BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1. GRAPH

Suatu graph terdiri atas himpunan titik-titik (vertices) dan himpunan pasangan-pasangan titik yang digambarkan sebagai garis-garis.

Apabila garis-garis dalam suatu graph mempunyai arah, maka garis-garisnya disebut arc-arc dan graphnya disebut graph berarah (directed graph). Apabila garis-garis dalam suatu graph tidak mempunyai arah, maka garis-garisnya disebut edge-edge dan graphnya disebut graph tak berarah (undirected graph).

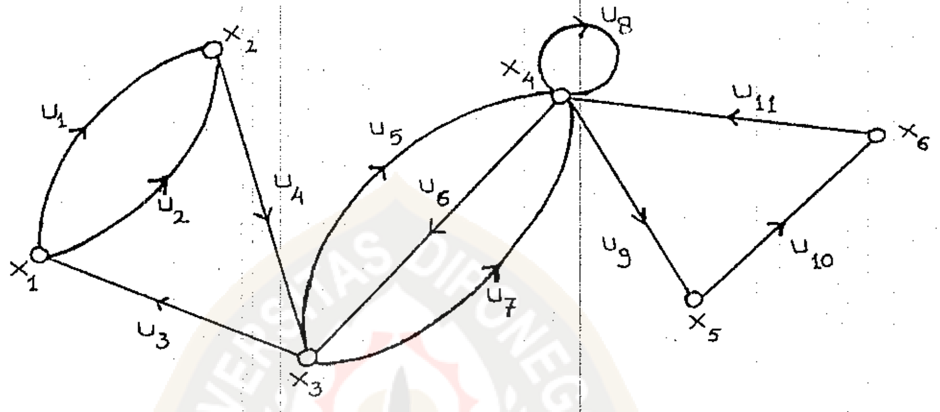
Dalam penulisan ini yang akan dibahas adalah graph berarah (directed graph), yang kemudian dinyatakan dengan istilah graph $G = (X,U)$.

Definisi 2.1.1.

Graph $G = (X,U)$ adalah graph bearah yang terdiri atas himpunan $X = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ yang anggota-anggotanya disebut titik (vertices) dan himpunan $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ yang anggota-anggotanya adalah pasangan-pasangan berurutan dari titik-titik, yang disebut arc-arc.

Apabila $u = (x,y)$ adalah suatu arc dari graph $G = (X,U)$, maka x adalah initial endpoint (titik awal) arc u = (x,y) dan y adalah terminal endpoint (titik akhir) arc u = (x,y). Apabila endpoint x = y, maka u = (x,y) disebut loop.

Contoh :



Gambar 2.1.1

Pada gambar 2.1.1., graph G = (X,U) terdiri atas himpunan titik $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ himpunan arc $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}\}$ dimana :

$u_1 = (x_1,x_2)$: $U_5 = (x_3,x_4)$: $u_9 = (x_4,x_5)$

$u_2 = (x_1,x_2)$: $U_6 = (x_4,x_3)$: $u_{10} = (x_5,x_6)$

$u_3 = (x_3,x_1)$: $U_7 = (x_3,x_4)$: $u_{11} = (x_6,x_4)$

$u_4 = (x_2,x_3)$: $U_8 = (x_4,x_4)$ disebut loop

Definisi 2.1.2.

Multiplicity dari pasangan titik (x,y), ditulis m (x,y) adalah menyatakan jumlah arc dari titik x ke titik y.

Contoh :

Pada gambar 2.1.1.

$m(x_1,x_2) = 2$: $m(x_3,x_4) = 2$: $m(x_4,x_5) = 1$

$m(x_2,x_3) = 1$: $m(x_4,x_3) = 1$: $m(x_5,x_6) = 1$

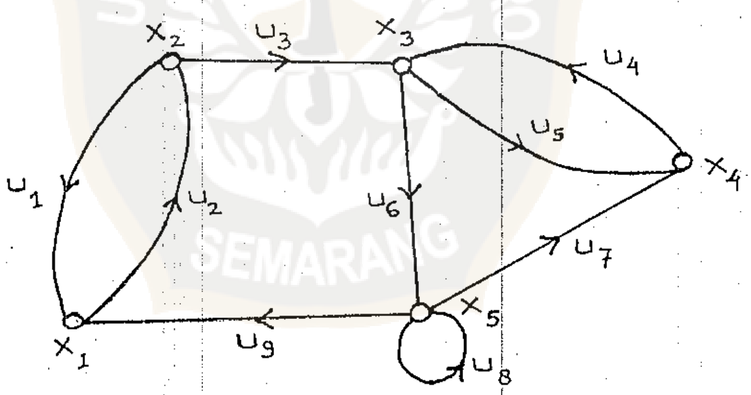
$m(x_3,x_1) = 1$: $m(x_4,x_4) = 1$: $m(x_6,x_4) = 1$

Definisi 2.1.3..

