BUKU AJAR KALKULUS I

Penulis
Robertus Heri, S.Si, M.Si

PROYEK SP4 TAHUN 2005
JURUSAN MATEMATIKA FMIPA
UNIVERSITAS DIPONEGORO SEMARANG
2005

KATA PENGANTAR

Terima kasih kepada Tuhan atas penyertaanNya selama penyusunan sampai selesainya buku ajar ini. Pembuatan buku ajar Kalkulus I merupakan salah satu kegiatan Hibah Pengajaran tahun kedua yang didanai oleh proyek SP4. Kegiatan yang lain adalah magang perkuliahan dan kuliah wawasan, yang juga telah usai dilaksanakan.

Buku ajar ini dilengkapi dengan soal-soal yang berorientasi pada *real problem solving* yang merupakan tema kegiatan SP4. Kiranya buku ajar ini semakin melengkapi referensi Kalkulus I yang sudah ada, dan akan menjadi buku pegangan utama dalam pelaksanaan kuliah Kalkulus I.

Ucapan terima kasih juga kami sampaikan kepada

1 Ibu Dra. Dwi Ispriyanti, M.Si, Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNDIP,
2 Ibu Dra. Sunarsih, M.Si, Sekretaris Jurusan Matematika FMIPA UNDIP yang juga Ketua Program SP4,
3 Bapak Dr. Supama, M.Si, dosen Kalkulus I Jurusan Matematika FMIPA UGM sebagai pembimbing dalam magang pembuatan buku ajar Kalkulus I,
4 Ibu Drs. Sintarsih dan Ibu Dr. Widowati, M.Si, tim pengajar Kalkulus I jurusan Matematika FMIPA UNDIP,
5 Rekan-rekan dosen Jurusan Matematika FMIPA UNDIP,

yang telah memberikan kesempatan dan dukungan semangat kepada penulis untuk menambah pengetahuan dan wawasan dengan mengikuti program Hibah Pengajaran ini.

Kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan untuk kesempurnaan buku ajar ini.

Semarang, Desember 2005

Penulis.

DAFTAR ISI

Kata Pengantar ii

Daftar Isi iii

Kontrak Perkuliahan 1

Garis-garis Besar Program Pengajaran 6

1. Himpunan

1.1. Relasi Antar Himpunan 10

1.2. Operasi Antar Himpunan 11

2. Sistem Bilangan Real

2.1. Sistem Bilangan Real 16

a. Aksioma Lapangan 16

b. Komponen Bilangan Real 17

c. Aksioma Urutan 18

d. Aksioma Kelengkapan 20

e. Interval 21

f. Bentuk Aljabar 21

2.2. Pertidaksamaan 22

2.3. Nilai Mutlak 23

2.4. Petidaksamaan Dalam Nilai Mutlak 24

3. Sistem Koordinat dan Fungsi

3.1. Sistem Koordinat Kartesius 27

3.2. Sistem Koordinat Kutub 30

a. Hubungan Antara Koordinat Kartesius dan Koordinat Kutub 32

b. Menggambar Grafik dalam Koordinat Kutub 33

3.3. Fungsi 36

a. Penyajian Suatu Fungsi 37

b. Jenis Fungsi dan Grafiknya 40

c. Operasi pada Fungsi 52

d. Komposisi Fungsi 54
e. Transformasi Fungsi 56
f. Fungsi Invers 59

4. Limit dan Kekontinuan Fungsi

4.1. Konsep Limit Fungsi 63
a. Pendekatan Limit Secara Numerik 65
b. Pendekatan Limit Secara Grafik 66
c. Sifat-sifat Limit Fungsi 68
d. Limit Fungsi 70
e. Limit Fungsi Trigonometri 76
f. Limit Tak Hingga 78
4.2. Kekontinuan Fungsi 82
a. Kekontinuan Fungsi di Satu Titik 82
b. Kekontinuan Fungsi di Suatu Interval 87

5. Turunan

5.1. Masalah-masalah yang Ditafsirkan Sebagai Turunan 93
5.2. Definisi Turunan 94
5.3. Sifat-sifat Turunan 97
5.4. Tafsiran Geometris dari Turunan 99
5.5. Turunan Kiri dan Turunan Kanan 100
5.6. Diferensial 101
5.7. Aturan Rantai 104
5.8. Turunan Fungsi-fungsi 106

6. Penerapan Turunan

6.1. Titik Ekstrim Fungsi 121
6.2. Titik Belok Fungsi 131
6.3. Penggambaran Grafik Fungsi 135
6.4. Gerak Rektilinear 140
6.5. Masalah Laju yang Berkaitan 142
6.6. Bentuk Tak Tentu dan Aturan L'Hospital 145
6.7. Terapan Masalah Ekstrim 147

6.8. Penerapan di Bidang Ekonomi 150

7. Integral Tak Tentu dan Teknik Pengintegralan

7.1. Integral Tak Tentu 160

7.2. Teknik Pengintegralan 163

a. Integral Parsial 163

b. Integral Fungsi Trigonometri 164

c. Integral Substitusi Trigonometri 167

d. Integral Fungsi Rasional 169

e. Substitusi yang Merasionalkan 175

f. Strategi Pengintegralan 176

8. Integral tentu dan Penerapannya

8.1. Integral Tentu 179

8.2. Penerapan Integral Tentu 186

a. Menentukan Luas Daerah 186

b. Menentukan Volume Daerah 188

c. Menentukan Panjang Busur Suatu Kurva 192

d. Menentukan Luas Permukaan Benda Putar 195

Daftar Pustaka 200

Satuan Acara Pengajaran 201

KONTRAK PERKULIAHAN

Nama Mata Kuliah	: Kalkulus I
Kode Mata Kuliah	: MAT 103
Pengajar	: Dr. Widowati, M,Si
	Robertus Heri, M.Si
Semester	: I/2005-2006
Hari Pertemuan/Jam	: Selasa, 07.30-09.10
	Jum'at, 07.30-09.10
Tempat Pertemuan	: Ruang Kuliah E 101 & B103

1. Manfaat Mata Kuliah

Matematika sebagai ilmu dasar digunakan sebagai alat untuk pemecahan dan penyelesaian masalah kehidupan sehari-hari termasuk di dalamnya ilmu pengetahuan dan teknologi. Matematika mempunyai banyak keunggulan: bahasa dan aturannya terdefinisi dengan baik, penalarannya jelas dan sistematik, dan strukturnya sangat kuat. Dengan matematika suatu masalah nyata dapat dibuat dalam suatu model yang strukturnya jelas dan tepat

Kalkulus merupakan suatu mata kuliah dasar yang sangat perlu dikuasai dengan baik oleh setiap mahasiswa sains dan teknik, sehingga mahasiswa mempunyai pola pikir ilmiah yang kritis, logis dan sistematik, mampu merancang model matematika sederhana, serta terampil dalam teknis matematika yang baku dengan didukung oleh konsep, penalaran, rumus dan metode yang benar.

2. Deskripsi Perkuliahan

Mata kulaih ini merupakan prasyarat untuk matakuliah Kalkulus II dan kalkulus peubah banyak yang membahas sistem bilangan real, himpunan, fungsi, limit fungsi dan kekontinuan, turunan dan penerapannya, integral, teknik pengintegralan, dan penerapan integral.

Mata kuliah ini berusaha sejauh mungkin memberikan dasar-dasar teori maupun yang sangat diperlukan oleh mata kuliah lain, yang berupa definisi, teorema dan disertai contoh soal dan penyelesaian serta dilengkapi dengan latihan soal dengan tingkat kesulitan yang bertingkat.

3. Tujuan Instruksional

3.1 Umum

Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester I), mahasiswa mempunyai pemahaman konseptual yang benar tentang topik-topik utama dalam Kalkulus (limit, kekontinuan, diferensial, integral) beserta teorema dan sifat-sifat serata teknik-teknik penting didalamnya.

3.2 Khusus

Pada akhir perkuliahan diharapkan mahasiswa mampu:

1. Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 1), mahasiswa akan dapat menjelaskan definisi himpunan dan operasi-operasi antar himpunan
2. Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 4), mahasiswa akan dapat menjelaskan sistem bilangan real dan aksioma-aksioma di dalamnya, serta menyelesaikan soal-soal pertidaksamaan biasa maupun pertidaksamaan dalam harga mutlak.
3. Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 7) mahasiswa akan dapat menjelaskan perbedaan sistem koordinat kartesius dan koordinat kutub, serta menjelaskan definisi fungsi dan mengetahui jenis-jenis fungsi.
4. Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 10), mahasiswa akan dapat menjelaskan konsep yang tepat tentang limit dan kekontinuan suatu fungsi, serta hubungan limit dan kekontinuan.
5. Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 14), mahasiswa akan dapat menjelaskan pengertian turunan sebagai suatu limit fungsi, hubungan turunan dan kekontinuan, aturan rantai, turunan fungsi aljabar,turunan fungsi

invers, turunan fungsi trigonometri, turunan fungsi eksponensial, turunan fungsi siklometri., turunan fungsi hiperbolik.

6. Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 17), mahasiswa akan dapat menjelaskan penggunanaan turunan untuk menentukan nilai maksimum/minimum, kecekungan fungsi, teorema Rolle, penggambaran fungsi, bentuk tak tentu limit fungsi, masalah laju yang berkaitan, dan masalah ekstrem.
7. Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 21), mahasiswa akan dapat memahami pengertian integral tak tentu sebagai suatu anti turunan, menyelesaikan soal integral fungsi aljabar, fungsi trigonometri, fungsi eksponensial, fungsi logaritma dengan teknik integral parsial, integral sunstitusi trigonometri, integral fungsi rasional, serta menguasai startegi pengintegralan.
8. Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 25), mahasiswa akan dapat menjelaskan pengertian integral tentu, dan hubungannya dengan integral tak tentu dengan teorema dasar kalulus, serta menyelesaikan soal-soal integral tentu. Selain itu, juga mampu menggunakan integral tak tentu untuk menghitung luas daerah, menghitung volume benda putar, menghitung panjang busur suatu kurva, menghitung luas permukaan benda putar.

4. Strategi Perkuliahan

Metode perkuliahan dilakukan dengan ceramah, diskusi dan latihan soal. Lama perkuliahan 2x100 menit, masing-masing dialokasikan 50 menit untuk membahas teori pokok bahasan, 20 menit berikutnya dikusi, dan 30 menit sisanya untuk memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk mengerjakan latihan soal. Mahasiswa yang mengikuti perkuliahan sebanyak 33 mahasiswa.

