BAB II

HIMPUNAN DAN PEMETAAN

2.1 Himpunan Terbuka dan Tertutup

Definisi 2.1

a. Himpunan bagian $G \subseteq R$ adalah himpunan terbuka jika untuk setiap $x \in G$ terdapat persekitaran V dari x sedemikian hingga $V \subseteq G$.

b. Himpunan bagian $L \subseteq R$ adalah tertutup jika L^c yaitu komplemen dari L terbuka dalam R.

Untuk menunjukan bahwa $G \subseteq R$ adalah sebuah himpunan terbuka hal ini cukup menunjukan bahwa untuk setiap titik didalam G mempunyai persekitaran didalam G.

Untuk menunjukan bahwa $L \subseteq R$ adalah tertutup, hal ini cukup menunjukan bahwa untuk setiap titik $y \notin L$ mempuyai persekitaran diluar dengan L.

Atau dengan kata lain L tertutup jika hanya jika untuk setiap persekitaran $y \notin L$ ada $\varepsilon > 0$ sedemikian hingga $L \cap (y-\varepsilon, y+\varepsilon) = \phi$.

Teorema 2.1

a. Union dari sembarang koleksi (kumpulan) himpunan bagian terbuka dari R adalah terbuka.

b. Irisan dari beberapa koleksi himpunan terbuka yang berhingga adalah terbuka.

Bukti:

a. Misalkan $\{ G_\lambda : \lambda \in N \}$ adalah koleksi (kumpulan) dari himpunan di dalam R yang terbuka dan G adalah union dari G_λ.

Pandang $x \in G$ maka x harus termuat dalam G_{λ_o}, untuk $\lambda_o \in N$. Karena G_{λ_o} adalah himpunan terbuka sehingga terdapat persekitaran V dari x sedemikaian hingga $V \subseteq G_{\lambda_o}$.

Jika x adalah elemen sembarang dalam G dan $G_{\lambda_o} \subseteq G$ maka $V \subseteq G$ sehingga terbukti bahwa G terbuka. □

b. Pandang G_1 dan G_2 adalah himpunan terbuka dalam R dan misal $G = G_1 \cap G_2$.

Untuk menunjukan G adalah terbuka, ambil $x \in G$ sehingga $x \in G_1$ dan $x \in G_2$, jika G_1 dan G_2 himpunan terbuka maka terdapat $\varepsilon_1 > 0$ sedemikian hingga $(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1)$ termuat didalam G_1 dan $\varepsilon_2 > 0$ sedemikian hingga $(x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2)$ termuat didalam G_2.

Jika diberikan $\varepsilon>0$ yang lebih kecil dari ε_1 dan ε_2 maka terdapat persekitaran $U=(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ sedemikian hingga $U \subset G_1$ dan $U \subset G_2$. Dengan demikian $x \subset U \subseteq G$. Karena x adalah sembarang titik didalam G maka terbukti bahwa G terbuka.□

Teorema 2.2

a. Irisan dari sembarang koleksi himpunan tertutup dari R adalah tertutup.

b. Union dari beberapa koleksi berhingga himpunan tertutup dari R adalah tertutup.

Bukti:

a. Misal $\{ L_\lambda : \lambda \in N \}$ adalah koleksi dari himpunan tertutup dalam R dan $L = \cap L_\lambda$ maka $L^c = \cup L_\lambda^c$ adalah union dari himpunan terbuka. Karena L_λ^c adalah terbuka, maka dengan menggunakan teorema 2.1..a didapat L^c yang terbuka dalam R. Karena L^c adalah terbuka maka terbukti bahwa L tertutup.□

b. Andaikan $L_1, L_2, L_3, \ldots L_n$ adalah tertutup dalam R dan misal $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup \ldots . L_n$ maka $L^c = L_1^c \cap L_2^c \cap$