Suatu graph disebut p -graph, apabila jumlah arc dari titik x ke titik y maksimum p atau $m(x,y) \leq p$, untuk semua titik x dan y.

Untuk p = 1, p - graph disebut 1 - graph.

Contoh :



Gambar 2.1.2

Graph G = (X,U) pada gambar 2.1.2. disebut 1 - graph karena jumlah arc dari titik x ke titik y maksimum 1 atau $m(x,y) \leq 1$, untuk semua titik $x,y \in X$.

Sedangkan graph G = (X,U) pada gambar 2.1.1. disebut 2 - graph, karena jumlah arc dari titik x ke titik y maksimum 2 atau $m(x,y) \leq 2$, untuk semua titik $x,y \in X$.

Apabila $G = (X,U)$ adalah 1 - graph dan Γ adalah suatu multivalued mapping yang memetakan setiap titik $x \in X$ dengan himpunan bagian dari X, maka graph G dapat ditulis dengan notasi (X,Γ).

Definisi 2.1.4.

Titik y disebut sebagai successor titik x, apabila terdapat arc (x,y) dengan initial endpoint x dan terminal endpoint y.

Titik y disebut sebagai predecessor titik x, apabila terdapat arc (y,x) dengan initial endpoint y dan terminal endpoint x.

Dalam hal ini, himpunan semua successor titik x dinyatakan dengan notasi Γ (x) dan himpunan semua predecessor titik x dinyatakan dengan notasi $\Gamma^{-1}(x)$. Himpunan semua tetangga (neighbours) titik x dinyatakan dengan notasi $\Gamma_G(x)$, dimana $\Gamma_G(x) = \Gamma(x) \cup \Gamma^{-1}(x)$.

Contoh :

Dari gambar 2.1.2.

Himpunan semua successor titik x_5 adalah

$\Gamma(x_5) = \{x_1, x_4, x_5\}$.

Himpunan semua predecessor titik x_5 adalah

$\Gamma^{-1}(x_5) = \{x_3, x_5\}$.

Himpunan semua tetangga titik x_5 adalah

$\Gamma_G(x_5) = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}$.

Misal $A \subset X$ dan $\Gamma_G(A) = \bigcup_{a \in A} \Gamma_G(a)$.

Apabila titik $x \in \Gamma_G(A)$, $x \notin A$, maka titik x dikatakan adjacent ke himpunan A.

Contoh :

Dalam gambar 2.1.2., misal $A = \{x_3, x_4\}$ dan $\Gamma_G(A) = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Titik-titik yang adjacent ke himpunan A adalah titik x_2 dan x_5, karena titik $x_2, x_5 \in \Gamma_G(A)$. Sedangkan titik yang tidak adjacent ke himpunan A adalah titik x_1, karena $x_1 \notin \Gamma_G(A)$.

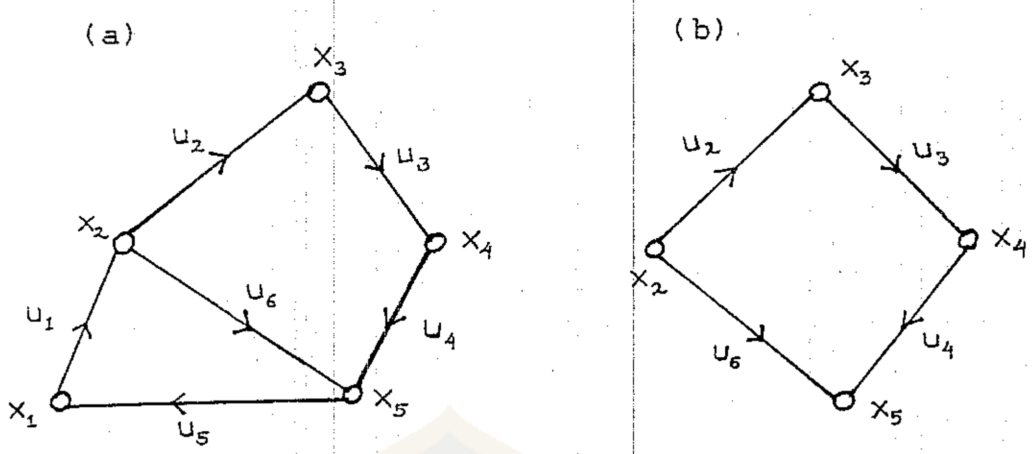
2.2. SUB GRAPH

Definisi 2.2.1.