5. Referensi

1. Edwin J Purcell, Dale Varberg, Calculus With Analitic Geometry, Prentice-Hall. Inc, New York, 1987
2. Frank Ayres, Calculus, Mac. Graw Hills, 1964

3. Louis Leithold, Calculus With Analytic Geometri, Harper and Row Publisher, New York
4. K.A. Stroud, Engeenering Mathematics, MacMillan Press Ltd, 1987.
5. James Stewart, Calculus, Fourth Edition, Brooks/Cole Publishing Company, 1999

6. Tugas

Tugas diberikan kepada mahasiswa setelah selesai membahas setiap poko bahasan. Tugas merupakan salah satu komponen penilaian.

7. Kriteria Penilaian.

Kriteria penilaian yg digunakan adalah :

1. Nilai A : 91-100
2. Nilai AB : 81-90
3. Nilai B : 71-80
4. Nilai BC : 61-70
5. Nilai C : 51-60
6. Nilai CD : 41-50
7. Nilai D : 31-40
8. Nilai E : <30

Dalam menentukan nilai akhir akan menggunakan pembobotan sebagai berikut

1. Tugas/Kuis : 20 %
2. Evaluasi tengah semester : 40%
3. Evaluasi akhir semester : 40 %

Bila setelah diakumulasi, total ketiga komponen penilaian tersebut masih kurang, nilai keaktifan ketika mahasiswa maju menyelesaikan soal yang diberikan, dapat ditambahkan, sehingga peluang seorang mahasiswa mendapat nilai kurang dapat diminimalisir.

8. Jadwal perkuliahan

MINGGU	MATERI PERKULIAHAN	PENGAMPU
I	Pendahuluan, Latar Belakang, Ruang Lingkup, Kompetensi Kalkulus I	Dr. Widowati, M.Si Robertus Heri, M.Si
II	Definisi Himpunan, Relasi dan Operasi Antar Himpunan	Dr. Widowati, M.Si Robertus Heri, M.Si
III-IV	Aksioma Lapangan, Komponen Bilangan	Dr. Widowati, M.Si

	Real, Aksioma Urutan, Aksioma Kelengkapan, Bentuk Umum Pertidaksamaan, Harga Mutlak, Pertidaksamaan dalam Harga Mutlak	Robertus Heri, M.Si
V-VI	Sistem Koordinat Kartesius, Sistem Koordinat Kutub, Definisi Fungsi, Jenis-jenis Fungsi, Operasi Fungsi, Fungsi Invers.	Dr. Widowati, M.Si Robertus Heri, M.Si
VII-VIII	Konsep Limit Fungsi, Definisi Limit Fungsi, Limit Fungsi Trigonometri, Limit Tak Hingga, Kekontinuan Fungsi.	Dr. Widowati, M.Si Robertus Heri, M.Si
IX	UJIAN TENGAH SEMESTER	Panitia Ujian.
IX	Kuliah Wawasan	Dr. Suryasatriya Trihandaru, M.Sc
X-XI	Masalah-masalah yang Berkaitan dengan Turunan, Definisi Turunan, Sifat-sifat Turunan, Tafsiran Geometris dari Turunan, Diferensial, Diferensiabel, Aturan Rantai, Turunan Fungsi aljabar, fungsi transenden, fungsi trigonometri, fungsi invers.	Dr. Widowati, M.Si Robertus Heri, M.Si
XII-XIII	Nilai Max/Min, Fungsi Naik/Turun, Kecekungan Fungsi, Penggambaran Grafik Fungsi, Gerak Rektilinear, Masalah Laju yang Berkaitan, Bentuk Tak tentu dan Aturan L'Hospital, Penerapan Masalah Ekstrim, Penerapan di Bidang Ekonomi	Dr. Widowati, M.Si Robertus Heri, M.Si
XIV-XV	Integral Tak tentu, Rumus Integral Tak Tentu, Teknik Pengintegralan	Dr. Widowati, M.Si Robertus Heri, M.Si
XVI	Integral Tentu, Teorema Dasar Kalkulus, Penerapan Integral Tentu.	Dr. Widowati, M.Si Robertus Heri, M.Si
XVII	UJIAN AKHIR SEMESTER	Panitia Ujian.

GARIS-GARIS BESAR PROGRAM PENGAJARAN
(GBPP)

JUDUL MATA KULIAH	: Kalkulus I
NOMOR KODE/SKS	: MAT 103 / 4 SKS
DESKRIPSI SINGKAT	: Mata kuliah ini membahas tentang sistem bilangan real, fungsi dan jenis-jenis fungsi, konsep limit dan sifat-sifat limit, turunan dan penerapannya, integral dan teknik integrasi beserta penerapan integral.
TUJUAN INSTRUKSIONAL UMUM	: Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester), mahasiswa akan mempunyai pemahaman konseptual yang benar tentang topik-topik utama dalam kalkulus (limit, diferensial, integral) beserta teorema-teorema dan sifat-sifat penting yang ada di dalamnya.

No	Tujuan Instruksional Khusus	Pokok Bahasan	Sub Pokok Bahasan	Estimasi Waktu	Daftar Pustaka
1	2	3	4	5	6
1	Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 1), mahasiswa akan dapat menjelaskan definisi himpunan dan operasi-operasi antar himpunan	Himpunan	1. Definisi himpunan 2. Relasi dan operasi antar himpunan	1 kali pertemuan (100 menit)	[1]-[5]
2	Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 4), mahasiswa akan dapat menjelaskan sistem bilangan real dan aksioma-aksioma di dalamnya, serta menyelesaikan soal-soal pertidaksamaan biasa maupun pertidaksamaan dalam harga mutlak.	Sistem Bilangan Real	1. Aksioma Lapangan. 2. Komponen Bilangan real 3. Aksioma Urutan. 4. Aksioma Kelengkapan 5. Bentuk Umum Pertidaksamaan. 6. Harga Mutlak 7. Pertidaksamaan dalam Harga Mutlak.	3 kali pertemuan (2 x 100 menit)	[1]-[5]
3	Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 7) mahasiswa akan dapat menjelaskan perbedaan sistem koordinat kartesius dan koordinat kutub, serta menjelaskan definisi fungsi dan mengetahui jenis-jenis fungsi.	Sistem Koordinat dan Fungsi	1. Sistem Koordinat Kartesius 2. Sistem Koordinat Kutub 3. Definisi Fungsi 4. Jenis-jenis Fungsi 5. Operasi pada Fungsi 6. Fungsi Invers.	3 kali pertemuan (100 menit)	[1]-[5]

4	Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 10), mahasiswa akan dapat menjelaskan konsep yang tepat tentang limit dan kekontinuan suatu fungsi, serta hubungan limit dan kekontinuan.	Limit dan Kekontinuan Fungsi	1. Konsep Limit Fungsi 2. Definisi Limit Fungsi 3. Limit Fungsi Trigonometri 4. Limit Tak Hingga. 5. Kekontinuan Fungsi	32 kali pertemuan (2 x 100 menit)	[1]-[5]
5	Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 14), mahasiswa akan dapat menjelaskan pengertian turunan sebagai suatu limit fungsi, hubungan turunan dan kekontinuan, aturan rantai, turunan fungsi aljabar,turunan fungsi invers, turunan fungsi trigonometri, turunan fungsi eksponensial, turunan fungsi siklometri., turunan fungsi hiperbolik.	Turunan	1. Penjelasan Masalah-masalah yang Berkaitan dengan Turunan. 2. Definisi Turunan 3. Sifat-sifat Terunan 4. Tafsiran Geometris dari Turunan 5. Diferensial 6. Diferensiabel 7. Aturan Rantai 8. Turunan Fungsi	4 kali pertemuan (4 x 100 menit)	[1]-[5]
6	Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 17), mahasiswa akan dapat menjelaskan penggunanaan turunan untuk menentukan nilai maksimum/minimum, kecekungan fungsi, teorema Rolle, penggambaran fungsi, bentuk tak tentu limit fungsi, masalah laju yang berkaitan, dan masalah ekstrem	Penerapan Turunan	1. Nilai Max/Min 2. Fungsi Naik/Turun 3. Kecekungan Fungsi 4. Penggambaran Grafik Fungsi 5. Gerak Rektilinear 6. Masalah Laju yang Berkaitan 7. Bentuk Tak Tentu dan Aturan L'Hospital 8. Penerapan Masalah Ekstrim 9. Penerapan di Bidang Ekonomi	3 kali pertemuan (100 menit)	[1]-[5]
7	Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 21), mahasiswa akan dapat memahami pengertian integral tak tentu sebagai suatu anti turunan, menyelesaikan soal integral fungsi aljabar, fungsi trigonometri, fungsi eksponensial, fungsi logaritma dengan teknik integral parsial, integral sunstitusi trigonometri, integral	Integral tak Tentu dan Teknik Pengintegralan	1. Integral Tak Tentu 2. Rumus Integral Tak Tentu 3. Integral Parsial 4. Integral Fungsi Trigonometri 5. Integral Substitusi Trigonometri 6. Integral Fungsi Rasional 7. Substitusi yang	4 kali pertemuan (3 x 100 menit)	[1]-[5]

	fungsi rasional, serta menguasai startegi pengintegralan.		Merasionalkan.		
8	Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 25), mahasiswa akan dapat menjelaskan pengertian integral tentu, dan hubungannya dengan integral tak tentu dengan teorema dasar kalulus, serta menyelesaikan soal-soal integral tentu. Selain itu, juga mampu menggunakan integral tak tentu untuk menghitung luas daerah, menghitung volume benda putar, menghitung panjang busur suatu kurva, menghitung luas permukaan benda putar.	Integral Tentu dan Penerapannya	1. Integral Tentu 2. Teorema Dasar Kalkulus 3. Penggunaan Integral tentu untuk Menentukan Luas Daerah 4. Penggunaan Integral tentu untuk Menentukan Volume Daerah 5. Penggunaan Integral tentu untuk Menentukan Panjang Busur 6. Penggunaan Integral tentu untuk Menentukan Luas Volume Benda Putar.	4 kali pertemuan (2 x 100 menit)	[1]-[5]

Daftar Pustaka:

1. Edwin J Purcell, Dale Varberg, Calculus With Analitic Geometry, Prentice-Hall. Inc, New York, 1987
2. Frank Ayres, Calculus, Mac. Graw Hills, 1964
3. Louis Leithold, Calculus With Analytic Geometri, Harper and Row Publisher, New York
4. K.A. Stroud, Engeenering Mathematics, MacMillan Press Ltd, 1987.
5. James Stewart, Calculus, Fourth Edition, Brooks/Cole Publishing Company, 1999

TUJUAN INSTRUKSIONAL

Umum

Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester I), mahasiswa mempunyai pemahaman konseptual yang benar tentang topik-topik utama dalam Kalkulus (limit, kekontinuan, diferensial, integral) beserta teorema dan sifat-sifat serata teknik-teknik penting didalamnya.