$L_3^c \cap \ldots . \cap L_n^c$. Karena $L_1, L_2, L_3, \ldots . L_n$ adalah tertutup sehingga didapat $L_1^c, L_2^c, L_3^c, \ldots . L_n^c$ yang terbuka. Dengan menggunakan teorema 2.1.b didapatkan L^c yang terbuka. Karena L^c terbuka sehingga terbukti bahwa L tertutup dalam R. □

2.2 Himpunan Kompak

Definisi 2.2

Himpunan $K \subseteq R$ adalah kompak jika termuat dalam union dari koleksi ξ:$\{G_\alpha\}$ dari himpunan terbuka dalam R. Sehingga K termuat dalam union dari bilangan finit(berhingga) dari himpunan dalam ξ.

Untuk membuktikan bahwa K adalah himpunan kompak, harus diselidiki sembarang koleksi ξ dari himpunan terbuka yang unionnya memuat K. Dan menunjukan bahwa K termuat didalam union dari bilangan finit dari himpunan didalam ξ.

Dengan kata lain untuk menunjukan bahwa D adalah himpunan yang tidak kompak, cukup menunjukan koleksi khusus ξ dari himpunan terbuka didalam R yang unionnya memuat D tetapi union dari beberapa bilangan finit dari himpunan didalam ξ yang tidak memuat D.

Contoh 2.1

Misalkan $K = \{ x_1, x_2, x_3, ...x_n \}$ adalah himpunan bagian dari R yang finit. Hal ini jelas bahwa jika $\xi = \{ G_\alpha \}$ adalah koleksi dari himpunan terbuka didalam R dan jika setiap titik dari K termuat didalam beberapa himpunan didalam ξ maka paling banyak n pilihan himpunan didalam ξ yang memuat K dalam unionya. Dengan demikian K adalah himpunan kompak.□

Contoh 2.2

Ambil $D = [0,\infty)$ dan $G_n = (-1,n)$, untuk $n \in N$. Jelas bahwa $D \subseteq \bigcup_1^\infty G_n$. Jika $\{G_{n_1}, G_{n_2}, G_{n_3}, \quad G_{n_k}\}$ adalah beberapa subkoleksi yang finit dari $\xi = \{ G_n \}$ dan misalkan

$M = \sup \{ n_1, n_2, n_3, ...n_k \}$ maka

$$G_{n_1} \cup G_{n_2} \cup G_{n_3} \cup .....G_{n_k} = G_M$$

andaikan $M+1 \in D$, tetapi $M+1 \in G_M$ dengan demikian tidak ada subkoleksi yang finit dari ξ yang mempunyai union yang memuat semua D. Dengan demikian D adalah himpunan yang tidak kompak.□

Definisi 2.3

a. Himpunan $A \subset R^n$ terbatas jika A termuat didalam beberapa persekitaran dari R^n

b. Himpunan $K \subset R^n$ adalah kompak jika K tertutup dan terbatas.

2.3 Pemetaan

Diberikan himpunan sembarang yang tidak kosong A dan B, maka perkawanan dari setiap eleman $a \in A$ yang mempunyai kawan yang tunggal dengan elemen $b \in B$.
Hal ini disebut pemetaan (mapping) atau fungsi dan ditulis dengan $F : A \longrightarrow B$.