Graph $G_A = (A, U_A)$ disebut sebagai sub graph dari graph $G = (X,U)$, apabila A adalah himpunan bagian dari X dan U_A adalah himpunan arc-arc di dalam $G = (X,U)$,yang endpoint-endpointnya berada di dalam A.

Lebih lanjut, apabila pada suatu graph dilakukan penghapusan sebuah titik atau lebih, maka akan dihasilkan sub gaph dari graph tersebut.

Contoh :



Gambar 2.2.1

Pada gambar 2.2.1. (a), graph $G = (X,U)$ terdiri atas himpunan titik $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ dan himpunan arc $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$.

Apabila pada graph $G = (X,U)$ dihapus titik x_1, maka akan dihasilkan graph $G_A = G_{X-x_1}$, dengan himpunan titik $A = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$ dan himpunan arc $U_A = \{u_2, u_3, u_4, u_6\}$. (gambar 2.2.1. (b))

Selanjutnya, karena A adalah himpunan bagian dari X dan U_A adalah himpunan arc-arc di dalam $G = (X,U)$ yang endpoint-endpointnya berada di dalam A, maka $G_A = (A,U_A)$ disebut sebagai sub graph dari graph $G = (X,U)$.

2.3. RELASI DALAM GRAPH

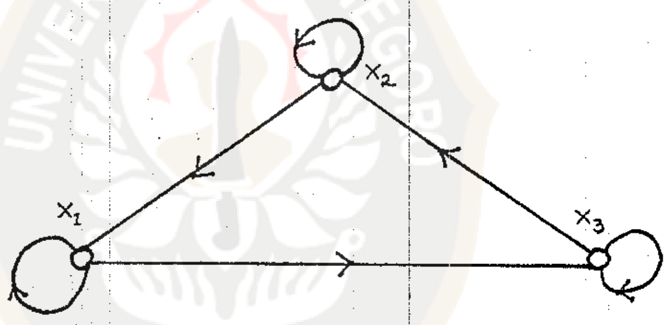
Relasi dalam graph $G = (X,U)$ menggambarkan hubungan suatu titik dengan titik itu sendiri atau dengan titik lain di dalam $G = (X,U)$, yang ditunjukkan sebagai arc.

Dalam hal ini , apabila G = (X,U) adalah 1-graph dan R adalah suatu relasi didalam himpunan titik x ,maka berlaku x R y jika dan hanya jika $(x,y) \in U$.

Definisi 2.3.1.

1-graph G = (X,U) disebut refleksif jika dan hanya jika di penuhi $(x,x) \in U$,umtuk setiap titik $x \in X$.

Contoh :

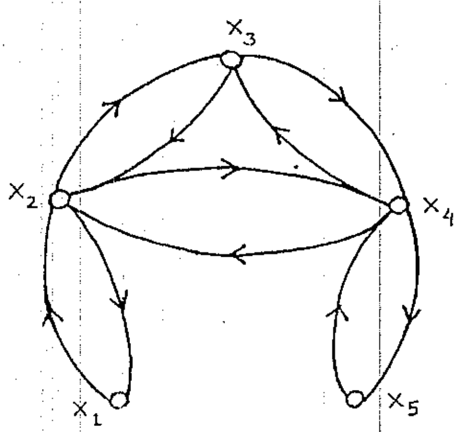


Gambar 2.3.1 Refleksif 1-graph G = (X,U)

Definisi 2.3.2

1-graph G = (X,U) disebut symetris jika dan hanya jika dipenuhi $(x,y) \in U \implies (y,x) \in U$, untuk $x,y \in X$.

Contoh :



Gambar 2.3.2 Symetris 1-graph G = (X,U)

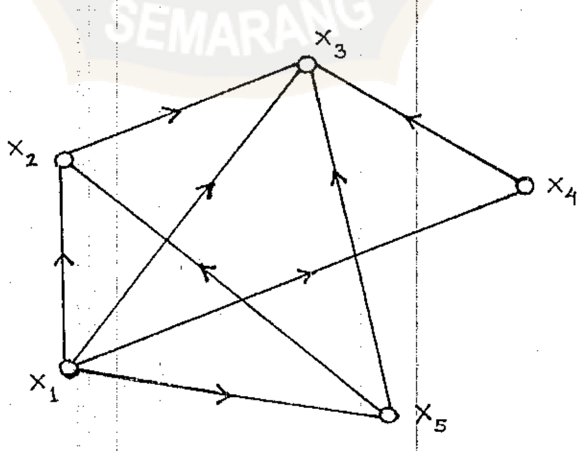
Definisi 2.3.3

1-graph G = (X,U) disebut transitif jika dan hanya jika dipenuhi

$(x,y) \in U$, $(y,z) \in U$ $\Longrightarrow$ $(x,z) \in U$,

untuk $x,y,z \in X$.