Khusus

Pada akhir perkuliahan ini (pada akhir pertemuan ke 1), mahasiswa akan dapat menjelaskan definisi himpunan dan operasi-operasi antar himpunan

1. HIMPUNAN

Sebelum memulai pembahasan bilangan real, akan dibahas terlebih dahulu pengertian himpunan.

Himpunan adalah kumpulan obyek yang memenuhi sifat-sifat tertentu. Obyek dari himpunan S disebut elemen atau anggota dari S dan dilambangkan dengan $\in$. Himpunan yang tidak mempunyai elemen disebut himpunan kosong atau *null set*, disimbolkan dengan $\varnothing$.

Jika a adalah elemen dari himpunan S, ditulis $a \in S$ dan dibaca "a elemen S" atau "a di dalam S". Sedangkan untuk menyatakan bahwa a bukan elemen S ditulis $a \notin S$ dan dibaca "a bukan elemen S" atau "a bukan di dalam S"..

Suatu himpunan dapat disajikan dalam dua cara yang berbeda. Sebagai contoh, misalnya himpunan A mempunyai elemen 0,1,2,3,4,5. Penyajian pertama untuk A adalah A={0,1,2,3,4,5} dan dibaca "A adalah himpunan yang memuat elemen 0,1,2,3,4,5". Penyajian yang lain adalah A={x/x adalah bilangan bulat non negatif yang kurang dari 6} dan dibaca "A adalah himpunan semua x dimana x adalah bilangan bulat non negatif yang kurang dari 6".

Sekarang perhatikan himpunan C={2,3} dan D={2,3,5} dimana setiap elemen C juga di dalam D. Ketika elemen-elemen himpunan C juga merupakan elemen himpunan D, dikatakan bahwa C himpunan bagian (subset) D dan dinotasikan dengan $C \subseteq D$. Himpunan dari semua himpunan bagian dari suatu himpunan disebut himpunan kuasa. Himpunan kuasa dari D adalah $\{\varnothing, \{2\},\{3\},\{5\},\{2,3\}, \{2,5\},\{3,5\},\{2,3,5\}\}$. Perhatikan bahwa himpunan kosong ($\varnothing$) merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan.

1.1 Relasi Antar Himpunan

Relasi yang mungkin terjadi antara dua himpunan adalah:

- **Berpotongan**

  Dua himpunan A dan B dikatakan berpotongan bila antara himpunan A dan B terdapat elemen yang sama.

- **Saling Lepas**

  Himpunan A dan B dikatakan saling lepas jika antara himpunan A dan B tidak terdapat elemen yang sama

- **Sama**

  Dua himpunan A dan B dikatakan sama bila elemen himpunan A sama dengan elemen himpunan B

- **Ekivalen**

  Dua himpunan A dan B dikatakan ekivalen bila himpunan A dan B mempunyai elemen yang sama banyak, tapi elemen-elemen itu tidak sama.

1.2 Operasi Antar Himpunan

- **Irisan dari Dua Himpunan (Intersection)**

  Irisan (*intersection*) dari A dan B, dan dinotasikan dengan $A \cup B$ adalah himpunan yang anggotanya elemen-elemen himpunan A dan B

  Penyajian dalam notasi matematik adalah sebagai berikut

  $$\mathbf{x \varepsilon A \cup B \Leftrightarrow x \varepsilon A \text{ dan } x \varepsilon B}$$

- **Gabungan Dua Himpunan (Union)**

  Gabungan (*Union*) himpunan A dan B, dinotasikan dengan $A \cap B$ adalah himpunan yang anggotanya elemen anggota A atau B

  Penyajian dalam notasi matematik adalah sebagai berikut

  $$\mathbf{x \varepsilon A \cap B \Leftrightarrow x \varepsilon A \text{ atau } x \varepsilon B}$$

- **Selisih Dua Himpunan**

  Selisih dua himpunan A dan B dinotasikan dengan A-B adalah himpunan yang anggota-anggotanya merupakan anggota himpunan A tapi bukan merupakan anggota himpunan B

  Penyajian dalam notasi matematika adalah sebagai berikut

  $$\mathbf{x \varepsilon A - B \Leftrightarrow x \varepsilon A \text{ dan } x \not\varepsilon B}$$

- **Komplemen**

Komplemen dari himpunan A didefinisikan sebagai himpunan selain himpunan A tapi masih dalam semesta pembicaraan. Komplemen A ditulis A^c. Penyajian dalam notasi matematika adalah sebagai berikut

$$A^c=\{x/x\notin A,\ x\in S\}$$

Soal-soal latihan

1. Jika $D = \{0,4,7\}$ kita katakan $7 \in D$ dan $\{7\} \subseteq D$, tetapi bukanlah $7 \subseteq D$.

   Tentukan mana yang benar diantara pernyataan berikut:

   a. $4 \in D$ c. $\phi \in D$ f. $0 \in D$ h. $4 \in \{4\}$

   b. $4 \subseteq D$ d. $\phi \subseteq D$ g. $0 \subseteq D$ i. $0 \neq \phi$

2. Misalkan himpunan semesta S ={x |x bilangan ganjil positif} tentukan A^c bila

   a. $A = \{1\}$ c. $A = \phi$

   b. $A = \{1,3,5,7\}$ d. $A = S$

3. Misalkan $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4,6\}$, $C = \{3,4,5\}$ tentukanlah:

   a. $A \cup B$ b. $A \cup C$ c. $C \cup D$ d. $A \cup B \cup C$ e. $A \cap B \cup C$

   f. $A \cap B$ g. $A \cap C$ h. $C \cap D$ i. $A \cup B \cap C$ j. $A \cap B \cup C$

4. Diketahui $S = \{0,1,2,3,\ldots,8,9\}$, $A = \{0,1,2,4,8\}$, $B = \{0,3,5,7\}$ tentukanlah:

   a. $(S-A)\cap(S-B)$ b. $(S-A)\cup(S-B)$

   c. $A\cup(S-A)$ d. $A\cap(S-A)$

5. Tentukanlah syarat agar operasi antar himpunan A dan B ini dipenuhi :

   a. $A \cap B = \phi$ b. $A \cap B = U$ c. $A \cup B = U$

   d. $A \cup B = \phi$ e. $A \cap B = A$ f. $A \cup B = A$

   g. $A \cap \phi = \phi$ h. $A \cap U = A$ i. $A \cup U = U$

   j. $A \cup U = A$ k. $A \cup \phi = U$ l. $A \cup \phi = \phi$

dimana U himpunan semesta.

6. Buktikanlah :

   a. $(A \cap B) \cap B^c = \phi$

   b. $\left[P^C \cup (P \cap Q)\right]^C = P \cap Q^C$

   c. $(A \cap B) \cup (A \cap B^C) = A$

7. Dalam suatu survey pemakaian sabun cuci pada 1.000 rumah tangga diperoleh data sebagai berikut :

   550 rumah tangga memakai sabun detergen A

   480 rumah tangga memakai sabun cuci cap B

   600 rumah tangga memakai sabun detergen C

   250 rumah tangga memakai sabun detergen A dan sabun cuci cap B

   380 rumah tangga memakai sabun detergen C dan sabun detergen A

   110 rumah tangga memakai sabun detergen C dan sabun cuci cap B

   Berapa rumah yang memakai ketiga macam sabun tersebut (A,B,C)

8. Dalam pertemuan 60 orang mahasiswa suatu universitas disediakan minuman merk A dan B, setelah diadakan pencatatan ternyata :

   30 orang minum A

   25 orang minum B

   15 orang minum A dan B

   Buatlah diagram *Venn* dan hitunglah:

   a. Berapa orang yang tidak minum apa-apa

   b. Berapa orang yang minum A saja

   c. Berapa orang yang minum B saja

9. Dari hasil wawancara di suatu daerah duiperoleh data mengenai prosentase pembaca majalah X,Y,Z sebagai berikut:

   50% membaca majalah X

   50% membaca majalah Y

   70% membaca majalah Z

   40% membaca majalah X dan Z

   30% membaca majalah Y dan Z

   20% membaca majalah X dan Y

   10% membaca majalah ketiga-tiganya

   Pertanyaan:

   a. Berapa persen yang membaca tepat dua majalah

   b. Berapa persen yang tidak membaca salah satupun dari ketiga majalah tersebut.

TUJUAN INSTRUKSIONAL

Umum

Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester I), mahasiswa mempunyai pemahaman konseptual yang benar tentang topik-topik utama dalam Kalkulus (limit, kekontinuan, diferensial, integral) beserta teorema dan sifat-sifat serata teknik-teknik penting didalamnya.

Khusus

Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 4), mahasiswa akan dapat menjelaskan sistem bilangan real dan aksioma-aksioma di dalamnya, serta menyelesaikan soal-soal pertidaksamaan biasa maupun pertidaksamaan dalam harga mutlak.

2. SISTEM BILANGAN REAL

2.1 Sistem Bilangan Real

Sistem bilangan real R adalah himpunan bilangan real yang disertai dengan operasi penjumlahan dan perkalian, sehingga memenuhi aksioma tertentu. Terdapat tiga aksioma dalam sistem bilangan real, yaitu:

a. Aksioma Lapangan
b. Aksioma Urutan.
c. Aksioma Kelengkapan.

a. Aksioma Lapangan

Operasi penjumlahan dan perkalian yang berlaku pada R memenuhi aksioma:

- Jika a, b ε R, maka a+b ε R dan ab ε R (Tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian).
- Jika a,b ε R, maka a+b=b+a dan ab=ba (Komutatif terhadap penjumlahan dan perkalian)
- Jika a, b, c ε R maka (a+b)+c=a+(b+c) dan (ab)c=a(bc) (asosiatif terhadap penjumlahan dan perkalian)
- Terdapat 0 dan 1 yang merupakan ε R, sehingga a+0=a dan a.1=a untuk setiap a ε R.
- Jika a ε R terdapat –a ε R sehingga a+(-a) =0 (Terdapat unsur invers terhadap penjumlahan)
- Jika a ε R dan a≠0, terdapat a^{-1} ε R sehingga a a^{-1}=1 (Terdapat unsur invers terhadap perkalian)
- Jika a,b,c ε R, maka a(b+c) =ab+ac (Distributif)

Teorema 2.1

- Jika a=b maka a+c=b+c dan ab=ac
- Jika a+c=b+c maka b=c
- Jika ab=ac, a≠0 maka b=c

- $a(b-c)=ab-ac$
- $-(-a)=a$ dan untuk $a\neq 0$, $(a^{-1})^{-1}=a$.
- $a.0=0.a=0$, $a(-b)=-a(b)=-ab$, $(-a)(-b)=ab$.
- Jika $ab=0$ maka $a=0$ atau $b=0$
- $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc,\ b \neq 0, d \neq 0$

