BAB II

TEORI DASAR

2.1. MACAM-MACAM PELELANGAN

Ada banyak model pelelangan tetapi hanya ada dua pelelangan yang sampai sekarang masih abadi dipergunakan. Kedua model tersebut adalah :

2.1.1. Lelang model Inggris

Dalam lelang model Inggris, andaikan terdapat N penawar. Penawar ke-i berencana menawar sampai maksimal bi dengan pola penawaran dari harga rendah terus meningkat sampai maksimal b_i dengan $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$. Pemenangnya adalah penawar tertinggi dan barang terjual dan harga b_{n-1}

2.1.2. Lelang model Belanda

Dalam lelang model Belanda ini, andaikan terdapat N penawar namun pelelanglah yang menetapkan harga. Masing-masing penawar akan mengajukan penawaran. Pemenangnya adalah penawar dengan penawaran tertinggi dan barang terjual pada harga penawaran tertinggi tersebut.

Adapun teknik pelelangan terbagi menjadi 2,yaitu :

a. Lelang Tersegel

Dalam lelang tersegel ini, andaikan terdapat N penawar. Masing-masing penawar memberikan tawaran tersegel sehingga penawar-penawar lain tidak mengetahui besarnya. Pemenangnya adalah penawar tertinggi dan barang terjual sesuai taawaran tertinggi tersebut. Pada prakteknya lelang tersegel ini banyak digunakan pada tender-tender.

b. Lelang terbuka

Dalam lelang terbuka andaikan terdapat N penawar. Masing-masing penawar memberikan tawaran terbuka di mana penawar penawar lainnya mengetahui besarnya. Pemenangnya adalah penawar tertinggi.

2.2. PERMAINAN TANPA KERJA SAMA DAN DENGAN KERJA SAMA

Dalam suatu permainan dikatakan tanpa kerja sama jika diantara para pemain, sebelum dan selama permainan tidak terjadi suatu komunikasi dan masing-masing pemain akan berusaha untuk memaksimalkan fungsi keuntungannya.

Sedangkan permainan yang para pemainnya mempunyai kebebasan penuh untuk berkomunikasi sebelum bermain, untuk membuat persetujuan yang saling mengikat yaitu dengan membentuk suatu kualisi untuk memaksimalkan keuntungan yang mereka dapat disebut permainan dengan kerja sama.

Konsep untuk memaksimalkan fungsi keuntungan ini dikenal dengan nama Titik Keseimbangan, yang akan dibahas pada sub bab berikutnya.

Dengan demikian, lelang adalah permainan tanpa kerja sama.

2.3. PERMAINAN JUMLAH NOL DAN JUMLAH TIDAK NOL

Permainan berjumlah nol atau zero sum game adalah suatu permainan dengan jumlah kemenangan semua pemain sama dengan nol. Hal ini berarti jumlah pembayaran yang diterima bagi salah satu pemain yang menang sama dengan jumlah pembayaran yang dibayarkan oleh pihak yang kalah. Dalam hal ini kemenangan pihak yang satu merupakan kekalahan pihak lainnya.

Sedangkan permainan berjumlah tidak nol atau non zero sum game adalah permainan dengan total pembayaran masing-masing pemain pada akhir suatu permainan tidak sama dengan nol. Dalam permainan berjumlah tidak nol, para pemain tidak sepenuhnya bermusuhan satu sama lain, pemain yang kalah tidak menderita kerugian(keuntungan = 0).

Dengan demikian lelang adalah permainan jumlah tidak nol.

2.4. STRATEGI CAMPURAN

Strategi permainan adalah rangkaian kegiatan menyeluruh dari salah satu pihak sebagai reaksi atas aksi yang mungkin dilakukan oleh pihak lain yang menjadi saingannya.

Suatu permainan dengan strategi murni adalah suatu permainan dengan posisi terbaiknya bagi setiap pihak dicapai dengan memilih satu strategi saja. Strategi campuran yaitu strategi dimana ada lebih dari 1 strategi yang harus dipilih.

