathfrak{A}.\mathfrak{B}$ adalah partisi yang terdiri dari empat elemen : $\{f_2\}$ $\{f_1 f_3\}$ $\{f_4 f_6\}$ $\{f_5\}$ dengan probabilitas masing-masing : 0,1 0,25 0,45 0,2.

$$H(\mathfrak{A}) = -\ 0,55\log 0,55 - 0,45\log 0,45 = 0,993$$

$$H(\mathfrak{B}) = -\ 0,35\log 0,35 - 0,65\log 0,65 = 0,934$$

$$H(\mathfrak{A}.\mathfrak{B}) = -0,1\log 0,1 - 0,25\log 0,25 - 0,45\log 0,45 - 0,2\log 0,2$$
$$= 1,815$$

yang sesuai dengan (3-5).

Teorema 3.2

Ketaksamaan berguna.

Bila a_i dan b_i adalah N bilangan positif sedemikian sehingga :

$$a_1 + \ldots + a_N = 1 \qquad b_1 + \ldots + b_N \leq 1$$

maka :

$$- \sum_i a_i \log a_i \leq - \sum_i a_i \log b_i \qquad (3\text{-}6)$$

dengan kesamaan $a_i = b_i$.

Bukti :

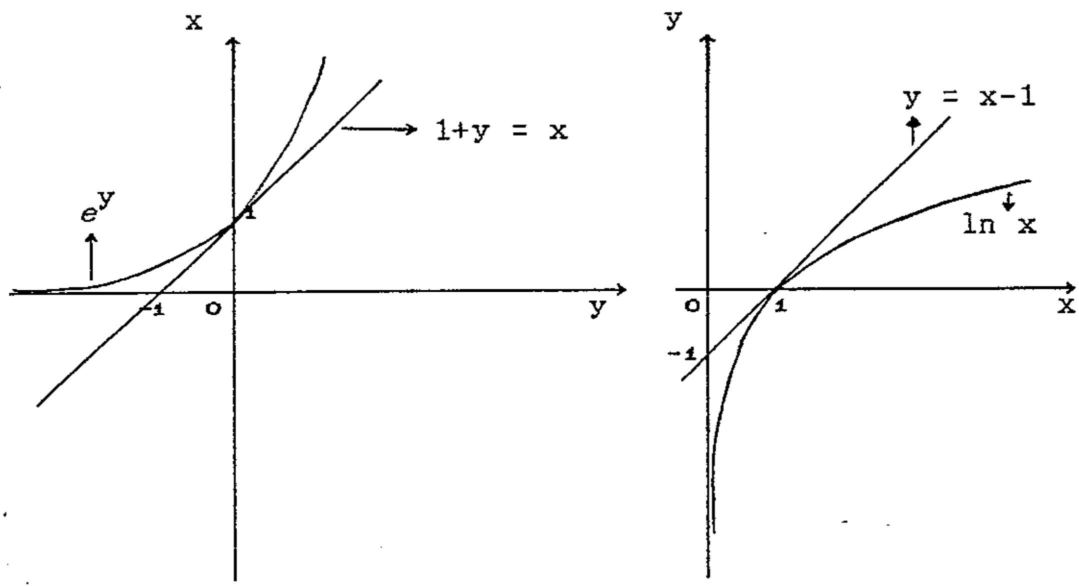
Dari ketaksamaan $e^y \geq 1+y$, terlihat bahwa :

$\ln \; e^y \geq \ln\,(1+y)$.

$y \geq \ln\,(1+y)$

Substitusi : $x = 1+y \longrightarrow \ln x \leq x-1$

Sesuai gambar 3-5.



Gambar 3-5.

Atau :

$$e^y \geq 1 + y \Longrightarrow \ln \; e^y \geq \ln\,(1+y)$$

$$y \geq \ln\,(1-y)$$

Substitusi : $1 + y = x$

$$y = x - 1$$

$$x - 1 \geq \ln x \Longrightarrow x - 1 - \ln x \geq 0$$

Bukti :

Misal $f(x) = x - 1 - \ln x$

1. Ditentukan titik ekstrim

   $f'(x) = 0$

   $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = 0$

   $1 = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow x = 1$

   Untuk $x = 1$, maka $f(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0$

2. Menentukan tanda $f'(x)$ untuk $0 < x < 1$ dan untuk $1 < x < \infty$.

   Untuk $0 < x < 1$, misal $x = 1/2$

   $f'(1/2) = 1 - \dfrac{1}{1/2} = 1 - 2 = -1$ (negatif)

   berarti $f(x)$ fungsi turun.