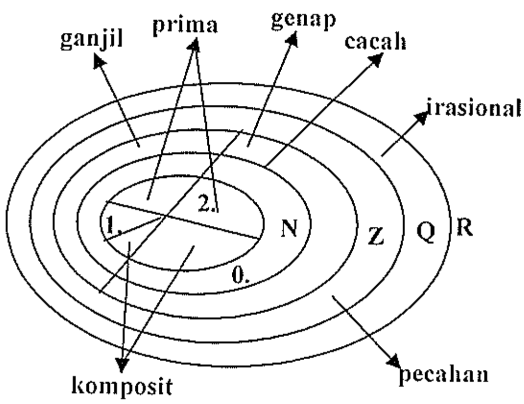
b. Komponen Bilangan Real

Berikut ini disajikan himpunan-himpunan penting dari bilangan

- Himpunan bilangan asli: {1,2,3,...} digunakan untuk menghitung banyaknya obyek suatu himpunan. Dinotasikan dengan N={1,2,3,...}
- Himpunan bilangan prima: {2,3,5,7,...} yaitu himpunan bilangan yang hanya mempunyai dua faktor, yaitu 1 dan dirinya sendiri.
- Himpunan bilangan komposit: {4,6,8,9,...} yaitu himpunan bilangan asli yang mempunyai lebih dari dua faktor.
- Himpunan bilangan cacah: {0,1,2,3,...} yaitu himpunan bilangan asli beserta angka nol.
- Himpunan bilangan bulat: Z={...,-2,-1,0,1,2,...}. Himpunan bilangan cacah disebut juga dengan himpunan bilangan bulat non negatif.
- Himpunan bilangan genap: {...,-4,-2,0,2,4,...} yaitu himpunan bilangan bulat kelipatan dua
- Himpunan bilangan ganjil: {...,-3,-1,1,3,...} yaitu himpunan bilangan bulat bukan kelipatan dua.
- Himpunan bilangan rasional: Q={x/x=$\frac{a}{b}$, a dan b adalah bilangan bulat dengan $b\neq 0$} Jika a habis dibagi b maka disebut bilangan bulat dan bila a tidak habis dibagi b disebut bilangan pecahan. Bilangan rasional selalu mempunyai bentuk desimal yang berulang (*repeating*) atau bentuk desimal yang berakhir (*terminating*).
- Himpunan bilangan irasional, yaitu himpunan bilangan yang anggotanya bukan bilangan rasional, bukan hasil bagi antara bilangan bulat dan bilangan asli.

- $\sqrt{2}$ yang merupakan panjang sisi miring dari segitiga siku-siku dengan sisi siku-sikunya masing-masing 1, dan π yang merupakan perbandingan dari keliling lingkaran dan panjang diameternya adalah contoh bilangan irasional.
- Himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan irasional bergabung membentuk himpunan bilangan real R.

Himpunan bilangan real dan komponen-komponennya dapat juga disajikan dengan diagram berikut:



Keterangan
R: bilangan asli
Q: bilangan rasional
Z: bilangan bulat
N: bilangan asli

c. **Aksioma Urutan**

Berdasarkan aksioma ini bilangan real dapat diurutkan dari kecil ke besar. Aksioma ini juga merupakan dasar untuk menyelesaikan suatu pertidaksamaan.

Pada R terdapat himpunan bagian yang disebut bilangan positif, yang memenuhi aksioma:

- Jika a $\in$ R, maka a=0, atau a positif atau –a positif
- Jumlah dan hasil kali dua bilangan positif adalah bilangan positif.

Definisi 2.1

Misalkan a dan b bilangan real

- Bilangan a dikatakan lebih besar dari b ditulis a>b
- Bilangan a dikatakan lebih kecil dari b ditulis a<b
- a≤b jika a<b atau a=b, dan a≥b jiak a>b atau a=b.
- Pernyataan yang dihubungkan dengan >,<,≥,≤, disebut pertidaksamaan.

- Bilangan real a dikatakan negatif jika $-a$ positif.

Teorema 2.2

Misalkan a,b,c dan d bilangan real, maka:

a. $a < b$ dan $b < c \Rightarrow a < c$ (transitif)

b. $a < b$ dan c sembarang $\Rightarrow a + c < b + c$

c. $a < b$ dan $c < d \Rightarrow a + c < b + d$

d. $a < b$ dan $c > 0 \Rightarrow ac < bc$

e. $a < b$ dan $c < 0 \Rightarrow ac > bc$

f. $0 < a < b$ dan $0 < c < d \Rightarrow ac < bd$

g. $0 < a < b$ atau $a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Selain bilangan nol, positif dan negatif terdapat juga bentuk akar, yaitu bilangan yang berbentuk $\sqrt[n]{*}$, n=1,2,3,... yang hasilnya bukan bilangan rasional.
Bilangan berbentuk akar didefinisikan sebagai berikut

Definisi 2.2

- Akar kuadrat dari bilangan positif a ($\sqrt{a}$) didefinisikan sebagai bilangan positif x yang memenuhi $x^2=a$
- $\sqrt[n]{a}$ dengan n genap positif didefinisikan sebagai bilangan positif x yang memenuhi $x^n=a$
- Akar kubik dari bilangan positif a ($\sqrt[3]{a}$) didefinisikan sebagai bilangan real x yang memenuhi $x^3=a$
- $\sqrt[n]{a}$ dengan n ganjil positif didefinisikan sebagai bilangan real x yang memenuhi $x^n=a$

Contoh

- $\sqrt{9}$ bukan merupakan bentuk akar karena hasil $\sqrt{9}$ adalah bilangan rasional dan menurut definisi $\sqrt{9}=3$

- Sesuai definisi $\sqrt[3]{-125} = -5$, karena -5 adalah bilangan real yang memenuhi $(-5)^3=-125$

d. Aksioma Kelengkapan

Aksioma ini menyatakan bahwa, setiap himpunan bagian tak kosong R yang terbatas di atas selalu mempunyai batas atas terkecil , dan setiap himpunan bagian tak kosong R yang terbatas di bawah selalu mempunyai batas atas terbesar.

Definisi 3

- Himpunan tidak kosong $S\subseteq$, dikatakan terbatas di atas, bila terdapat bilangan real b sehingga $x\leq b$, untuk setiap $x\in S$.

  Sebaliknya dikatakan terbatas di bawah, bila terdapat bilangan real a sehingga $x\geq a$, untuk setiap $x\in S$
- Bilangan real b disebut batas atas terkecil (supremum) dari himpunan tidak kosong $S\subseteq$ dan ditulis b=supS, bila b adalah batas atas S, dan batas atas yang lain lebih besar atau sama dengan b.

  Sebaliknya, bilangan real a disebut batas bawah terbesar (infimum) dari himpunan tidak kosong $S\subseteq$ dan ditulis b=infS, bila b adalah batas bawah S, dan batas atas yang lain lebih kecil atau sama dengan a.

Aksioma inilah yang membedakan bilangan real dan bilangan rasional. Perhatikan contoh berikut ini.

Pendekatan $\sqrt{5}$ disajikan oleh himpunan berikut

A={2,2; 2,23; 2,236; 2,236; 2,23607; 2,236079; 2,2360797;...}

Himpunan A ini terbatas di atas oleh bilangan $\sqrt{5}$; 2,5; 3; 3;... Batas atas terkecilnya adalah $\sqrt{5}$. Bila semesta pembicaraannya adalah bilangan rasional, berarti A tidak mempunyai batas atas terkecil. Mengapa?. Karena $\sqrt{5}$ bilangan irasional.

Apa artinya?. Bahwa bila semesta pembicaraannya adalah bilangan rasional, batas atas terkecil tidak selalu ada, sedangkan bila semesta pembicaraannya bilangan real, batas atas terkecilnya pasti ada. Pada contoh A, bila semesta pembicaraannya bilangan real, batas atas terkecilnya adalah $\sqrt{5}$, karena bilangan irasional termasuk bilangan real.

e. Interval

Interval (selang) didefinisikan sebagai himpunan bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan tertentu. Ada dua macam interval, yaitu interval hingga dan tak hingga. Interval hingga adalah himpunan bagian dari   yang terbatas di bawah atau di atas. Sedangkan interval tak hingga tidak terbatas di atas atau di bawah.

Interval hingga	Interval tak hingga
$(a,b)=\{x\in \ /a<x<b\}$	$(a,\infty)=\{x\in \ / x>a\}$
$(a,b]=\{x\in \ /a<x\leq b\}$	$(-\infty,b)=\{x\in \ / x<b\}$
$[a,b)=\{x\in \ /a\leq x<b\}$	$[a,\infty)=\{x\in \ / x\geq a\}$
$[a,b]=\{x\in \ /a\leq x\leq b\}$	$(-\infty,b]=\{x\in \ / x\leq b\}$
	$(-\infty,\infty)=$

f. Bentuk Aljabar

Bentuk aljabar adalah suatu bentuk yang diperoleh dengan sejumlah hingga operasi aljabar atas peubah, konstanta dan parameter.

- Peubah (variable) adalah notasi yang mewakili suatu unsur dalam suatu himpunan.
- Konstanta adalah adalah notasi yang mewakili suatu unsur dalam himpunan berunsur satu.
- Parameter adalah notasi yang mewakili unsur dalam himpunan konstanta.

Misalkan diketahui bentuk aljabar x^3-4x+c, maka x disebut peubah, -4 disebut konstanta, dan c disebut parameter (bila c adalah unsur dari suatu himpunan) atau dapat pula disebut konstanta (bila c adalah bilangan tertentu).

Latihan

1. Ubahlah bilangan desimal berikut dalam bentuk pecahan
   a. 27,27272727...
   b. 0,329999999...

c. 17,153153153...

2. Bila pernyataan berikut benar, berikan argumentasinya. Bila salah berikan alasan penyangkalannya
   a. Jika $x=2$ maka $x^2=4$
   b. Jika $x^2=4$ maka $x=2$
   c. Jika $x<2$ maka $x^2<4$
   d. Jika $x>2$ maka $x^2>4$
   e. Jika $x^2<4$maka $x<2$
   f. Jika $x^2>4$maka $x>2$
   g. Jika $-2<x\leq 1$ maka $0\leq x^2<4$
3. Mana langkah dari rangkaian proses pengerjaan berikut yang salah
   a. $x=4$... (1)

      $x^2=16$... (2)

      $x^2-4x=16-4x$... (3)

      $x(x-4)=-4(x-4)$... (4)

      $x=-4$... (5)

      $4=-4$... (6)
   b. $0=0+0+0+0+$... (1)

      $0=(2-2)+(2-2)+(2-2)+$... (2)

      $0=2+(-2+2)+(-2+2)+(-2+2)+$... (3)

      $0=2+0+0+0+$... (4)

      $0=2$... (5)

2.2 Pertidaksamaan

Bentuk umum pertidaksamaan satu peubah real adalah $\frac{A(x)}{B(x)} < \frac{C(x)}{D(x)}$, dengan A, B, C, D keempatnya adalah suku banyak dalam x (tanda < dapat berubah >, ≤, atau ≥).