Strategi optimal adalah rangkaian kegiatan atau rencana yang menyeluruh yang menyebabkan salah satu pihak yang bermain dalam posisi yang paling menguntungkan tanpa memperhatikan kegiatan-kegiatan para pesaingnya.

Harga permainan adalah harga yang diperoleh pihak I sehingga pihak I harus memaksimalkan kemenangan dan pihak II harus meminimalkan kekalahan atau sebaliknya.

Secara umum, untuk permainan di mana pihak I mempunyai m strategi murni, strategi campuran **x** dapat diwakili dengan m-tuple $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m)$, di mana x_i = peluang menggunakan strategi ke-i, $x_i \geq 0$, I = 1,2,....,m dan $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$. Begitu juga untuk permainan di mana pihak II mempunyai n strategi murni, strategi campuran y dapat diwakili dengan n - tuple $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dimana y_j = peluang menggunakan strategi ke-j, y_j

≥ 0, j= 1,2,...,n dan $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$, maka perolehan yang diharapkan untuk pihak I adalah :

$$e(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i \, a_{ij} \, y_j \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.1)$$

di mana aij = elemen-elemen matriks

Andaikan suatu matriks pembayaran :

Pemain P_2

		y	1-y
		1	2
x	1	a_{11}	a_{12}
1-x	2	a_{21}	a_{22}

x :peluang P_1 untuk memainkan strategi pertama

1-x :peluang P_1 untuk memainkan strategi kedua

y :peluang P_2 untuk memainkan strategi pertama

1-y :peluang P_2 untuk memainkan strategi kedua

Pemain P1 berusaha memaksimumkan kemenangan P_1 jika P_2 memainkan strategi 1 akan sama besar dengan harapan kemenangan P jika P_2 memainkan strategi 2.

Besar nilai x tersebut ditentukan dengan menggunakan prinsip pemikiran pemain P , yaitu :

$$x.a + (1 - x).a_{21} = x \,.\, a_{12} + (1-x).a_{22}$$

$$x(a + a_{22} - a_{12} - a_{21}) = a_{22} - a_{21}$$

$$x = \frac{a_{22} + a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = x_1$$

dan berarti

$$1 - x = 1 - \frac{a_{22} + a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$= \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = x_2^*$$

Jadi strategi optimum pemain P_1 adalah $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$

Dengan cara yang sama akan diperoleh strategi optimum bagi pemain P_2 yaitu

$$y_1^* = \frac{a_{22} + a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \quad \text{dan}$$

$$y_2^* = \frac{a_{11} + a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

Jadi strategi optimum pemain P_2 adalah $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*)$

Nilai permainannya sama dengan total rata-rata kemenangan bagi Pemain P_1, yaitu

$$v^* = y_1^* \, (x_1^*.a_{11} + x_2^*.a_{21}) + y_2^* \, (x_1^*.a_{12} + x_2^*.a_{22})$$

$$\text{atau } v^* = \frac{a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

Demikian juga bagi pemain P_2 :

$$v^* = x_1^* \, (y_1^*.a_{11} + y_2^*.\ a_{12}) + x_2^* \, (y_1^*.a_{21} + y_2^*.a_{22})$$

<u>Contoh 2.1</u>

Matriks di bawah ini tidak memiliki titik pelana karena maks min ≠ min maks, sehingga permainan ini bukan meru-

x y y x

pakan permainan dengan strategi murni.

$$
\begin{array}{cc|cc}
 & & \multicolumn{2}{c}{II} \\
 & & II_1 & II_2 \\
\multirow{2}{*}{I} & I_1 & \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array}\right] \\
 & I_2 & &
\end{array}
$$

Pembahasan berikutnya digunakan untuk permainan dengan strategi campuran. Misalkan pihak I memilih strategi ke-1 dengan peluang 1/2 dan memilih strategi ke-2 dengan peluang 1/2 juga. Bila pihak I dianggap pihak yang membuat pilihan, maka jika pihak II memilih strategi ke-1, perolehan yang diharapkan untuk pihak I adalah 1/2.1 + 1/2(-1) = 0. Sedangkan jika pihak II memilih strategi ke-2, perolehan yang diharapkan untuk pihak I adalah 1/2 (-1) + 1/2.1 = 0

Dengan demikian strategi optimal pihak I adalah memilih strategi ke-1 atau strategi ke-2 dengan peluang masing-masing 1/2 dengan harga permainan sebesar 0.