   Untuk $1 < x < \infty$, misal $x = 2$

   $f'(2) = 1 - 1/2 = 1/2$ (positif)

   berarti $f(x)$ fungsi naik.

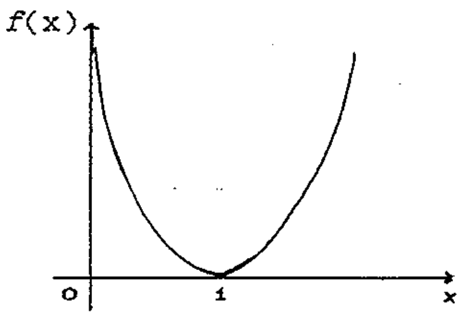
3. Menentukan titik ekstrim maksimum atau minimum.

   $f''(x) = 1/x^2$

   Untuk $x = 1$, maka :

   $f''(1) = 1/1 = 1 > 0$ berarti $f(x)$ mempunyai titik minimum.

4. Gambar



Dari gambar terlihat $f(x) \geq 0$, jadi

$f(x) = x - 1 - \ln x \geq 0 \Longrightarrow x - 1 \geq \ln x$.

Dengan $x = b_i/a_i$ maka :

$$\ln b_i - \ln a_i = \ln \frac{b_i}{a_i} \le \frac{b_i}{a_i} - 1$$

mengalikan dengan a_i dan menjumlahkannya didapat

$$\sum_i a_i(\ln b_i - \ln a_i) \le \sum_i a_i \left[\frac{b_i}{a_i} - 1\right] = \sum_i (b_i - a_i) \le 0$$

$$\sum_i a_i \ln b_i - \sum_i a_i \ln a_i \le 0$$

$$\sum_i a_i \ln b_i \le \sum_i a_i \ln a_i$$

$$-\sum_i a_i \ln a_i \le -\sum_i a_i \ln b_i \qquad \text{(terbukti)}$$

Teorema 3.3

$$-\sum_i p_i \log p_i \le \log N \qquad (3\text{-}7)$$

Bukti :

Diambil $a_i = p_i$ dan $b_i = 1/N$. Dengan memasukkan kedalam (3-6), maka :

$$-\sum_i p_i \log p_i \le -\Sigma\, p_i \log \frac{1}{N}$$

$$-\sum_i p_i \log p_i \le -\log N^{-1} . \sum_i p_i$$

$$-\sum_i p_i \log p_i \le \log N \qquad \text{(terbukti)}$$

3.2. Entropi Bersyarat dan Informasi Bersama.

Definisi 3.5

Entropi bersyarat partisi $\mathfrak{A}$ bila diketahui $\mathcal{M}$ didefinisikan sebagai :

$$H(\mathfrak{A}|\mathcal{M}) = -\sum_{i=1}^{N_{\mathfrak{A}}} P(\mathcal{A}_i|\mathcal{M}) \log P(\mathcal{A}_i|\mathcal{M})$$

dimana $\mathcal{M}$ adalah peristiwa dengan $P(\mathcal{M}) \neq 0$ dan

$$P(\mathcal{A}_i|\mathcal{M}) = \frac{P(\mathcal{A}_i\mathcal{M})}{P(\mathcal{M})}$$

Misalkan $\mathfrak{B}$ adalah partisi yang terdiri dari $N_{\mathfrak{B}}$ elemen $\mathcal{B}_j$.

$$H(\mathfrak{A}|\mathcal{B}_j) = -\sum_{i=1}^{N_{\mathfrak{A}}} P(\mathcal{A}_i|\mathcal{B}_j)\log P(\mathcal{A}_i|\mathcal{B}_j) \qquad (3\text{-}8)$$

adalah entropi bersyarat $\mathfrak{A}$ bila diketahui $\mathcal{B}_j$.

Entropi bersyarat $\mathfrak{A}$ bila diketahui $\mathfrak{B}$ adalah :

$$H(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) = \sum_{j=1}^{N_{\mathfrak{B}}} P(\mathcal{B}_j)\ H(\mathfrak{A}|\mathcal{B}_j)$$

Ini sama dengan ketidakpastian tentang $\mathfrak{A}$ bila pada setiap usaha diketahui mana dari peristiwa $\mathcal{B}_j$ partisi $\mathfrak{B}$ yang telah terjadi.