Solusi dari suatu pertidaksamaan adalah suatu interval dalam x.

Langkah penyelesaian suatu pertidaksamaan.:

1. Ubah bentuk pertidaksamaan semula menjadi $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$

2. Uraikan P(x) dan Q(x) menjadi faktor-faktor linearnya
3. Tentukan tanda pertidaksamaan pada garis bilangan
4. Tentukan solusinya dalam bentuk interval.

Contoh

Tentukan solusi pertidaksamaan berikut:

a. $2 \le x^2 - x \le 6$

b. $x - \frac{6}{x} \le 1$

c. $\frac{x+1}{x-2} \le \frac{x}{x+3}$

d. $\frac{x-2}{x^2} \le \frac{x+1}{x+3}$

2.3 Nilai Mutlak

Nilai mutlak x, ditulis $|x|$ didefinisikan dengan $|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Interpretasi yang lain terhadap $|x|$ adalah

- $|x| = \text{maksimum}\{-x, x\}$
- $|x| = \sqrt{x^2}$
- $|x| =$ jarak antara titik x dan 0

  $|x - c| =$ jarak antara titik x dan c

Sifat Nilai Mutlak

Untuk setiap bilangan real x berlaku

i. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii. $|x| \ge 0$

iii. Jika $a > 0$, maka

a. $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a \Leftrightarrow x^2 \le a^2$

b. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ atau $x \leq -a \Leftrightarrow x^2 \geq a^2$

iv. Ketaksamaan segitiga

a. $|x+y| \leq |x|+|y|$

b. $|x-y| \leq |x|+|y|$

c. $|x|-|y| \leq |x-y|$

d. $||x|-|y|| \leq |x-y|$

v. Untuk setiap bilangan real x dan y berlaku

a. $|xy| = |x||y|$

b. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$

Contoh

Selesaiakan setiap soal berikut

1. Menurut definisi tuliskan bentuk berikut tanpa notasi harga mutlak

a. $|3x+2|$

b. $2|x|+|x-1|$

c. $|2|x-1|+x|$

2. $\sqrt{x^2-4x+4} = 2-x$

2.4 Pertidaksamaan Dalam Nilai Mutlak

Penyelesaian pertidaksamaan dalam harga mutlak adalah dengan menggunakan definisi harga mutlak, mengubah pertidaksamaan, sedemikian sehingga notasi harga mutlak tidak ada lagi dalam pertidaksamaan tersebut.

Misalkan untuk menentukan solusi dari $|3x-2| > 1$, $|x^2-x| \leq 2$ dapat digunakan sifat harga mutlak iii (a) atau iii (b).

Jika diketahui soal $2|x|+|x-1|\leq 2$ (pertidaksamaan yang memuat lebih dari satu harga mutlak), maka solusinya dapat dicari dengan menggunakan definisi harga mutlak, dan menerapkannya pada garis bilangan.

Contoh

Tentukan solusi dari pertidaksamaan berikut

1. $x|x|\leq|x-2|$
2. $|2x-3|\leq|x+2|$
3. $2\leq\left|x^2-x\right|\leq 6$
4. $3|x|\leq|x-1|+5$
5. $2(x-1)^2-|x-1|\leq 1$

TUJUAN INSTRUKSIONAL

Umum

Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester I), mahasiswa mempunyai pemahaman konseptual yang benar tentang topik-topik utama dalam Kalkulus (limit, kekontinuan, diferensial, integral) beserta teorema dan sifat-sifat serata teknik-teknik penting didalamnya.

Khusus

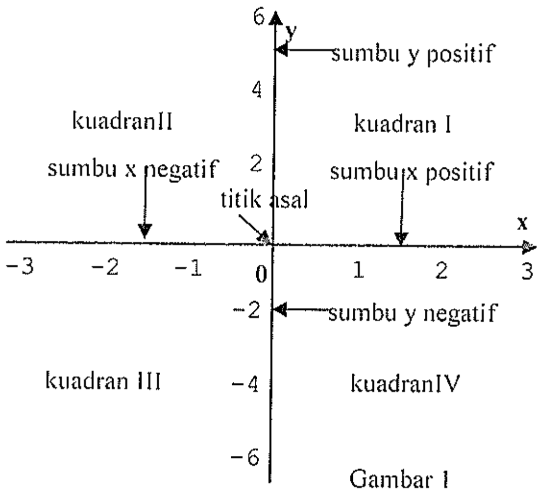
Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 7) mahasiswa akan dapat menjelaskan perbedaan sistem koordinat kartesius dan koordinat kutub, serta menjelaskan definisi fungsi dan mengetahui jenis-jenis fungsi.

3. SISTEM KOORDINAT DAN FUNGSI

3.1 Sistem Koordinat Kartesius

Sembarang titik pada bidang diukur terhadap dua garis lurus yang saling tegak lurus yang keduanya beririsan di satu titik 0 (Gambar 3.1). Kedua garis lurus ini disebut sumbu koordinat. Garis mendatar disebut sumbu horisontal (sumbu x) dan setiap titik yang ada padanya dinotasikan dengan x, dimana semakin ke kanan semakin bertambah besar. Garis tegak disebut sumbu vertikal (sumbu y) dan setiap titik yang ada padanya dinotasikan dengan , dimana semakin ke atas semakin besar. Titik dimana x dan y keduanya 0 disebut titik asal dan dinotasikan dengan O.

Jika P adalah sembarang titik pada bidang, maka melalui titik P dapat dibuat garis yang tegal lurus dengan sumbu koordinat. Misalkan garis memotong sumbu x di titik a, dan memotong sumbu y di titik b, maka a disebut koordinat x dan y disebut koordinat y. Pasangan (a,b) disebut pasangan koordinat. Koordinat x di setiap titik pada sumbu y selalu 0, demikian juga koordinat y di setiap titik pada sumbu x selalu 0. Koordinat titik asal adalah (0,0).



Gambar 1

Titik asal membagi sumbu x menjadi sumbu x positif di sisi kanan dan sumbu x negatif di sisi kiri. Titik tersebut juga membagi sumbu y menjadi sumbu y positif di sebelah atas dan sumbu y negatif di sebelah bawah. Sumbu koordinat membagi bidang menjadi empat bagian yang disebut kuadran yang arahnya berlawanan dengan arah jarum jam.

a. Jarak antara dua titik pada bidang

Misalkan diketahui $P(x_1,y_1)$ dan $Q(x_2,y_2)$, maka jarak anata P dan Q adalah

$$d = |PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Contoh

Jarak antara A(2,4) dan B(-1,6), maka $|AB| = \sqrt{(-1-2)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

b. Garis Lurus

Bentuk umum persamaan garis lurus $ax + by + c = 0$, dengan a dan b tidak semuanya nol. Dari bentuk umum ini:

- bila garis sejajar sumbu y, persamaannya x=a
- bila garis sejajar sumbu x, persamaannya y=b
- bila garis tidak sejajar salah satu sumbu, persamaannya y=mx+c.
- bila garis melalui (0,0), persamaannya ax+by=0
- bila garis melalui (x_1,y_1) dan bergradien m, persamaannya $y-y_1=m(x-x_1)$
- bila garis melalui (x_1,y_1) dan (x_2,y_2), persamaannya $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$

Misalkan terdapat dua garis k: ax+by+c=0 dan garis l: px+qy+r=0, maka

- k dan l sejajar (k//l), jika $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$ dan berimpit $(k \equiv l)$, jika $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$
- k dan l berpotongan, jika $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$ dan berpotongan tegak lurus, jika $\frac{a}{p} = -\frac{b}{q}$

Persamaan umum garis lurus adalah ax+by+c=0, atau y=mx+d, dengan $m = -\frac{a}{b}$ dan $d = -\frac{c}{b}$. Besaran m disebut gradien garis yang menyatakan tangen sudut antara garis dengan sumbu x positif.

c. Jarak titik ke garis.

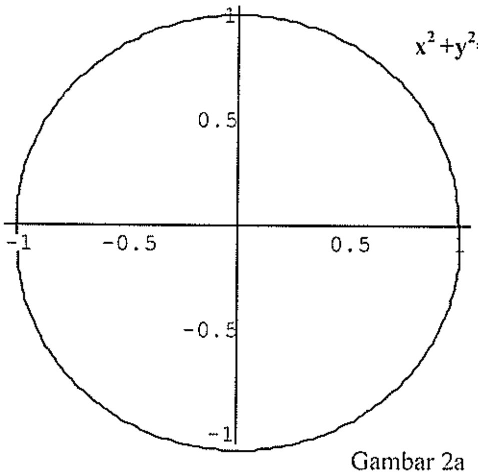
Jarak dari titik $A(x_0,y_0)$ ke garis dengan persamaan k: ax+by+c=0, adalah

$$d(A,k) = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

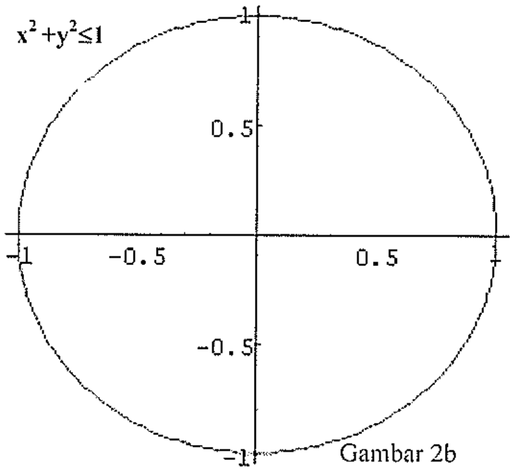
d. Grafik

Grafik dari sebuah persamaan atau pertidaksamaan yang memuat peubah x dan y adalah himpunan semua titik P(x,y) yang koordinatnya memenuhi persamaan atau pertidaksamaan itu.