Contoh 2.2

Dalam permainan Poker yang disederhanakan, misalkan pihak I memilih strategi ke-1 dengan kemungkinan x dan strategi ke-2 dengan kemungkinan 1-x, serta pihak II memilih strategi ke-1 dengan kemungkinan y dan strategi ke-2 dengan kemungkinan 1-y, dan matriks permainannya adalah :

$$\begin{array}{cc|cc} & & \multicolumn{2}{c}{II} \\ & & II_1 & II_2 \\ I & I_1 & 0 & -1 \\ & I_2 & -^1/_2 & 0 \end{array}$$

Maka perolehan yang diharapkan adalah :

$$e(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0.x.y - 1.x(1-y) - 1/2\ (1-x).y + 0.(1-x)\ (1-y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.2)$$

$$= -x - 1/2y + 3/2xy$$

Didefinisikan $V_L^M = \underset{x \in \mathbf{x}}{\text{maks}} \ \underset{y \in \mathbf{y}}{\text{min}}\ e(\mathbf{x},\mathbf{y})$

$V_U^M = \underset{y \in \mathbf{y}}{\text{min}} \ \underset{x \in \mathbf{x}}{\text{maks}}\ e(\mathbf{x},\mathbf{y})$

dimana : V_L^M = harga bawah

V_U^M = harga atas

Jelas bahwa $V_L^M \le V_U^M$

Jika pihak I memainkan $\mathbf{x}^* = (1/3,\ 2/3)$ dimana $\mathbf{x}^*$ adalah strategi optimal untuk pihak I, maka dengan substitusi $\mathbf{x}$=1/3 pada (2.2) diperoleh :

$e(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) = -1/3$, untuk $\forall y \in Y$

Dengan memainkan $\mathbf{x}^* = (1/3\ ,\ 2/3)$ ini pihak I yakin dapat menerima paling sedikit -1/3.

Alternatif lain, jika pihak II memainkan strategi optimal $\mathbf{y}^* = (2/3\ ,\ 1/3)$ maka dengan substitusi y = 2/3 pada (2.2) di peroleh :

$e(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) = -1/3$, untuk $\forall x \in X$

sehingga jika pihak II memainkan $\mathbf{y}^* = (2/3\ ,\ 1/3)$, pihak II dapat menahan pihak I untuk memperoleh tidak lebih dari $-2/3$. Memainkan $\mathbf{x}^*$ menjamin pihak I menerima paling sedikit -1/3, sehingga $V_L^M \geq -1/3$, padahal jika pihak II memainkan $\mathbf{y}^*$, pihak II menjamin pihak I tidak lebih dari -1/3, jadi $V_U^M \leq -1/3$. Padahal $V_L^M \leq V_U^M$, Jadi $V_L^M = V_U^M = -1/3$. Sehingga solusinya pihak I memainkan strategi optimal (1/3,2/3) dan pihak II memainkan strategi optimal (2/3,1/3) dengan harga yang diharapkan -1/3.

2.5. TITIK KESETIMBANGAN

Titik kesetimbangan adalah titik yang menyatakan setiap pemain akan mendapat keuntungan yang maksimal dengan menggunakan strategi yang optimal pula.