Contoh 3-3 :

Akan ditentukan entropi bersyarat $H(\mathfrak{S}|\mathfrak{B})$ partisi elemen $\mathfrak{S}$ dalam eksperimen pelemparan dadu seimbang dimana $\mathfrak{B}$ = [genap,ganjil]. Terlihat :

$P\{f_i|\text{genap}\} = 1/3$ bila i genap dan

$P\{f_i|\text{genap}\} = 0$ bila i ganjil

$P\{f_i|\text{ganjil}\} = 1/3$ bila i ganjil dan

$P\{f_i|\text{ganjil}\} = 0$ bila i genap

Karena itu :

$H(\mathfrak{S}|\text{genap}) = -(1/3\log 1/3 + 1/3\log 1/3 + 1/3\log 1/3) = \log 3$

$H(\mathfrak{S}|\text{genap}) = H(\mathfrak{S}|\text{ganjil})$

Dan karena P { genap } = P { ganjil } = 0,5 dapat disimpulkan : $H(\mathfrak{S}|\mathfrak{B})$ = 0,5 log 3 + 0,5 log 3 = log 3.

Jadi dalam ketiadaan informasi, ketidakpastian tentang $\mathfrak{S}$ sama dengan $H(\mathfrak{S})$ = log 6. Tetapi bila diketahui bahwa setiap usaha apakah "genap" atau "ganjil" tampak, maka ketidakpastian menjadi $H(\mathfrak{S}|\mathfrak{B})$ = log 3.

Teorema 3.4

Bila $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ maka :

$$H(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) = 0 \qquad (3\text{-}9)$$

Bukti :

Karena $\mathfrak{B}$ adalah penghalusan partisi $\mathfrak{A}$, maka setiap elemen $\mathscr{B}_j$ partisi $\mathfrak{B}$ adalah himpunan bagian suatu elemen $\mathscr{A}_k$ partisi $\mathfrak{A}$ dan akibatnya elemen tersebut saling asing dengan elemen lain partisi $\mathfrak{A}$. Karena itu $\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j = \mathscr{B}_j$, bila i = k dan $\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j = 0$ untuk yang lain. Ini membawa pada kesimpulan bahwa :

$$P(\mathscr{A}_i|\mathscr{B}_j) = \frac{P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j)}{P(\mathscr{B}_j)} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

Dan karena $p\log p = 0$ untuk $p = 0$ dan $p = 1$, maka semua suku dalam (3-8) sama dengan nol. karena itu : $H(\mathfrak{A}|\mathscr{B}_j) = 0$ untuk setiap j.

$$H(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) = \sum_j P(\mathscr{B}_j)\ H(\mathfrak{A}|\mathscr{B}_j) = 0$$

Definisi 3.6

Dua partisi $\mathfrak{A} = [\mathscr{A}_i]$ dan $\mathfrak{B} = [\mathscr{B}_j]$ disebut independen bila peristiwa-peristiwa $\mathscr{A}_i$ dan $\mathscr{B}_j$ independen untuk setiap i dan j.

$$P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j) = P(\mathscr{A}_i)\ P(\mathscr{B}_j)$$

Teorema 3.5

Bila partisi $\mathfrak{A}$ dan $\mathfrak{B}$ independen, maka :

$$H(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) = H(\mathfrak{A}) \qquad H(\mathfrak{B}|\mathfrak{A}) = H(\mathfrak{B})$$

Bukti :

$$P(\mathscr{A}_i|\mathscr{B}_j) = \frac{P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j)}{P(\mathscr{B}_j)} = \frac{P(\mathscr{A}_i)P(\mathscr{B}_j)}{P(\mathscr{B}_j)} = P(\mathscr{A}_i)$$

Karena itu :

$$H(\mathfrak{A}|\mathscr{B}_j) = -\sum_i P(\mathscr{A}_i|\mathscr{B}_j)\log P(\mathscr{A}_i|\mathscr{B}_j)$$

$$= -\sum_i P(\mathscr{A}_i)\log P(\mathscr{A}_i)$$

$$= H(\mathfrak{A})$$

$$H(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) = \sum_{j=1}^{N_{\mathfrak{B}}} P(\mathscr{B}_j)\ H(\mathfrak{A}|\mathscr{B}_j)$$

$$= H(\mathfrak{A}|\mathscr{B}_j)\sum_{j=1}^{N_{\mathfrak{B}}} P(\mathscr{B}_j)$$

$$= H(\mathfrak{A})$$ (terbukti)

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa :

$H(\mathfrak{B}|\mathfrak{A}) = H(\mathfrak{B})$ sebagai berikut :

$$H(\mathfrak{B}|\mathscr{A}_i) = -\sum_j P(\mathscr{B}_j|\mathscr{A}_i)\log P(\mathscr{B}_j|\mathscr{A}_i)$$

Karena $P(\mathscr{B}_j|\mathscr{A}_i) = P(\mathscr{B}_j)$ maka :

$$H(\mathfrak{B}|\mathscr{A}_i) = -\sum_j P\{(\mathscr{B}_j)\log P(\mathscr{B}_j)$$

$$= H(\mathfrak{B})$$

$$H(\mathfrak{B}|\mathfrak{A}) = \sum_{i=1}^{N_{\mathfrak{A}}} P(\mathscr{A}_i)\ H(\mathfrak{B}|\mathscr{A}_i)$$

$$= \sum_i P(\mathscr{A}_i)\ H(\mathfrak{B})$$

$$= H(\mathfrak{B})$$

Teorema 3.6

Untuk sebarang $\mathfrak{A}$ dan $\mathfrak{B}$

$$H(\mathfrak{A}.\mathfrak{B}) \le H(\mathfrak{A}) + H(\mathfrak{B}) \qquad (3\text{-}10)$$

Bukti :

$$\mathscr{A}_i = \mathscr{A}_i\mathscr{S} = \mathscr{A}_i(\mathscr{B}_1+\mathscr{B}_2+\ ...\ +\mathscr{B}_n) = \sum_j \mathscr{A}_i\mathscr{B}_j$$

$$P(\mathscr{A}_i) = \sum_j P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j) \qquad\qquad P(\mathscr{B}_j) = \sum_j P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j)$$

Karena itu :

$$H(\mathfrak{A}) = -\sum_i P(\mathscr{A}_i)\log P(\mathscr{A}_i) = -\sum_{i,j} P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j)\log P(\mathscr{A}_i)$$

$$H(\mathfrak{B}) = -\sum_j P(\mathscr{B}_j)\log P(\mathscr{B}_j) = -\sum_{i,j} P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j)\log P(\mathscr{B}_j)$$

didapat :

$$H(\mathfrak{A})+H(\mathfrak{B}) = -\sum_{i,j}P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j)\log P(\mathscr{A}_i) + -\sum_{i,j}P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j)\log P(\mathscr{B}_j)$$

$$= -\sum_{i,j}P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j)\log [P(\mathscr{A}_i)P(\mathscr{B}_j)]$$

Sedangkan $H(\mathfrak{A}.\mathfrak{B})$ adalah partisi dengan elemen-elemen $\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j$. Karena itu :

$$H(\mathfrak{A}.\mathfrak{B}) = -\sum_{i,j}P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j)\log P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j)$$

Untuk membuktikan (3-10) digunakan (3-6) dengan mengambil $a_i = P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j)$ dan $b_i = P(\mathscr{A}_i)P(\mathscr{B}_j)$. Karena :

$$\sum_{i,j}P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j) = 1 \qquad\qquad \sum_{i,j}P(\mathscr{A}_i)P(\mathscr{B}_j) = 1$$

$$-\sum_i a_i \log a_i \le -\sum_i a_i \log b_i$$

$$-\sum_{i,j}P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j)\log P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j) \le -\sum_{i,j}P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j)\log [P(\mathscr{A}_i)P(\mathscr{B}_j)]$$

$$H(\mathfrak{A}.\mathfrak{B}) \le H(\mathfrak{A}) + H(\mathfrak{B})$$

terbukti.

Dapat disimpulkan :

$$H(\mathfrak{A}.\mathfrak{B}) = H(\mathfrak{A}) + H(\mathfrak{B}) \tag{3-11}$$

bhb partisi $\mathfrak{A}$ dan $\mathfrak{B}$ independen.

Bukti :

Terbukti dari (3-10) karena (3-6) adalah kesamaan bhb $a_i = b_i$ untuk setiap i. Karena itu (3-11) adalah kasamaan bhb $P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j) = P(\mathscr{A}_i)P(\mathscr{B}_j)$ untuk setiap i dan j.

$$-\sum_{i,j} P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j) \log P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j) = -\sum_{i,j} P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j) \log [P(\mathscr{A}_i)P(\mathscr{B}_j)]$$

$$H(\mathfrak{A}.\mathfrak{B}) = H(\mathfrak{A}) + H(\mathfrak{B})$$

terbukti.