Gambar 3.2a merupakan grafik keliling lingkaran, dimana setiap titiknya memenuhi persamaan lingkaran $x^2+y^2=1$, sedangkan gambar 3.2b menyatakan grafik luas lingkaran, dimana setiap titiknya memenuhi persamaan $x^2+y^2\leq 1$



Gambar 2a



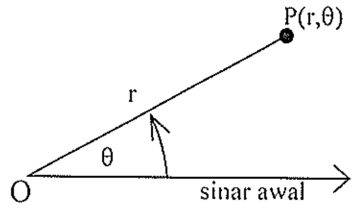
Gambar 2b

Latihan

1. Tentukan persamaan garis yang gradiennya -1/3 dan melalui titik potong garis y=x dan garis y=6-2x.
2. Tentukan persamaan garis yang membuat sudut $^{5\pi}/_6$ dengan sumbu x positif dan berjarak 2 satuan dari titik (0,0)
3. Bila diketahui titik A(1,2), B(3,-4), C(-2,0), tentukan
   a. persamaan garis g melalui A dan sejajar BC
   b. persamaan garis melalui titik tengah AB dan tegak lurus g
   c. jarak dari A ke garis BC
   d. luas segitiga ABC
4. Gambarkan grafik
   a. $y-1\leq x\leq y+1$
   b. $y=\left|1-|x|\right|$
   c. $y\leq |x|$
   d. $|y|<2|x|$

3.2 Sistem Koordinat Kutub

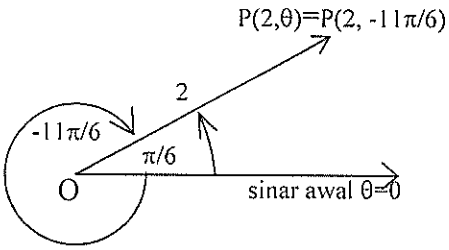
Dalam mendefinisikan koordinat polar, pertama ditetapkan terlebih dulu titik asal O yang disebut pole, dan sinar awal dari O.



Gambar 3

Setiap titik P dalam koordinat polar ditulis P(r,θ). dimana r menyatakan jarak berarah dari O ke P, dan θ menyatakan sudut berarah dari sinar awal ke sinar OP, yang arah positifnya, berlawanan arah dengan arah jarum jam

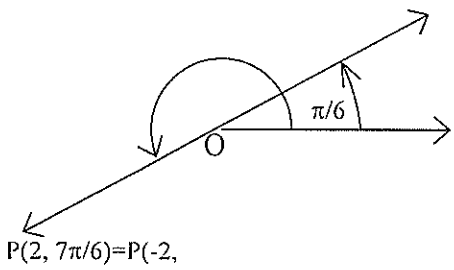
Seperti halnya pada trigonometri, sudut yang menyatakan posisi suatu titik tidaklah tunggal. Perhatikan contoh berikut



Gambar 4

Misalkan titik P yang berjarak 2 satuan dari O dengan posisi sinar $\theta=\pi/6$ dan ditulis P(2, $\pi/6$), dapat juga ditulis P(2,-11π/6). Posisi sinar $\pi/6$ dan $-11\pi/6$ sama saja, bedanya kalau $-11\pi/6$ diukur dari $\theta=0$ dengan arah searah jarum jam, jadi bertanda negatif. (Gambar 3.4)

Meskipun r menyatakan suatu jarak, namun jarak tersebut adalah jarak yang berarah, sehingga r bisa saja negatif, bila arah sinarnya berlawanan (berbeda 180^0), denga arah mula-mula.



Gambar 5

Perhatikan Gambar 3.5. Misalkan kita akan menggambar titik P dengan koordinat (2,7π/6), maka itu dapat juga digambar dengan cara sbb: karena $\pi/6$ berbeda π radian dengan $7\pi/6$, maka jarak berarahnya berubah menjadi -2. Jadi titik P dapat juga digambar dengan dengan koordinat (-2,π/6).

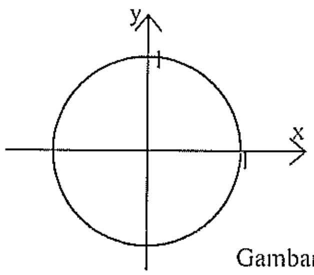
Dapat pula, koordinat polar disajikan dalam bentuk $r=a$ saja atau $\theta=\theta_0$ saja. . Persamaan $r=a$ menyatakan menyatakan suatu lingkaran dengan jari-jari $|a|$
Sedangkan $\theta=\theta_0$ menyatakan suatu garis melalui O yang berarah θ_0 dengan panjang dari $-\infty$ sampai dengan ∞.

Contoh

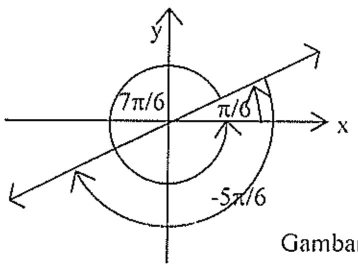
1. Jelaskan apa artinya pernyataan ini dan gambarkan grafiknya
   a. $r=1$ dan $r=-1$
   b. $\theta=\pi/6$, $\theta=7\pi/6$, $\theta=-5\pi/6$
2. Gambarkan grafiknya ketidaksamaan berikut
   a. $1\leq r\leq 2$ dan $0\leq\theta\leq\pi/2$
   b. $-2\leq r\leq 3$ dan $\theta=\pi/6$
   c. $r\leq 0$ dan $\theta=\pi/4$

Penyelesaian

1. $r=1$ dan $r=-1$ keduanya menyatakan lingkaran dengan pusat O dan jari jari 1 (Gambar 3.6a)
   $\theta=\pi/6$, $\theta=7\pi/6$, $\theta=-5\pi/6$ ketiganya menyatakan panjang garis tak hingga yang arahnya $\pi/6$ dari sinar awal. (Gambar 6b)

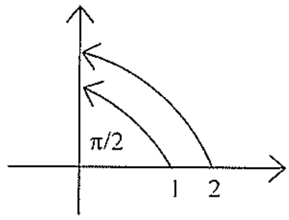


Gambar 6a



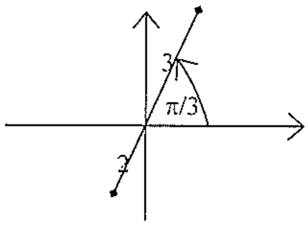
Gambar 6b

2.a



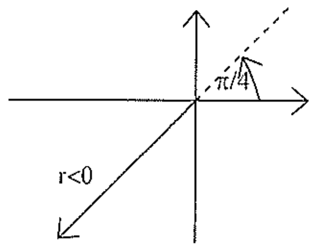
Gambar 7a

2.b



Gambar 7b

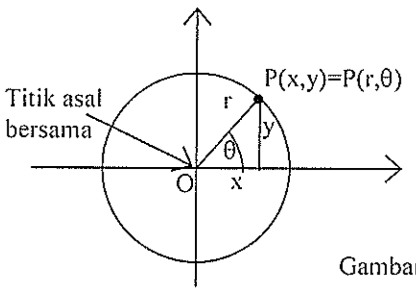
2.c



Gambar 7c

a. Hubungan Antara Koordinat Kartesius dan Koordinat Polar

Hubungan antara koordinat kutub dan polar dijelaskan oleh Gambar 3.8, dan persamaan berikut



Gambar 8

Persamaan yang menyatakan hubungan antara koordinat kartesius dan kutub

$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$

$x^2 + y^2 = r^2, \quad \dfrac{y}{x} = \tan\theta$

Contoh

1. Tentukan koordinat kutub dari persamaan lingkaran berikut

   a. $x^2 + (y-3)^2 = 9$

   b. $y^2 - 4x = 0$

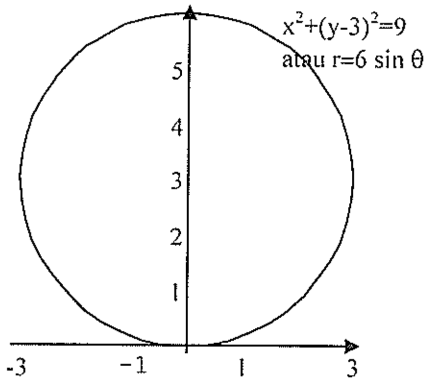
2. Gantilah koordinat kutub berikut menjadi koordinat kartesius

   a. $r^2 = 4r\cos\theta$

   b. $r = \dfrac{4}{2\cos\theta - \sin\theta}$

Penyelesaian

1. a. Uraikan $x^2 + (y-3)^2 = 9$ dan substitusikan $x = r\cos\theta$, dan $x = r\sin\theta$ ke dalam $x^2 + (y-3)^2 = 9$ dihasilkan $r^2 - 6r\sin\theta = 0 \Leftrightarrow r = 0$ atau $r = 6\sin\theta$



Gambar 9

Persamaan lingkaran yang berpusat di (0,3) dan berjari-jari 3, dapat disajikan dalam koordinat kutub dengan persamaan $r = 6\sin\theta$

b. Analog dengan 1.a, dihasilkan $r\sin^2\theta = 4\cos\theta$

c. Parabola menghadap ke kanan $y^2 = 4x$ dapat disajikan dalam koordinat kutub $r\sin^2\theta = 4\cos\theta$

2. a. $r^2 = 4r\cos\theta \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$

   b. $r = \dfrac{4}{2\cos\theta - \sin\theta} \Leftrightarrow r = \dfrac{4}{2\frac{x}{r} - \frac{y}{r}} \Leftrightarrow y = 2x - 4$, merupakan persamaan garis lurus melalui (0,-4) dan bergradien 2

b. Menggambar Grafik dalam Koordinat Polar

Sebelum menggambar grafik dalam koordinat polar akan dibahas dulu tentang kesimetrisan grafik dalam koordinat polar terhadap sumbu x sumbu y dan titik asal (0,0) yang dapat mempermudah dan mempercepat penggambaran grafik dalam koordinat polar.

Uji simetris untuk grafik koordinat polar

1. Simetris terhadap sumbu x

   Jika titik (r,θ) terletak pada grafik maka titik $(r,-\theta)$ atau $(-r,\pi-\theta)$ juga terletak pada grafik.

2. Simetris terhadap sumbu y

   Jika titik (r,θ) terletak pada grafik maka titik $(r,\pi-\theta)$ atau $(-r,-\theta)$ juga terletak pada grafik.

3. Simetris terhadap titik asal

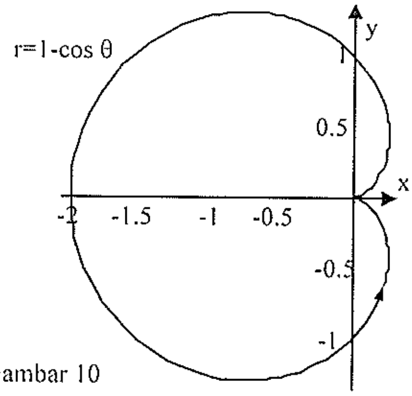
Jika titik (r,θ) terletak pada grafik maka titik $(-r,\theta)$ atau $(r,\pi+\theta)$ juga terletak pada grafik.

Contoh

Gambarkan grafik berikut

a. Misalkan (r,θ) terletak pada grafik $r = 1-\cos\theta$, maka $(r,-\theta)$ juga terletak pada grafik $r = 1-\cos\theta$, sebab $r = 1-\cos(-\theta) = 1-\cos\theta$, sehingga grafik $r = 1-\cos\theta$ simetris terhadap sumbu x.