Contoh :



Gambar 2.3.3 Transitif 1-graph G = (X,U)

2.4. CHAIN, CYCLE, PATH DAN CIRCUIT

Definisi 2.4.1.

Chain adalah barisan arc $\mu = (u_1, \ldots, u_q)$, dimana arah arc-arcnya diabaikan.

Untuk 1 - graph, chain dapat dinyatakan sebagai barisan titik $\mu = [x_o, \ldots, x_q] = \mu\ [x_o, x_q]$, dimana x_o dan x_q adalah endpoint-endpoint chain μ.

Definisi 2.4.2.

Cycle adalah chain yang mempunyai endpoint-endpoint yang sama (chain tertutup).

Definisi 2.4.3.

Path adalah barisan arc $\mu = (u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_q)$, dimana terminal endpoint arc u_i adalah initial endpoint arc u_{i+1}, untuk semua $i < q$.

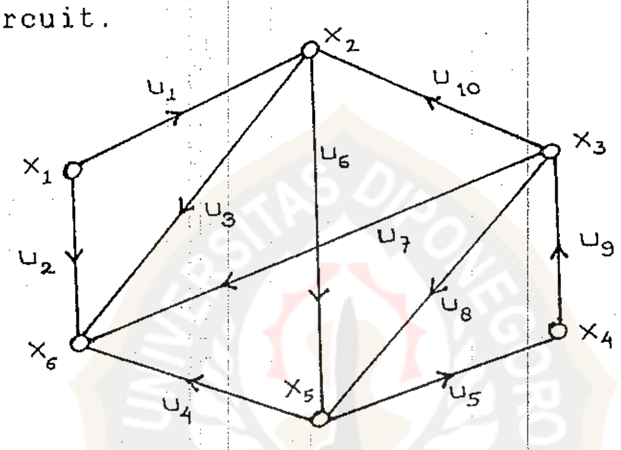
Untuk 1 - graph, path dapat dinyatakan sebagai barisan titik $\mu = ((x_o, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{q-1}, x_q)) = [x_o, x_1, \ldots, x_{q-1}, x_q] = \mu[x_o, x_q]$, dimana titik x_o adalah initial endpoint path μ dan titik x_q adalah terminal endpoint path μ.

Definisi 2.4.4.

Circuit adalah path yang mempunyai endpoint-endpoint yang sama (path tertutup).

Definisi 2.4.5.

Panjang suatu chain, cycle, path atau circuit adalah jumlah arc yang terdapat pada chain, cycle, path atau circuit.



Gambar 2.4.1

Contoh :

Dalam gambar 2.4.1., barisan arc :

$\mu = (u_2, u_3, u_6, u_8, u_9) = [x_1, x_6, x_2, x_5, x_3, x_4]$ adalah chain, dengan panjang = 5.

$\mu = (u_3, u_4, u_8, u_{10}) = [x_2, x_6, x_5, x_3, x_2]$ adalah cycle, dengan panjang = 4.

$\mu = (u_1, u_6, u_5, u_9) = [x_1, x_2, x_5, x_4, x_3]$ adalah path, dengan panjang = 4.

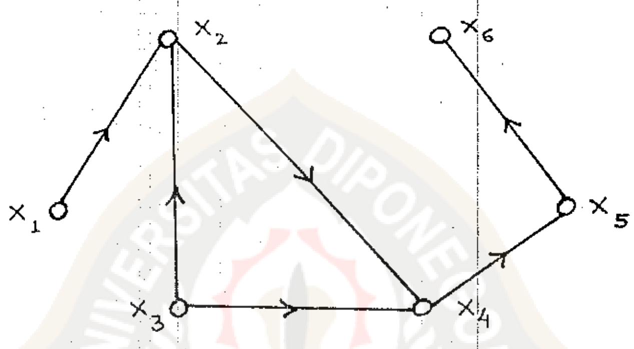
$\mu = (u_5, u_9, u_8) = [x_5, x_4, x_3, x_5]$ adalah circuit, dengan panjang = 3.