Teorema 3.7

Untuk sebarang $\mathfrak{A}$ dan $\mathfrak{B}$

$$H(\mathfrak{A}.\mathfrak{B}) = H(\mathfrak{B}) + H(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) = H(\mathfrak{A}) + H(\mathfrak{B}|\mathfrak{A})$$

Bukti :

Karena $P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j) = P(\mathscr{B}_j)P(\mathscr{A}_i|\mathscr{B}_j)$ maka :

$$P(\mathscr{B}_j)H(\mathfrak{A}|\mathscr{B}_j) = -\sum_i P(\mathscr{B}_j)P(\mathscr{A}_i|\mathscr{B}_j) \log P(\mathscr{A}_i|\mathscr{B}_j)$$

$$= -\sum_i P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j) \left[\log \frac{P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j)}{P(\mathscr{B}_j)} \right]$$

$$= -\sum_i P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j) [\log P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j) - \log P(\mathscr{B}_j)]$$

$$= -\sum_i P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j) \log P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j) + \sum_i P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j) \log P(\mathscr{B}_j)$$

$$= -\sum_i P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j) \log P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j) + P(\mathscr{B}_j) \log P(\mathscr{B}_j)$$

Dengan menjumlahkan untuk seluruh j, didapat :

$$\sum_j P(\mathscr{B}_j)H(\mathfrak{A}|\mathscr{B}_j) = -\sum_{i,j} P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j)\log P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_i) + \sum_j P(\mathscr{B}_j)\log P(\mathscr{B}_j)$$

$$H(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) = H(\mathfrak{A}.\mathfrak{B}) - (\mathfrak{B})$$

$$H(\mathfrak{A}.\mathfrak{B}) = H(\mathfrak{B}) + H(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})$$

Persamaan kedua terbukti karena $\mathfrak{A}.\mathfrak{B} = \mathfrak{B}.\mathfrak{A}$

Karena : $P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j) = P(\mathscr{A}_i)P(\mathscr{B}_j|\mathscr{A}_i)$ maka :

$$P(\mathscr{A}_i)H(\mathfrak{B}|\mathscr{A}_i) = -\sum_j P(\mathscr{A}_i)P(\mathscr{B}_j|\mathscr{A}_i) \log P(\mathscr{B}_j|\mathscr{A}_i)$$

$$= -\sum_j P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j) \left[\log \frac{P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j)}{P(\mathscr{A}_i)} \right]$$

$$= -\sum_j P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j) [\log P(\mathscr{A}_i\mathscr{B}_j) - \log P(\mathscr{A}_i)]$$

$$= - \sum_j P(\mathcal{A}_i\mathcal{B}_j) \log P(\mathcal{A}_i\mathcal{B}_j) + \sum_j P(\mathcal{A}_i\mathcal{B}_j) \log P(\mathcal{A}_i)$$

$$= - \sum_j P(\mathcal{A}_i\mathcal{B}_j) \log P(\mathcal{A}_i\mathcal{B}_j) + P(\mathcal{A}_i) \log P(\mathcal{A}_i)$$

Dengan menjumlahkan untuk seluruh i, didapat :

$$\sum_i P(\mathcal{A}_i)H(\mathfrak{B}|\mathcal{A}_i) = -\sum_{i,j} P(\mathcal{A}_i\mathcal{B}_j)\log P(\mathcal{A}_i\mathcal{B}_j) + \sum_i P(\mathcal{A}_i)\log P(\mathcal{A}_i)$$

$$H(\mathfrak{B}|\mathfrak{A}) = H(\mathfrak{A}.\mathfrak{B}) - H(\mathfrak{A})$$

$$H(\mathfrak{A}.\mathfrak{B}) = H(\mathfrak{A}) + H(\mathfrak{B}|\mathfrak{A})$$

Dari hasil diatas dapat disimpulkan :

Untuk sebarang $\mathfrak{A}$ dan $\mathfrak{B}$ maka :

1. $H(\mathfrak{B}) \le H(\mathfrak{A}.\mathfrak{B}) \le H(\mathfrak{A}) + H(\mathfrak{B})$
2. $H(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) \le H(\mathfrak{A})$
3. $H(\mathfrak{A}) - H(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) = H(\mathfrak{B}) - H(\mathfrak{B}|\mathfrak{A})$

Bukti :

1. $H(\mathfrak{B}) \le H(\mathfrak{A}.\mathfrak{B}) \le H(\mathfrak{A}) + H(\mathfrak{B})$

   Bukti :