Bila θ bergerak dari 0 sampai dengan π, maka r bergerak dari 0 ke 2. Berikut tabel nilai θ dan r.



Gambar 10

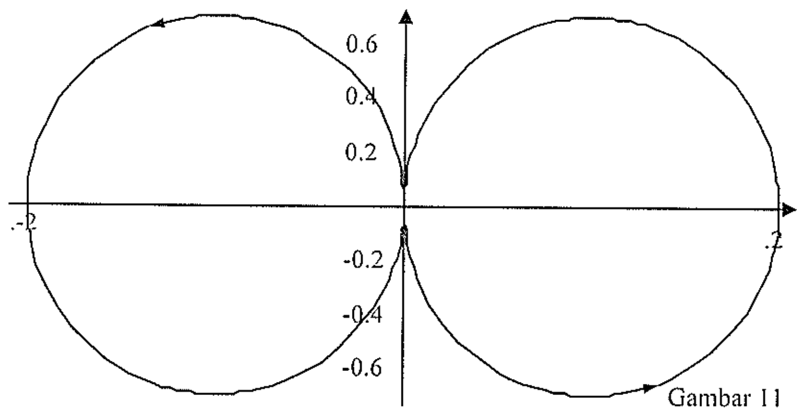
θ	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π
$r = 1-\cos\theta$	0	1/2	1	1/2	0

Karena grafik simetris terhadap sumbu x, maka untuk θ dari π sampai dengan 2π merupakan pencerminan kurva yang diperoleh dari 0 sampai π terhadap sumbu x. Tanda panah pada grafik menyatakan arah pergerakan θ

b. Misalkan (r,θ) terletak pada grafik $r^2 = 4\cos\theta$, maka $(r,-\theta)$ juga terletak pada grafik $r^2 = 4\cos\theta$, sebab $r^2 = 4\cos(-\theta) = 4\cos\theta$, sehingga grafik $r^2 = 4\cos\theta$ simetris terhadap sumbu x.

Selain itu $(-r,\theta)$ juga terletak pada grafik $r^2 = 4\cos\theta$, sebab $(-r)^2 = 4\cos\theta \Leftrightarrow r^2 = 4\cos\theta$, sehingga grafik $r^2 = 4\cos\theta$ juga simetris terhadap titik asal.

Karena grafik simetris terhadap sumbu x dan titik asal maka grafik simetris terhadap sumbu y.



Gambar 11

θ	$r=\sqrt{4}\cos\theta$
0	± 2
$\pm\pi/6$	$\pm 1{,}9$
$\pm\pi/4$	$\pm 1{,}7$
$\pm\pi/3$	$\pm 1{,}4$
$\pm\pi/2$	0

Latihan

1. Bentuklah koordinat kutub berikut ke dalam koordinat kartesius
   a. $r=\dfrac{5}{\sin\theta-2\cos\theta}$
   b. $r=\cot\theta\csc\theta$
   c. $r=\tan\theta\sec\theta$
   d. $r\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=2$
2. Bentuklah koordinat kartesius berikut ke dalam koordinat kutub
   a. $x^2+(y-2)^2=4$
   b. $x^2+xy+y^2=1$
   c. $x-y=3$
3. Gambarkan fungsi berikut dalam koordinat kutub
   a. $r=2+\sin\theta$
   b. $r^2=4\cos 2\theta$
4. Gambarkan daerah yang dinyatakan oleh ketidaksamaan berikut
   a. $-1\le r\le 2$ dan $-\pi/2\le\theta\le\pi/2$
   b. $0\le r\le 2\sec\theta$ dan $-\pi/4\le\theta\le\pi/4$
   c. $0\le r\le 2-2\cos\theta$
   d. $0\le r\le\cos\theta$

3.3 Fungsi

Sebelum memahami definisi fungsi, akan dibicarakan terlebih dahulu fenomena berikut:

-Biaya pemakaian taksi bergantung pada jarak yang ditempuh. Misalkan untuk pemakaian 2 km pertama ongkosnya Rp. 5000, dan tiap km berikutnya ongkosnya Rp. 2000, maka jika seseorang akan bepergian sejauh 20 km, ongkos yang harus dibayarkan adalah: **ONGKOS=Rp5000 + 18.Rp 2000.**

-Biaya pemakaian air PAM kota semarang adalah 10 m^3 pertama Rp.1425/m^3, 10m^3 kedua Rp.1985/m^3, 10m^3 ketiga 2730/m^3, 20m^3 keempat Rp.3075/m^3, pemkaian di atas 50m^3 Rp.4265/m^3. Ini masih ditambah lagi, untuk pemakaian berapapun ditambah ongkos lain-lain sebesar Rp.8500.

Jadi misalkan sebuah keluarga pada satu bulan tertentu menggunakan air sebanyak 55m^3, biaya yang harus dibayar adalah

BIAYA=10(1425+1985+2730)+20(3075)+5(4265)+8500.

Kedua contoh di atas menguraikan suatu aturan bahwa untuk setiap nilai tertentu (jarak yang ditempuh atau banyaknya pemakaian air), dihasilkan suatu nilai tertentu pula (yaitu ongkos pemakaian taksi atau biaya pemakaian air). Di sini dikatakan bahwa nilai kedua merupakan fungsi dari nilai pertama.

Definisi 3.1

Misalkan A, B $\subseteq$ R. Fungsi f dari A ke B adalah suatu aturan yang memasangkan setiap elemen x dalam himpunan A dengan tepat satu elemen y dalam himpunan B. Unsur y yang berkaitan dengan x ini dilambangkan dengan y=f(x). Di sini x dinamakan peubah bebas dan y yang nilainya bergantung pada x dinamakan peubah tak bebas.

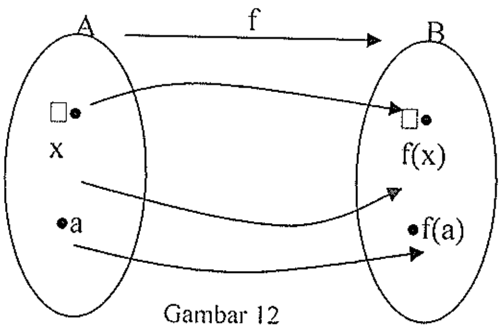
Himpunan A disebut daerah asal (*domain*) fungsi dan ditulis D_f. Jika tidak disebutkan secara eksplisit, maka D_f adalah subset terbesar dari bilangan real ( ), dan didefinisikan dengan $D_f=\{x\in \ /f(x)$ terdefinisi$\}$. Himpunan B disebut kodomain.

Bilangan $f(x)\in B$ disebut nilai f untuk x, dan himpunan f(x) dimana x mempunyai nilai disebut daerah nilai (*range*), ditulis R_f dan didefinisikan dengan $R_f=\{y\in B/y=f(x), x\in A\}$

Daerah asal dan daerah nilai dari fungsi di atas semuanya adalah himpunan bagian dari ,
sehingga dinamakan fungsi dengan peubah real atau disingkat fungsi real.

a. **Penyajian Suatu Fungsi**

- Dengan Diagram Panah

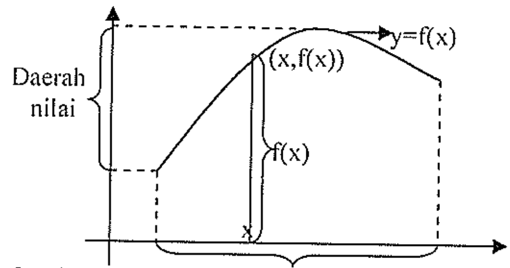


Gambar 12

Masing-masing panah mengaitkan suatu elemen dari A ke suatu elemen dari B. Panah menunjukkan bahwa f(x) dipadankan dengan x, dan f(a) dipadankan dengan a, dan seterusnya.

- Dengan Grafik

Cara yang paling umum untuk menggambarkan suatu fungsi adalah dengan grafik. Jika f adalah fungsi dengan domain A, maka grafiknya adalah himpunan pasangan berurutan $\{(x,f(x))/x\in A\}$



Gambar 3.13

- Aljabar

Penyajian fungsi dengan menggunakan rumus matematis. Misalnya luas lingkaran adalah $L=\pi r^2$. Disini domainnya adalah jari-jari (r) dan rangenya adalah luas (L)

Contoh

Dari soal berikut ini, manakah yang merupakan fungsi dan bukan fungsi

a. $y=x^2$, dengan $D_f=\{x/x<10, x\in N\}$

b. $y = x^3, x\in$

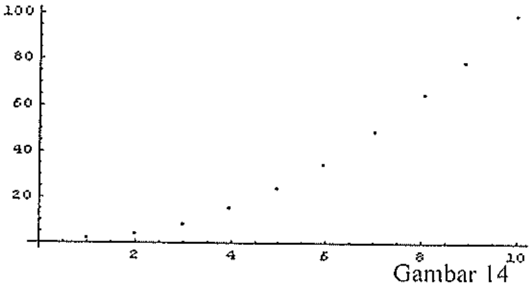
c. $x=y^2, x\in$

d. $x^2+y^2=4, x\in$

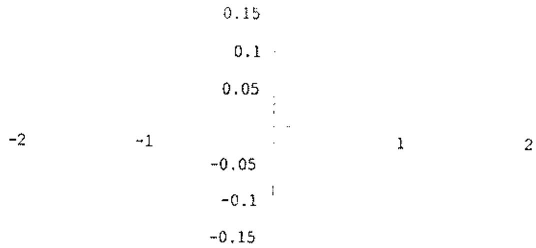
Penyelesaian.

Soal a adalah contoh fungsi diskrit, karena domainnya bilangan asli, sedangkan soal b sampai d merupakan fungsi kontinu karena domainnya bilangan real yang jarak antar titik.

sangat rapat. Grafik a berupa titik, sedangkan grafik b sampai d berupa kurva mulus. Berikut grafik dari keempat soal tersebut.