Definisi 2.1

Suatu pasangan strategi optimal pihak I dan pihak II $\mathbf{x}^* \in X$, $\mathbf{y}^* \in Y$ dinyatakan $(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$ adalah pasangan kesetimbangan, jika dan hanya jika untuk setiap $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in Y$ berlaku :

$$e(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \leq e(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \leq e(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.3)$$

Jika pihak I menggunakan strategi $\mathbf{x}$ dan pihak II menggunakan strategi $\mathbf{y}^*$, maka keuntungan pihak I adalah $e_1(\mathbf{x},\mathbf{y}^*)$. Sebaliknya jika pihak I menggunakan strategi $\mathbf{x}^*$ dan pihak II menggunakan stategi $\mathbf{y}$, maka keuntungan pihak II adalah $e_2(\mathbf{x}^*,\mathbf{y})$, sehingga berlaku :

i. $e_1(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \le e_1(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$

ii. $e_2(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) \le e_2(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$ ....(2.4)

Definisi 2.2

Dalam permainan N orang tanpa kerja sama, dimana $\mathbf{x}_i^*$ adalah strategi optimal pemain ke-i, $(\mathbf{x}_1^*,\mathbf{x}_2^*,\ldots,\mathbf{x}_N^*)$ merupakan kesetimbangan N-tuple, jika untuk semua i=1,2,...,N, berlaku :

$e_i(\mathbf{x}_1^*,\mathbf{x}_2^*,\ldots,\mathbf{x}_i,\ldots,\mathbf{x}_N^*) \le$

$e_i(\mathbf{x}_1^*,\mathbf{x}_2^*,\ldots,\mathbf{x}_i^*,\ldots,\mathbf{x}_N^*)$ ....(2.5)

Definisi 2.3

S dikatakan himpunan tertutup jika untuk sembarang $\delta > 0$ kita dapat menemukan $x \in S$ sedemikian rupa $|x-l| < \delta$, $l \in S$. l disebut titik limit.

Definisi 2.4

S dikatakan himpunan terbatas jika untuk semua $x \in S$ terdapat m dan M sehingga $m \leq x \leq M$

Definisi 2.5

Fungsi f(x) dikatakan kontiniu di titik x=a jika memenuhi:

1. f(x) terdefinisi di titik x = a
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ ada
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Teorema 2.1

Jika suatu fungsi kontiniu f(x) memetakan titik-titik anggota himpunan tertutup dan terbatas S [a,b] maka ada $c \in [a,b]$ dimana f(c) = c

Bukti :

Pandang fungsi kontiniu f: $[a,b] \rightarrow [a,b]$. Kita asumsikan bahwa $f(a) \neq a$ dan $f(b) \neq b$. Karena f(a) dan $f(b) \in [a,b]$ maka $a < f(a)$ dan $f(b) < b$.

Didefinisikan fungsi kontiniu g : $[a,b] \rightarrow R$

$g(x) = x - f(x)$, $x \in (a,b)$

$g(a) = a - f(a) < 0$

$g(b) = b - f(b) > 0$

$g(a) . g(b) < 0$ maka $g(x)$ mempunyai akar riel dalam $[a,b]$, misal $c \in [a,b]$

dimana $g(c) = 0$

$$g(c) = c - f(c) = 0$$

$$f(c) = c$$

Untuk selanjutnya c disebut fixed point

Terbukti

Teorema 2.2

Dalam permainan 2 orang baik yang berjumlah nol maupun berjumlah tidak nol dengan strategi murni yag terbatas terdapat paling sedikit 1 titik kesetimbangan.

Bukti :

Pandang S adalah himpunan semua pasangan strategi yang mungkin, $S = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y\}$. jelas bahwa S adalah himpunan tertutup dan terbatas.

Didefinisikan $c_i \ (\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max\{0, \ e_1(I_i,\mathbf{y}) - e_1,(\mathbf{x},\mathbf{y})\}$

$1 \le i \le n$ di mana $c_i(\mathbf{x},\mathbf{y})$ adalah kelebihan yang pemain I peroleh jika ia memainkan strategi I_i yang ternyata lebih menguntungkan jika ia memainkan strategi **x**.

Dan $d_j \ (\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max \{0, \ e_2(\mathbf{x},II_j) - e_2(\mathbf{x},\mathbf{y})\}$

$1 \le j \le m$ dimana d_j $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ adalah kelebihan yang pemain II peroleh jika ia memainkan strategi II_j yang ternyata lebih menguntungkan jika ia memainkan strategi $\mathbf{y}$.

