B A B III

PEMETAAN - PEMETAAN PADA RUANG TOPOLOGI

3.1. FUNGSI KONTINU PADA RUANG TOPOLOGI

Diberikan $(X, \mathcal{T})$ dan $(Y, \mathcal{J})$ adalah dua ruang topologi.

Definisi 3.1.1.

Diberikan fungsi $f : X \longrightarrow Y$.

Fungsi f dikatakan kontinu pada $c \in X$ jika untuk setiap persekitaran V dari $f(c)$ terdapat persekitaran U dari c sedemikian sehingga $f(x) \in V$ bilamana $x \in U$.

Teorema 3.1.1.

Fungsi $f : X \longrightarrow Y$ kontinu pada $c \in X$ bila dan hanya bila $V \in \mathcal{N}_Y(f(c)) \Longrightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_X(c)$.

Bukti :

$(\Longrightarrow)$

Jika $f : X \longrightarrow Y$ kontinu pada c, dan jika $V \in \mathcal{N}_Y(f(c))$ maka menurut definisi 3.1.1, terdapat $U \in \mathcal{N}_X(c)$ sedemikian sehingga $f(x) \in V$ jika $x \in U$.

Dari sini $f^{-1}(V) \supset U$, sehingga $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_X(c)$.

$(\Longleftarrow)$

Jika untuk setiap $V \in \mathcal{N}_Y(f(c))$ maka himpunan $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_X(c)$.

Dan karena $f(x) \in V$ jika $x \in U = f^{-1}(V)$.

Menurut definisi 3.1.1, f kontinu pada c.

Jadi $f : X \longrightarrow Y$ kontinu pada $c \in X$ bila dan hanya bila $V \in \mathcal{N}_Y(f(c)) \Longrightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_X(c)$.

Teorema 3.1.2.

Ambil $S \subset X$, dan pandang ruang topologi $(S, \mathcal{T}_S)$, di

Fungsi $f : S \longrightarrow Y$ kontinu pada $c \in S$ bila dan hanya bila untuk setiap $V \in \mathcal{N}_Y(f(c))$ terdapat $U \in \mathcal{N}_X(c)$ sedemikian sehingga $x \in U \cap S \Longrightarrow f(x) \in V$.

Bukti :

$(\Longrightarrow)$

Jika $f : S \longrightarrow Y$ kontinu pada c, dan untuk setiap $V \in \mathcal{N}_Y(f(c))$ maka menurut definisi 3.1.1, terdapat $U \in \mathcal{N}_X(c)$ sedemikian sehingga $f(x) \in V$ bilamana $x \in U \cap S$

$(\Longleftarrow)$

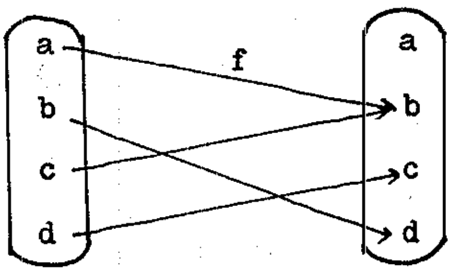
Jika untuk setiap $V \in \mathcal{N}_Y(f(c))$ terdapat $U \in \mathcal{N}_X(c)$ sedemikian sehingga $x \in U \cap S \Longrightarrow f(x) \in V$, maka menurut definisi 3.1.1, f kontinu pada c.

Jadi $f : S \longrightarrow Y$ kontinu pada $c \in S$ bila dan hanya bila untuk setiap $V \in \mathcal{N}_Y(f(c))$ terdapat $U \in \mathcal{N}_X(c)$ sedemikian sehingga $x \in U \cap S \Longrightarrow f(x) \in V$.

Contoh 3.1.1.

1. Diberikan $\mathcal{T} = \{ \emptyset , X , \{a\} , \{a,b\}, \{b\}, \{b,c,d\} \}$ suatu topologi pada $X = \{a,b,c,d\}$.

   Diberikan fungsi $f : X \longrightarrow X$ yang didefinisikan menurut diagram :



i) Apakah f kontinu pada c ?

ii) Apakah f kontinu pada d ?

Penyelesaian :

i) $\mathcal{N}(f(c)) = \{ X , \{b\} , \{a,b\} , \{b,c,d\} , \{b,c\} , \{b,d\} , \{a,b,c\} , \{a,b,d\} \}$.

Maka :

Untuk $V = \{b\} \Longrightarrow f^{-1}(V) = \{a,c\} \notin \mathcal{N}(c)$.

Karena terdapat $V \in \mathcal{N}(f(c))$ sedemikian sehingga $f^{-1}(V) \notin \mathcal{N}(c)$ maka f tidak kontinu pada c.

ii) $\mathcal{N}(f(d)) = \{X, \{b,c,d\}\}$

$\mathcal{N}(d) = \{X, \{b,c,d\}\}$

Maka

Untuk $V = \{b,c,d\} \Longrightarrow f^{-1}(V) = \{a,b,c,d\} = X \in \mathcal{N}(d)$

$V = X \Longrightarrow f^{-1}(V) = X \in \mathcal{N}(d)$.

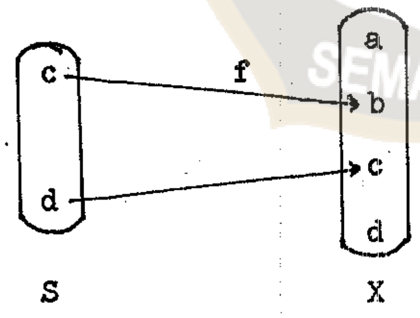
Jadi f kontinu pada d.

2. Sesuai contoh 3.1.1.1

Ambil $S = \{c,d\}$.

Maka $\mathcal{T}_S = \{\emptyset, \{c,d\}\}$.

$f : S \longrightarrow X$ didefinisikan menurut :



i) Apakah f kontinu pada c ?

ii) Apakah f kontinu pada d ?

Penyelesaian :

i) $\mathcal{N}(f(c)) = \{\{b\}, \{a,b\}, \{b,c,d\}, X, \{b,c\}, \{b,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}\}$.

$\mathcal{N}(c) = \{X, \{b,c,d\}\}$.

Maka :

Untuk setiap $V \in \mathcal{N}(f(c))$, ambil $U = \{b,c,d\}$.

Selanjutnya $c \in U \cap S \Longrightarrow f(c) = b \in V$

$d \in U \cap S \Longrightarrow f(d) = c \notin \{a,b\}$.