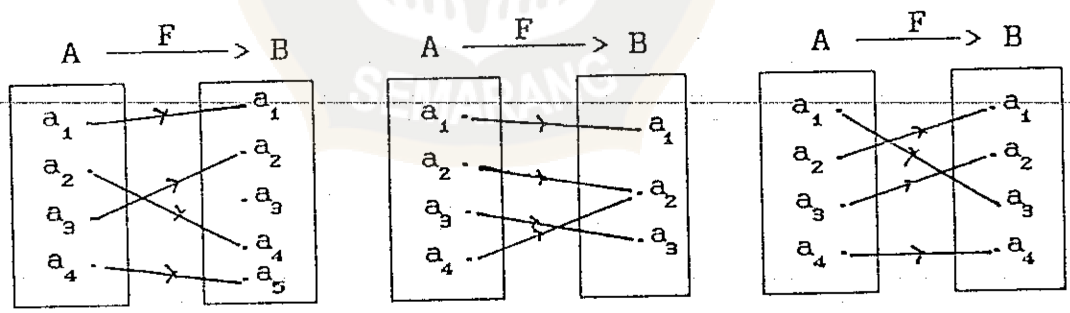
Elemen $b \in B$ yang dikawankan dengan elemen $a \in A$ disebut image a terhadap F (atau nilai F pada a) dan ditulis dengan F(a) atau $\bar{a}$.

Himpunan A disebut domain dan himpunan B disebut codomain dari F, dan himpunan semua bayangan (image) dari elemen-elemen pada A didalam B disebut range dari pemetaan F dan ditulis $I_m F$ atau $\bar{A}$atau F(a).
Dengan demikian $I_m F = \bar{A} = \{ \bar{a} \mid a \in A \}$.

Secara umun $\bar{A} \subseteq B$, jika setiap elemen pada B adalah bayangan dari elemen A yaitu $\bar{A} = B$ maka F disebut mapping dari A onto B.

2.3.1 Injektif, Surjektif Dan Bijektif

1. Injektif : jika setiap elemen $\bar{a} \in B$ mempunyai kawan yang tunggal di A maka F adalah into dan pemetaan satu-satu. yaitu jika $F(a_1) = F(a_2)$ untuk $a_1, a_2 \in A$ maka $a_1 = a_2$.
2. Surjektif : F adalah onto dan bukan pemetaan satu-satu, yaitu jika $F(A)=B$.
3. Bijektif : F memenuhi syarat injektif dan surjektif, yaitu: pemetaan satu-satu dan pemetaan onto.



injektif *surjektif* *bijektif*

gambar 2.1

2.3.2 Fungsi Pembatasan (Restriction Function)

Definisi 3.4

Misalkan S_1 adalah himpunan bagian dari S yaitu $S_1 \leq S$. Sedangkan F suatu fungsi dari S ke T dan G fungsi dari S_1 ke T.

$$F : S \longrightarrow T$$

$$G : S_1 \longrightarrow T$$

Maka fungsi G dikatakan restriksi atau pembatasan pada S_1, dengan tanda $G = F|S_1$, bila hanya bila untuk setiap $x \in S_1$ berlakulah $F(x) = G(x)$.

Apabila $G = F|S_1$, maka fungsi $F : S \longrightarrow T$ disebut suatu extensi dari $G : S_1 \longrightarrow T$ lewat himpunan S.

Contoh 2.3

Ambil S himpunan bilangan asli, $S = \{1,2,\ldots.\}$. Sedangkan F suatu fungsi dari S ke T yang ditentukan dengan aturan :

Jika $x \in S$ merupakan bilangan prima maka $F(x) = x$, sedangakan jika x bukan bilangan prima, maka F(x) adalah bilangan prima terkecil yang lebih besar daripada x.

misalkan : 3 ———> F(3) = 3

4 ———> F(4) = 5

Misal kan himpunan bagian S_1 dari S adalah himpunan bilangan-bilangan prima. Maka fungsi dari S_1 ke T yang ditentukan oleh aturan x ———> G(x) = x adalah suatu pembatasan dari F pada S_1. Sehingga $G = F|S_1$.