2.5. CONNECTED GRAPH

Definisi 2.5.1.

Suatu graph dikatakan connected atau terhubung, apabila untuk semua pasangan titik (x,y) terdapat chain $\mu = [x,y]$ yang menghubungkan titik x dan y.

Contoh :



Gambar 2.5.1 Connected graph

Dalam graph $G = (X,U)$ relasi xRy jika dan hanya jika $x = y$ atau terdapat chain $\mu\ [x,y]$ yang menghubungkan x dan y, adalah relasi ekuivalensi, sebab :

(1). $x\ R\ x$ (refleksif)

(2). $x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$ (simetris)

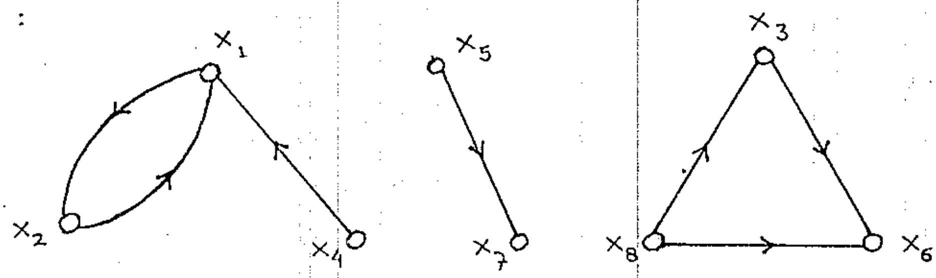
(3). $x\ R\ y\ ,\ y\ R\ z \Rightarrow x\ R\ z$ (transitif)

Kelas-kelas ekuivalensi yang disebabkan oleh relasi ini pada himpunan X, membentuk partisi X menjadi himpunan-himpunan bagian $X_1, X_2, \ldots, X_p$.

Sub graph-sub graph $G_1, G_2, \ldots, G_p$ yang dihasilkan oleh himpunan-himpunan bagian $X_1, X_2, \ldots, X_p$ adalah komponen-komponen connected dari $G = (X,U)$.

Setiap komponen connected adalah connected graph.

Contoh :



Gambar 2.5.2

Dalam gambar 2.5.2., diperlihatkan graph dengan tiga komponen connected , dimana :

Komponen pertama, terdiri dari titik-titik x_1 , x_2 , dan x_4.

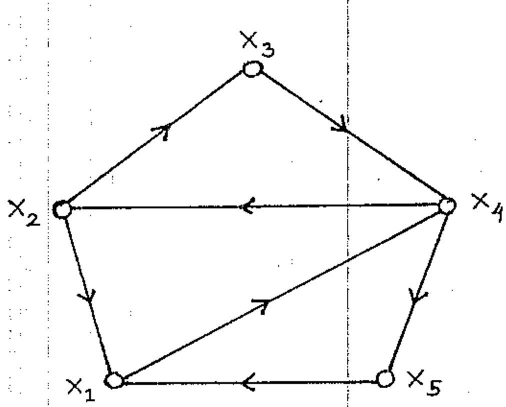
Komponen kedua, terdiri dari titik-titik x_5, dan x_7.

Komponen ketiga, terdiri dari titik-titik x_3, x_6, dan x_8.

Definisi 2.5.2.

Suatu graph dikatakan connected kuat, apabila untuk setiap pasangan titik x dan y yang berbeda, terdapat path μ [x,y] dari x ke y dan sebaliknya terdapat path μ [y,x] dari y ke x.

Contoh :

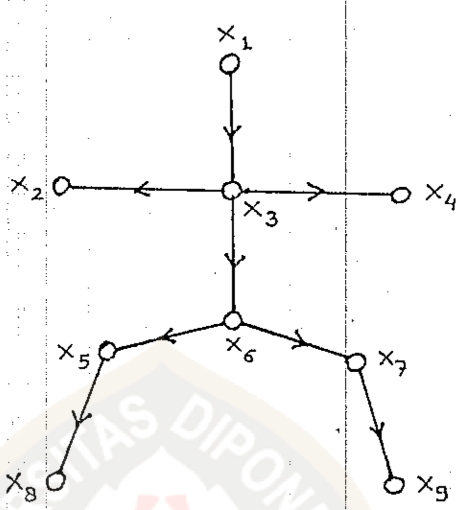


Gambar 2.5.3 Connected kuat

Definisi 2.5.3.

Tree adalah connected graph yang tidak memuat cycle.

Contoh :



Gambar 2.5.3.Tree