

## B A B III

## PEMETAAN - PEMETAAN PADA RUANG TOPOLOGI

## 3.1. FUNGSI KONTINU PADA RUANG TOPOLOGI

Diberikan  $(X, \mathcal{T})$  dan  $(Y, \mathcal{J})$  adalah dua ruang topologi.

## Definisi 3.1.1.

Diberikan fungsi  $f : X \rightarrow Y$ .

Fungsi  $f$  dikatakan kontinu pada  $c \in X$  jika untuk setiap persekitaran  $V$  dari  $f(c)$  terdapat persekitaran  $U$  dari  $c$  sedemikian sehingga  $f(x) \in V$  bilamana  $x \in U$ .

## Teorema 3.1.1.

Fungsi  $f : X \rightarrow Y$  kontinu pada  $c \in X$  bila dan hanya bila  $V \in \mathcal{N}_Y(f(c)) \implies f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_X(c)$ .

Bukti :

( $\implies$ )

Jika  $f : X \rightarrow Y$  kontinu pada  $c$ , dan jika  $V \in \mathcal{N}_Y(f(c))$  maka menurut definisi 3.1.1, terdapat  $U \in \mathcal{N}_X(c)$  sedemikian sehingga  $f(x) \in V$  jika  $x \in U$ .

Dari sini  $f^{-1}(V) \supset U$ , sehingga  $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_X(c)$ .

( $\impliedby$ )

Jika untuk setiap  $V \in \mathcal{N}_Y(f(c))$  maka himpunan  $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_X(c)$ .

Dan karena  $f(x) \in V$  jika  $x \in U = f^{-1}(V)$ .

Menurut definisi 3.1.1,  $f$  kontinu pada  $c$ .

Jadi  $f : X \rightarrow Y$  kontinu pada  $c \in X$  bila dan hanya

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:

Teorema 3.1.2.

(<http://eprints.undip.ac.id>)

Ambil  $S \subset X$ , dan pandang ruang topologi  $(S, \mathcal{T}_S)$ , di

Fungsi  $f : S \rightarrow Y$  kontinu pada  $c \in S$  bila dan hanya bila untuk setiap  $V \in \mathcal{N}_Y(f(c))$  terdapat  $U \in \mathcal{N}_X(c)$  sedemikian sehingga  $x \in U \cap S \Rightarrow f(x) \in V$ .

Bukti :

( $\Rightarrow$ )

Jika  $f : S \rightarrow Y$  kontinu pada  $c$ , dan untuk setiap  $V \in \mathcal{N}_Y(f(c))$  maka menurut definisi 3.1.1, terdapat  $U \in \mathcal{N}_X(c)$  sedemikian sehingga  $f(x) \in V$  bilamana  $x \in U \cap S$

( $\Leftarrow$ )

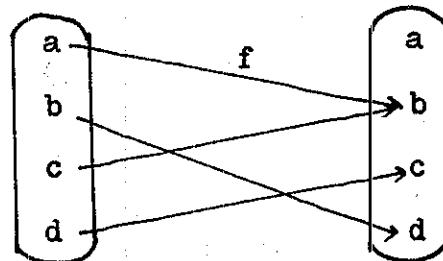
Jika untuk setiap  $V \in \mathcal{N}_Y(f(c))$  terdapat  $U \in \mathcal{N}_X(c)$  sedemikian sehingga  $x \in U \cap S \Rightarrow f(x) \in V$ , maka menurut definisi 3.1.1,  $f$  kontinu pada  $c$ .

Jadi  $f : S \rightarrow Y$  kontinu pada  $c \in S$  bila dan hanya bila untuk setiap  $V \in \mathcal{N}_Y(f(c))$  terdapat  $U \in \mathcal{N}_X(c)$  sedemikian sehingga  $x \in U \cap S \Rightarrow f(x) \in V$ .

Contoh 3.1.1.

1. Diberikan  $T = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{b, c, d\}\}$  suatu topologi pada  $X = \{a, b, c, d\}$ .

Diberikan fungsi  $f : X \rightarrow X$  yang didefinisikan menurut diagram :



i) Apakah  $f$  kontinu pada  $c$  ?

ii) Apakah  $f$  kontinu pada  $d$  ?

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, make this document available to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:

i)  $\mathcal{N}(f(c)) = \{X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$ .

Maka :

Untuk  $V = \{b\} \Rightarrow f^{-1}(V) = \{a, c\} \notin \mathcal{N}(c)$ .

Karena terdapat  $V \in \mathcal{N}(f(c))$  sedemikian sehingga  $f^{-1}(V) \notin \mathcal{N}(c)$  maka  $f$  tidak kontinu pada  $c$ .

$$\text{ii)} \quad \mathcal{N}(f(d)) = \{X, \{b, c, d\}\}$$

$$\mathcal{N}(d) = \{X, \{b, c, d\}\}$$

Maka

Untuk  $V = \{b, c, d\} \Rightarrow f^{-1}(V) = \{a, b, c, d\} = X \in \mathcal{N}(d)$

$V = X \Rightarrow f^{-1}(V) = X \in \mathcal{N}(d)$ .

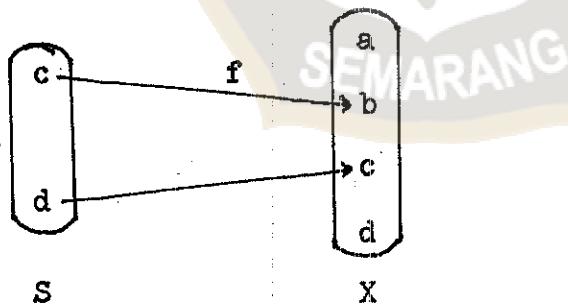
Jadi  $f$  kontinu pada  $d$ .

## 2. Sesuai contoh 3.1.1.1

Ambil  $S = \{c, d\}$ .

Maka  $\mathcal{F}_S = \{\emptyset, \{c, d\}\}$ .

$f : S \rightarrow X$  didefinisikan menurut :



i) Apakah  $f$  kontinu pada  $c$  ?

ii) Apakah  $f$  kontinu pada  $d$  ?

Penyelesaian :

i)  $\mathcal{N}(f(c)) = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}, X, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$ .

$$\mathcal{N}(c) = \{X, \{b, c, d\}\}.$$

Maka :

Untuk setiap  $V \in \mathcal{N}(f(c))$ , ambil  $U = \{b, c, d\}$ .

Selanjutnya  $c \in U \cap S \Rightarrow f(c) = b \in V$

$d \in U \cap S \Rightarrow f(d) = c \notin \{a, b\}$ .