2.3.3 Pemetaan Kontinu

Sebuah bola (atau open ball) dalam R^n dengan pusat $p_o = (x_1^o, x_2^o, x_3^o, \ldots x_n^o)$ dan radius $\varepsilon > 0$ adalah himpunan

$$B_\varepsilon(p_o) = \{ (x_1, x_2, \ldots x_n) \in R^n | (x_1 - x_1^o)^2 + \ldots + (x_n - x_n^o)^2 < \varepsilon^2 \}$$

Dengan demikian didalam R, $B_\varepsilon(p_o)$ adalah sebuah interval terbuka dengan pusat p_o dan panjang 2ε. Didalam R^2, $B_\varepsilon(p_o)$ adalah sebuah lingkaran terbuka dengan pusat p_o dengan jari-jari ε. Sedangkan didalam R^3, $B_\varepsilon(p_o)$ adalah sebuah bola terbuka dengan pusat p_o dan jari-jari ε.

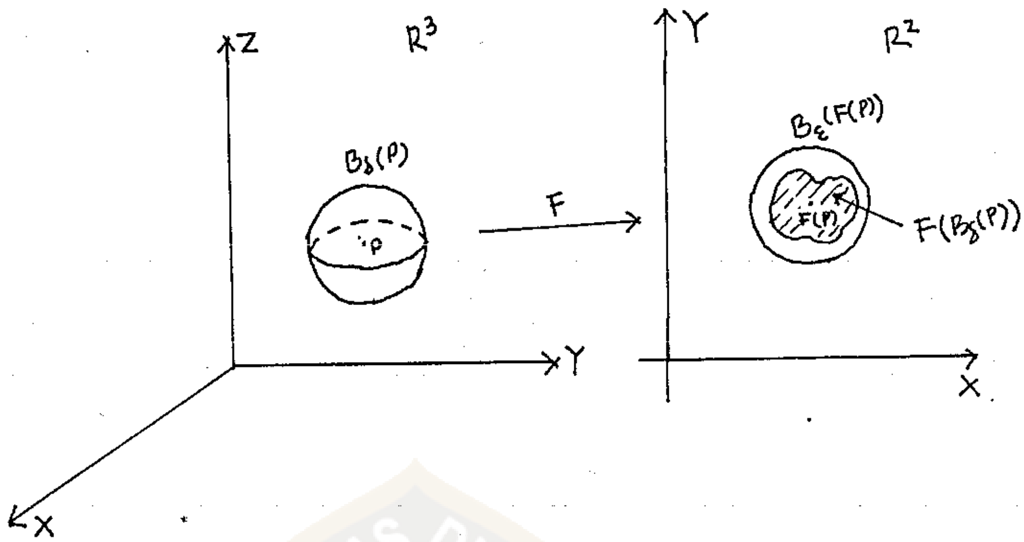
Himpunan $U \subset R^n$ adalah terbuka jika untuk setiap $p \in U$ ada bola $B_\varepsilon(p) \subset U$.
Selanjutnya, dikatakan bahwa suatu himpunan terbuka didalam R^n yang memuat suatu titik $p \in U$ didalam R^n disebut persekitaran dari p.

Suatu pemetaan $F: U \subset R \longrightarrow R$ dengan suatu variabel real adalah kontinu pada $x_o \in U$, jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $|x - x_o| < \delta$ maka $|F(x) - F(x_o)| < \varepsilon$.
Demikian pula untuk pemetaan $F: U \subset R^2 \longrightarrow R$ dengan dua variabel real adalah kontinu pada $(x_o, y_o) \in U$, jika diberikan $\varepsilon > 0$ dapat ditemukan $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 < \delta$, maka $|F(x,y) - F(x_o, y_o)| < \varepsilon$.
Notasi dari bola diatas yang sesuai dengan uraian diatas merupakan kejadian khusus dari kasus umum sebagai berikut:

Sebuah pemetaan $F : U \subset R^n \longrightarrow R^m$ adalah kontinu pada $p \in U$ jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga

$$F(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(F(p)) .$$

Selanjutnya, F dikatakan kontinu didalam U jika F kontinu untuk semua titik $p \in U$.



gambar 2.2

Diberikan suatu pemetaan $F:U\subset R^n \longrightarrow R^m$ dapat ditentukan m fungsi dari n variabel sebagai berikut:

$p=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ dan $f(p)=(y_1,y_2,\ldots y_n)$

maka dapat ditulis

$y_1=f_1(x_1, \ldots x_n), \ldots y_m=f_m(x_1, \ldots x_n)$

Fungsi $f_i:U \longrightarrow R$, $i=1,\ldots m$ adalah komponen fungsi dari F.

contoh 2.4

1. Misal $F:R^3 \longrightarrow R^3$ adalah pemetaan

   $F(x,y,z) = (-x,-y,-z)$

   maka $f_1(x,y,z) = -x$, $f_2(x,y,z) = -y$, $f_3(x,y,z) = -z$

2. Misal $F:R^3 \longrightarrow R^2$ adalah pemetaan

$$F(x,y,z) = (x,y)$$

maka $f_1(x,y,z) = x$, $f_2(x,y,z) = y$

3. Misal $F:R \longrightarrow R^3$ adalah pemetaan

$$F(x) = (x,y,z)$$

maka $f_1(x) = x$, $f_2(x) = y$, $f_3(x) = z$

Proposisi 2.1

Pemetaan $F : U \subset R^n \longrightarrow R^m$ adalah kontinu jika hanya jika untuk setiap himpunan terbuka $V \subset R^m$, $F^{-1}(V)$ adalah himpunan terbuka.

Bukti:

=====>

Misalkan F kontinu dan V adalah terbuka didalam R^m, jika $F^{-1}(V) \neq \phi$, ambil $p \in F^{-1}(V)$ maka $F(p) \in V$ dan karena V adalah terbuka maka terdapat sebuah ball $B_\varepsilon(F(p)) \subset V$ sehingga terdapat sebuah ball $B_\delta(p)$ sedemikian hingga

$$F(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(F(P)) \subset V$$

dengan demikian $B_\delta(p) \subset F^{-1}(V)$, maka $F^{-1}(V)$ adalah terbuka. □

<======

Andaikan $F^{-1}(V)$ adalah terbuka untuk setiap himpunan terbuka V didalam R^m. Misalkan $p \in U$ dan diberikan $\varepsilon > 0$, maka $A = F^{-1}(B_\varepsilon F(p))$ adalah terbuka. Dengan demikian terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga $B_\delta(p) \subset A$ oleh karena itu

$$F(B_\delta(p)) \subset F(A) \subset B_\varepsilon(F(p))$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa F kontinu. □

Corollary 2.3.1

Pemetaan $F : U \subset R^n \longrightarrow R^m$ adalah kontinu jika hanya jika untuk setiap himpunan tertutup $A \subset R^m$, $F^{-1}(A)$ adalah himpunan tertutup.

Teorema 2.3

Jika K adalah himpunan bagian yang kompak dari R dan jika $F : K \longrightarrow R$ adalah kontinu maka F(K) adalah kompak

Bukti:

Misalkan $\xi = \{G_\lambda\}$ dengan beberapa koleksi dari himpunan terbuka didalam R yang unionnya memuat Himpunan F(K). Jika $F(K) \subset \cup G_\lambda$ ini berarti bahwa $K \subseteq \cup F^{-1}(G_\lambda)$. Hal ini mungkin terjadi $F^{-1}(G_\lambda)$ bukan himpunan terbuka tetapi untuk setiap λ dapat ditemukan himpunan D_λ yang terbuka sedemikian hingga $D_\lambda \cap K = F^{-1}(G_\lambda)$ dan dapat diperoleh sebuah koleksi himpunan terbuka D_λ yang unionya memuat K.

Diberikan himpunan $F^{-1}(G_\lambda)$ didapat hubungan dengan D_λ sebagai berikut:

Untuk $x \in K$ sedemikian hingga $x \in F^{-1}(G_\lambda)$ didapat $F(x) \in G_\lambda$ maka G_λ adalah persekitaran dari F(x) dan jika F adalah kontinu terdapat persekitaran U_x dari x sedemikian hingga $F(U_x \cap K) \subseteq G_\lambda$.