   Dari teorema 3.6 dan teorema 3.7

$$H(\mathfrak{A}.\mathfrak{B}) \le H(\mathfrak{A}) + H(\mathfrak{B})$$

$$H(\mathfrak{A}.\mathfrak{B}) = H(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) + H(\mathfrak{B})$$

$$H(\mathfrak{A}.\mathfrak{B}) \ge H(\mathfrak{B})$$

   Jadi : $H(\mathfrak{B}) \le H(\mathfrak{A}.\mathfrak{B}) \le H(\mathfrak{A}) + H(\mathfrak{B})$

2. $H(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) \le H(\mathfrak{A})$

   Bukti :

$$H(\mathfrak{A}.\mathfrak{B}) \le H(\mathfrak{A}) + H(\mathfrak{B})$$

$$H(\mathfrak{B}) + H(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) \le H(\mathfrak{A}) + H(\mathfrak{B})$$

$$H(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) \le H(\mathfrak{A})$$

3. $H(\mathfrak{A}) - H(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) = H(\mathfrak{B}) - H(\mathfrak{B}|\mathfrak{A})$

Bukti :

$$H(\mathfrak{A}.\mathfrak{B}) = H(\mathfrak{B}) + H(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) = H(\mathfrak{A}) + H(\mathfrak{B}|\mathfrak{A})$$

$$H(\mathfrak{A}) - H(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) = H(\mathfrak{B}) - H(\mathfrak{B}|\mathfrak{A})$$

Definisi 3.7

Informasi bersama.

Fungsi :

$$I(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) = H(\mathfrak{A}) + H(\mathfrak{B}) - H(\mathfrak{A}.\mathfrak{B})$$

disebut informasi gabungan partisi $\mathfrak{A}$ dan $\mathfrak{B}$.

$$I(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) = H(\mathfrak{A}) - H(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) = H(\mathfrak{B}) - H(\mathfrak{B}|\mathfrak{A})$$

Dengan jelas dari $H(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) \leq H(\mathfrak{A})$, maka :

$$I(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) \geq 0$$

$I(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ dapat diinterpretasikan sebagai " Informasi tentang $\mathfrak{A}$ yang termuat dalam $\mathfrak{B}$ " dan sama dengan informasi tentang $\mathfrak{B}$ yang termuat dalam $\mathfrak{A}$ ".

Contoh 3-4 :

Dalam eksperimen dadu seimbang $H(\mathfrak{S}|\mathfrak{B})$ adalah entropi bersyarat partisi elemen $\mathfrak{S}$ dalam eksperimen pelemparan dadu seimbang dimana $\mathfrak{B}$ = [genap,ganjil]. Terlihat :

$$P\{f_i|\text{genap}\} = 1/3 \text{ bila i genap.}$$
$$P\{f_i|\text{genap}\} = 0 \text{ bila i ganjil}$$
$$P\{f_i|\text{ganjil}\} = 1/3 \text{ bila i ganjil}$$
$$P\{f_i|\text{ganjil}\} = 0 \text{ bila i genap.}$$

Karena itu :

$$H(\mathfrak{S}|\text{genap}) = -\ (1/3 \log 1/3 + 1/3 \log 1/3 + 1/3 \log 1/3)$$

$= \log 3.$

$= H(\mathfrak{S}|\text{ganjil})$

Karena $P\{\text{genap}\} = P\{\text{ganjil}\} = 0{,}5$, maka :

$H(\mathfrak{S}|\mathfrak{B}) = 0{,}5 \log 3 + 0{,}5 \log 3 = \log 3$

$H(\mathfrak{S}) = -(1/6 \log 1/6 + 1/6 \log 1/6 + 1/6 \log 1/6 + 1/6 \log 1/6 + 1/6 \log 1/6)$

$= -\log 1/6$

$= \log 6$

$H(\mathfrak{B}) = -(1/2 \log 1/2 + 1/2 \log 1/2)$

$= \log 2$

$H(\mathfrak{B}|\mathfrak{S}) = 0$ sesuai dengan teorema 3.4 yaitu $\mathfrak{S}$ penghalusan dari $\mathfrak{B}$ maka $H(\mathfrak{B}|\mathfrak{S}) = 0$.

Karena itu :

$I(\mathfrak{S},\mathfrak{B}) = H(\mathfrak{S}) - H(\mathfrak{S}|\mathfrak{B}) = H(\mathfrak{B}) - H(\mathfrak{B}|\mathfrak{S})$

$= \log 6 - \log 3 = \log 2 - 0$

$= \log 2$