Fungsi f didefinisikan sebagai $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x}',\mathbf{y}')$ dengan

$$x_i' = \frac{(x_i + c_i(\mathbf{x},\mathbf{y}))}{(1 + \sum_{i=1}^{n} c_i(\mathbf{x},\mathbf{y}))} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

dengan $1 \le i \le n$ dan

$$y_i' = \frac{(y_i + d_j(\mathbf{x},\mathbf{y}))}{(1 + \sum_{j=1}^{m} d_j(\mathbf{x},\mathbf{y}))} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

dengan $1 \le j \le m$ dan

Karena jika $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ berubah dengan perubahan yang kecil akan mengakibatkan perubahan yang kecil pula bagi $\mathbf{x}'$ dan $\mathbf{y}'$ maka f adalah fungsi kontiniu. Jadi menurut teorema 2.1 pasti terdapat paling sedikit 1 fixed point sehingga

$$f(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = (\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$$

Tidak semua $e_1(I_i,\mathbf{y}) > e_1(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$ sehingga terdapat beberapa i dimana $c_i(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = 0$

Dari (i) kita peroleh :

$$x_i' = \frac{(x_i^* + c_i(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*))}{(1 + \sum_{i=1}^{n} C_i(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*))}$$

Untuk i tertentu dimana c_i $(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = 0$ akan mengakibatkan

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \quad (x^*, y^*) = 0$$

Jadi untuk semua i, $1 \le i \le n$, $c_i(x^*, y^*) = 0$ mengakibatkan

$$e_1(x^*, y^*) \ge e_1 \quad (I_i, y^*) \text{ untuk } 1 \le i \le n$$

$$e_1 \quad (x^*, y^*) \ge e_1 \quad (x, y^*)$$

Sesuai dengan difinisi 2.3 maka (x^*, y^*) adalah titik kesetimbangan.

Secara sama dapat dibuktikan bahwa $e_2(x^*, y^*) \ge e_2(x, y)$ untuk semua $y \in Y$ dan (x^*, y^*) adalah titik kesetimbangan.

Terbukti.

2.6. MENCARI PASANGAN KESETIMBANGAN (METODE SWASTIKA)

Metode swastika adalah suatu cara untuk mencari pasangan kesetimbangan dengan metode grafik. Untuk menerangkannya diambil suatu contoh permainan dengan jumlah tidak nol dan mempunyai strategi 2x2 seperti pada matriks pembayaran dibawah ini :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} II_1 & II_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (2,1) & (4,3) \\ (6,2) & (3,1) \end{bmatrix} \end{array}$$

Andaikan pemain I memainkan $\mathbf{x}^*$ dan pemain II memainkan $\mathbf{y}^*$ maka dalam sebuah pasangan kesetimbangan diperoleh

$e_1(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \geq e_1(\mathbf{x},\mathbf{y}^*)$.

Perolehan untuk pihak I adalah $e_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$ dan $\mathbf{x} = (x,1-x)$

$\mathbf{y} = (y,\ 1-y)$ maka

$$\begin{array}{cc|cc} & & II_1 & II_2 \\ & & y & 1-y \\ I_1 & x & 2 & 4 \\ I_2 & 1-x & 6 & 3 \end{array}$$

sehingga :

$$e_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2xy + (6y(1-x) + 4x(1-y) + 3(1-x)(1-y)$$
$$= 3 + x + 3y - 5xy \ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

Agar maksimum maka $\dfrac{\partial(e_1(\mathbf{x},\mathbf{y}))}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial(e_1(\mathbf{x},\mathbf{y}))}{\partial x} = 1 - 5y = 0$$

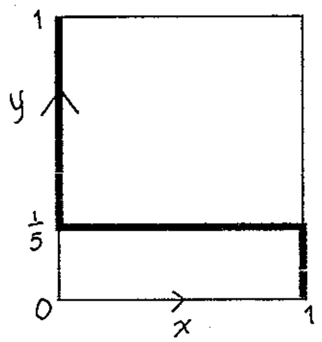
$$y = \frac{1}{5}$$

sehingga perlaku, jika :