Didefinisikan $D_\lambda = \cup(U_x : x \in F^{-1}(G_\lambda) \supseteq K$

Jika union dari beberapa koleksi himpunan terbuka adalah terbuka, maka himpunan D_λ adalah terbuka. Karena $D_\lambda \cap K = F^{-1}(G_\lambda)$ sehingga didapat $\cup D_\lambda \supseteq F^{-1}(G_\lambda) \supseteq K$

Oleh karena itu D_λ adalah koleksi dari himpunan terbuka yang unionnya memuat K. Dengan menggunakan sifat himpunan kompak untuk mendapatkan koleksi finit $\{D_{\lambda_1}, D_{\lambda_2}, \ldots\ldots D_{\lambda_n}\}$ dari D_λ yang memuat K, maka diperoleh

$$\bigcup_{i=1}^{n} F^{-1}(G_{\lambda_i}) = \bigcup_{i=1}^{n} D_{\lambda_i} \cap K \geq K.$$

Diketahui $\{G_{\lambda_1}, G_{\lambda_2}, \ldots\ldots G_{\lambda_n}\}$ dari $\xi = \{G_\lambda\}$ yang memuat F(K), hal ini menujukan bahwa jika $\xi = \{G_\lambda\}$ adalah koleksi dari himpunan terbuka yang memuat F(K), maka ada subkoleksi yang finit dari himpunan didalam ξ yang unionnya memuat F(K). dengan demikian terbukti bahwa F(K) adalah kompak.$\square$

2.3.4 Homeomorpism

Definisi 2.5

Pemetaan F adalah homeomorpism jika F adalah kontinu dan F mempunyai invers F^{-1} yang juga kontinu yang didefinisikan pada himpunan terbuka.

Dikatakan bahwa pemetaan kontinu

$F : A \subset R^n \longrightarrow R^n$ adalah homeomorpism onto F(A), jika F adalah satu-satu dan invers $F^{-1} : F(A) \subset R^n \longrightarrow R^n$ adalah kontinu.

Contoh 2.5

Fungsi $F : R \longrightarrow R$ dengan $F(x) = 3x + 1$ adalah homeomorpisme.
Jika didefinisikan $G(x) = \frac{1}{3}(y - 1)$ maka dapat diperiksa bahwa $F(G(y)) = y$ dan $G(F(x)) = x$ untuk setiap bilangan real x dan y. Ini berarti bahwa F bijektif, $G = F^{-1}$ dan F,G adalah kontinu. □

Contoh 2.6

Misal $F : R^3 \longrightarrow R^3$ diberikan dengan

$$F(x,y,z) = (xa,yb,zc)$$

F jelas kontinu dan pembatasan F pada sebuah bola

$$S^2 = \{(x,y,z) \in R^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

adalah pemetaan kontinu $\acute{F} : S^2 \longrightarrow R^3$.
Perhatikan bahwa $\acute{F}(S) = E$, dimana E adalah Ellipsoida

$$E = \{(x,y,z)\in R^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \}$$

ini jelas bahwa F adalah satu-satu dan

$$F^{-1}(x,y,z) = (\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c})$$

dengan demikian $\tilde{F}^{-1}$ adalah kontinu dan $\tilde{F}$ adalah homeomorpisme dari sebuah bola onto ellipsoida E .

2.4 Himpunan Connected

Definisi 2.6

Kurva kontinu $\alpha : [a,b] \longrightarrow A \subset R^n$ disebut busur dalam A yang menghubungkan $\alpha(a)$ ke $\alpha(b)$.

Definisi 2.7

Himpunan $A \subset R^n$ adalah connected maka hal ini tidak mungkinuntuk ditulis $A = U_1 \cup U_2$ dimana U_1 dan U_2 adalah himpunan terbuka yang tidak kosong didalam A dan $U_1 \cap U_2 = \phi$.

contoh 2.7

A adalah kumpulan dari titik (x,y) dari R^2, dan berlaku $x^2 + y^2 < 1$, berarti A adalah connected.

Proposisi 2.2

Jika himpunan $A \subset R^n$ adalah connected dan misalkan $B \subset A$ dengan serentak terbuka dan tertutup didalam A maka $B = \phi$ atau $B = A$.

Bukti:

Andaikan $B \neq \phi$ dan $B \neq A$ sehingga bisa ditulis $A = B \cup (A - B)$. Karena B tertutup didalam A sehingga A−B terbuka didalam A.

Dengan demikian union dari A tidak terhubung terdiri atas himpunan terbuka B dan A−B.

Kontradiksi dengan definisi himpunan connected,

Jadi pengandaian harus diingkar, yang benar $B = \phi$ atau $B = A$. □

Proposisi 2.3

Misalkan pemetaan $F : A \subset R^n \longrightarrow R^m$ adalah kontinu dan A adalah connected maka F(A) adalah connected.

Bukti:

Diandaikan F(A) tidak connected maka $F(A) = U_1 \cup U_2$ dimana U_2 dan U_2 adalah himpunan terbuka yang saling asing. Karena F kontinu sehingga $F^{-1}(U_1)$ dan $F(U_2)$ juga himpunan terbuka yang saling asing.

Karena $A = F^{-1}(U_1) \cup F^{-1}(U_2)$ sehingga kontradiksi dengan A adalah connected. Jadi pengandaian harus diingkar, yang benar F(A) adalah connected. □

Definisi 2.8

Himpunan $A \subset R^n$ adalah arcwise connected jika diberikan dua titik $p,q \in A$ terdapat suatu busur didalam A yang menghubungkan titik p ke titik q.

Contoh 2.8

Setiap interval pada garis bilangan real adalah arcwise connected, untuk a,b dalam interval K. Busur

$$P(t) = (1-t)a + tb \quad , \quad t\in[0,1]$$

adalah busur dalam K dengan titik awal a dan titik akhir b.

Proposisi 2.4

Jika $A \subset R^n$ adalah arcwise connected maka A adalah connected.

Bukti:

Andaikan A tidak connected sehingga $A = U_1 \cup U_2$ dimana U_1 dan U_2 adalah himpunan terbuka didalam A yang saling asing.

Misalkan $p\in U_1$ dan $q\in U_2$. Karena A adalah arcwise connected sehingga terdapat busur $\alpha : [a,b] \longrightarrow A$ yang menghubungkan titik p ke titik q. Karena α adalah kontinu $B = \alpha([a,b]) \subset A$ adalah connected.

Misalkan $V_1 = B \cap U_1$ dan $V_2 = B \cap U_2$ sehingga $B = V_1 \cup V_2$ dimana V_1 dan V_2 adalah himpunan terbuka yang saling asing didalam B . Kontradiksi, jadi yang benar A adalah connected. □

Definisi 2.9

Himpunan $A \subset R^n$ adalah arcwise connected lokal jika untuk setiap $p \in A$ dan setiap persekitaran V dari p didalam A terdapat sebuah persekitaran arcwise connected $U \subset V$ dari p didalam A.

contoh 2.9

Beberapa interval dalam dalam garis bilangan real adalah lokally arcwise connected.

Definisi 2.10

Misalkan $A \subset R^n$ dan $p \in A$ union dari semua himpunan bagian terhubung dari A yang memuat p disebut komponen connected dari A yang memuat p.

contoh 2.10

Komponen dari himpunan bagian

$$Y = [-1,0] \cup [0,1]$$

dari garis bilangan real adalah dua himpunan [-1,0] dan [0,1] adalah komponen connected dari Y yang memuat 0.