$y < \frac{1}{5}$, maka $e_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$ maksimal untuk $x = 1$

$y = \frac{1}{5}$, maka $e_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$ maksimal untuk $0 \leq x \leq 1$

$y > \frac{1}{5}$, maka $e_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$ maksimal untuk $x = 0$



Untuk perolehan pihak II e_2 $(\mathbf{x},\mathbf{y})$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} I_1 & I_2 \\ x & 1-x \end{array} \\
\begin{array}{cc} II_1 & y \\ II_2 & 1-y \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

sehingga

$$e_2\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) = xy + 2y(1-x) + 3x(1-y) + (1-y)(1-x)$$

$$= 1 + y + 2x - 3xy \ \dots\dots\dots\dots\dots \ (2)$$

Agar maksimum maka $\dfrac{\partial(e_2(\mathbf{x},\mathbf{y}))}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial(e_2(\mathbf{x},\mathbf{y}))}{\partial y} = 1 - 3x = 0$$

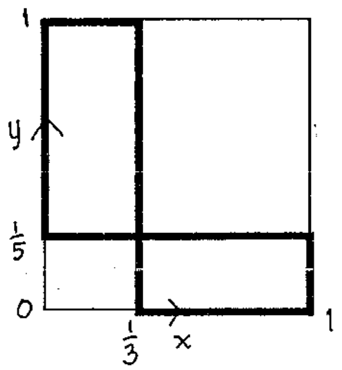
$$x = 1/3$$

diperoleh jika

$x < 1/3$, maka $e_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$ maksimum untuk $y = 1$

$x = 1/3$, maka $e_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$ maksimum untuk $0 \le y \le 1$

$x > 1/3$, maka $e_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$ maksimum untuk $y = 0$



Maka permainan di atas mempunyai tiga pasangan kesetimbangan yaitu :

1. Untuk x = 1 , y = 0, disubstitusikan pada (1) dan (2) maka mendapatkan perolehan (4,3). Ini berkorespondensi dengan (I_1, II_2)
2. Untuk x=0 , y=1, disubstitusikan pada (1) dan (2) maka mendapatkan perolehan (6,2). Ini berkorespondensi dengan (I_2, II_1)
3. Untuk x=1/3 , y=1/5, disubstitusikan pada (1) dan (2) maka berkorespondensi dengan [(1/3,2/3);(1/5,4/5)] dengan perolehan (3,6 ; 1,6)

Kemudian dicari pasangan-pasangan maksiminnya :

$$V_1 = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{2 \cdot 3 - 6 \cdot 4}{2 + 3 - 6 - 4}$$

$$V_1 = 3{,}6$$

$$\mathbf{x}^{*} = \left(\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} , \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \right)$$

$$x^* = \left(\frac{3-6}{2+3-6-4}, \frac{2-4}{2+3-6-4}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

$$V_2 = \frac{1.1 - 2.3}{1 + 1 - 2 - 3} = 1,67$$

$$y^* = \left(\frac{1-3}{1+1-2-3}, \frac{1-2}{1+1-2-3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Jadi nilai permainan di atas yaitu (V_1 , V_2) = (3,6 , 1,67)

dengan $x^* = \left(3/5 \text{ , } 2/5\right)$ dan $y^* = \left(2/3 \text{ , } 1/3\right)$

2.7. SOLUSI PERMAINAN DALAM PENGERTIAN YANG SEMPURNA

Solusi permainan seperti yang telah dibicarakan di atas dikatakan sempurna jika permainan tersebut mempunyai suatu optimal pareto.

Definisi 2.6

Suatu pasangan strategi (x,y) adalah optimal pareto jika dalam permainan tersebut tidak ada dominasi.

Definisi 2.7

Suatu permainan yang mempunyai solusi dalam pengertian yang sempurna jika

1. terdapat pasangan kesetimbangan di antara pasangan optimal pareto

2. semua pasangan kesetimbangan optimal pareto dapat dipertukarkan dan mempunyai pembayaran yang sama.