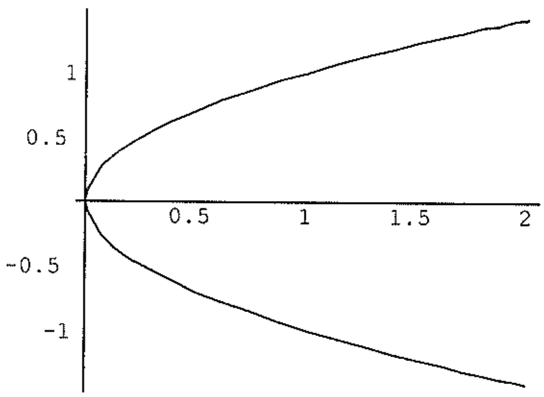
Gambar 14



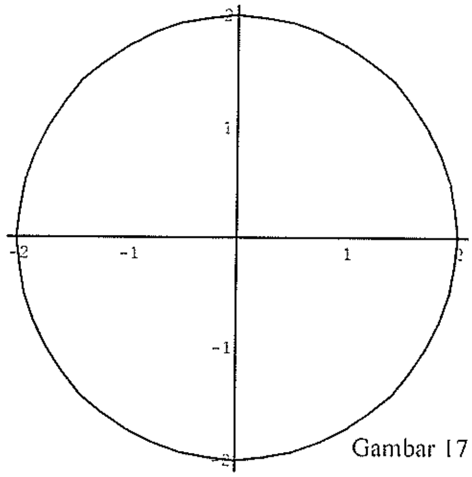
Gambar 15

a. Untuk setiap domain x yang berbeda dihasilkan nilai y yang berbeda pula. Artinya, tidak ada elemen pada domain mempunyai dua nilai berbeda pada range. Jadi $y=x^2$ ini adalah fungsi.

b. Analog dengan a, $y = x^3$ merupakan fungsi



Gambar 16



Gambar 17

c. Bukan fungsi, karena untuk nilai x=1 dihasilkan y=1 dan y=-1

b. Bukan fungsi, karena untuk x=0, dihasilkan y=2 dan y=-2.

Uji Garis Vertikal

Kurva di bidang xy merupakan suatu fungsi jika dan hanya jika tidak terdapat garis vertikal yang memotong grafik lebih dari satu kali.

Bagaimana menentukan domain dan range suatu fungsi? Perhatikan contoh berikut

Contoh

Tentukan domain dan range dari fungsi berikut:

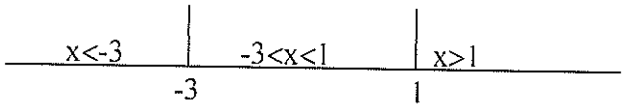
a. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

b. $g(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-9}}$

Penyelesaian

a. Akan ditentukan domain terlebih dulu, kemudian dari domain tersebut ditentukan rangenya.

Sesuai dengan definisi bentuk akar kuadrat, bahwa bilangan dalam tanda akar harus nol atau positif, maka $x^2 + 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) \geq 0$



	Tanda dari x+3	Tanda dari x-1	Tanda dari (x-3)(x-1)	Kesimpulan
x<-3	–	–	+	benar
-3<x<1	+	–	–	salah
x>1	+	+	+	benar

Jadi $D_f=\{x/x \leq -3 \cap x \geq 1, x \in \ \}$ atau $D_f=(-\infty,-3] \cap [1,\infty)$

Untuk $x \leq -3$ maupun $x \geq 1$, nilai $f(x) \geq 0$. Jadi $R_f=[0,\infty)$

b. Menurut definisi fungsi rasional, fungsi penyebut tidak boleh nol, sehingga

$\sqrt{x^2-9} \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3 \text{ dan } x \neq -3$

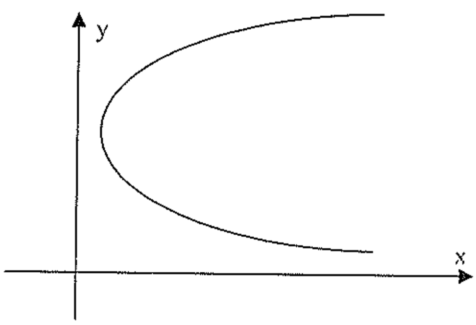
Selain itu, bilangan dalam akar kuadrat harus positif, sehingga $x^2-9>0$, yang dipenuhi oleh $\{x/x<-3$ atau $x>3\}$ Jadi $D_g= \ -\{-3,3\}=(-\infty,-3) \cap (3,\infty)$.

Karena untuk setiap x dalam D_f, nilai f(x) selalu ada, maka $R_f= \ =(-\infty,\infty)$.

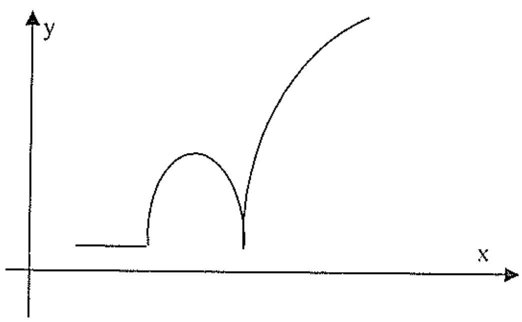
Soal

1. Manakah dari keempat grafik berikut yang merupakan fungsi?

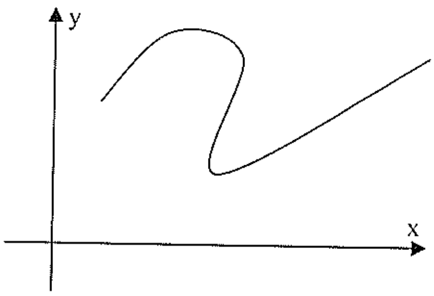
a.



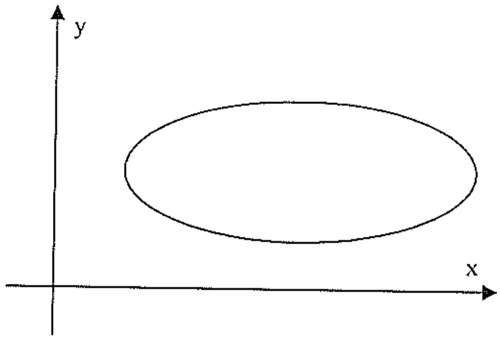
b.



c.



d.



2. Tentukan domain dan range dari fungsi-fungsi berikut

a. $f(x) = 1 + x^2$

b. $f(t) = 1 - \sqrt{t}$

c. $H(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

d. $f(s) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{s}}$

e. $h(t) = |2t + 3|$

f. $g(z) = \sqrt{4 - z^2}$

g. $g(z) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - z^2}}$

h. $g(z) = \sqrt{1 - 2\sin z}$

i. $h(y) = \sqrt{(y + 1)^{-1}}$

j. $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2 - x - 6}$

k. $g(m) = \sqrt{\dfrac{x(x - 2)}{x - 1}}$

b. Jenis Fungsi dan Grafiknya

1. Fungsi Aljabar

Fungsi aljabar adalah fungsi yang diperoleh dari sejumlah berhingga operasi aljabar (penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, pemangkatan, dan penarikan akar) terhadap fungsi y=k, k=konstan dan fungsi y=x.

Fungsi $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$, $g(x) = \sqrt{x} + 2$, $h(x) = 2x^2 - 3x + 1$ adalah beberapa contoh fungsi aljabar.

Fungsi-fungsi yang termasuk fungsi aljabar adalah:

a. Fungsi Polinomial

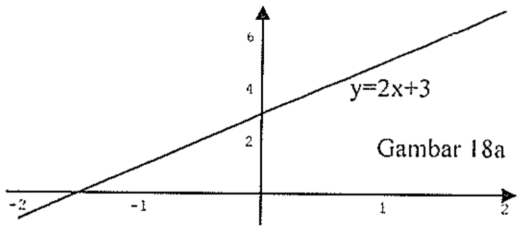
Fungsi f disebut fungsi polinomial derajat n, jika berbentuk

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

dengan n adalah bilangan bulat tak negatif, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in$ dan $a_n \neq 0$

Contoh

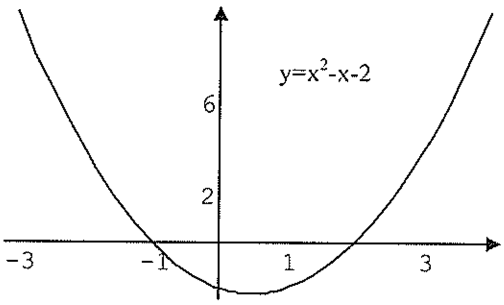
Fungsi linear berbentuk $f(x)=ax+b$, grafiknya berupa garis lurus. Memotong sumbu x di satu titik (-b/a,0), memotong sumbu y di titik (0,b). Mempunyai kemiringan sebesar a



Gambar 18a

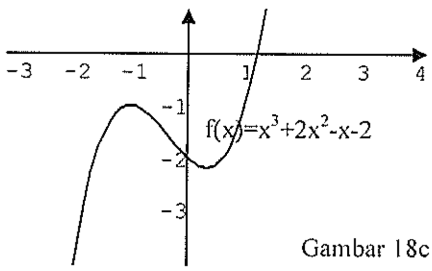
Fungsi kuadrat berbentuk $f(x)=ax^2+bx+c$ dengan grafik berupa parabola, memotong sumbu x di dua titik

- Jika a>0, parabola menghadap ke atas, mempunyai titik balik minimum.
  Jika a<0, parabola menghadap ke bawah, mempunyai titik balik maksimum.
- $D=b^2-4ac$ disebut diskriminan.
  Jika D>0, parabola memotong sumbu x di dua titik yang berbeda
  Jika D<0, parabola tidak memotong sumbu x
  Jika D=0, parabola memotong sumbu x di satu titik.
- Koordinat titik balik max/min (-b/2a, D/-4a).



Gambar 18b

Fungsi kubik berbentuk $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.



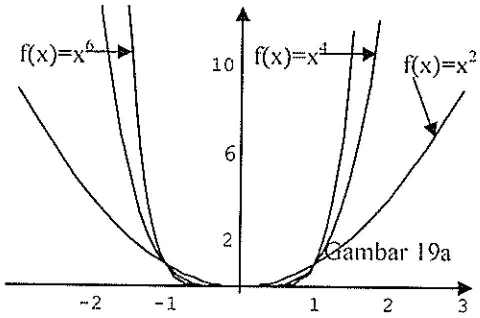
Gambar 18c

b. Fungsi Pangkat

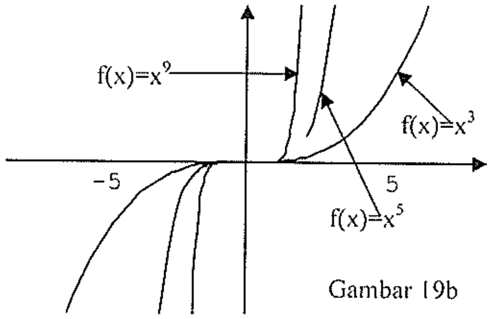
Fungsi pangkat berbentuk $f(x)=x^a$, dengan a konstanta

i. Bila a=n, n bilangan asli

Bentuk grafik $f(x)=x^n$, bergantung pada n, apakah genap atau ganjil. Untuk n genap, grafik $f(x)=x^n$ serupa dengan grafik $f(x)=x^2$. Untuk n ganjil, grafik $f(x)=x^n$ serupa dengan grafik $f(x)=x^3$. Semakin besar n, bentuk grafik lebih mendatar mendekati sumbu x, dan semakin curam bila $|x| \geq 1$.



Gambar 19a



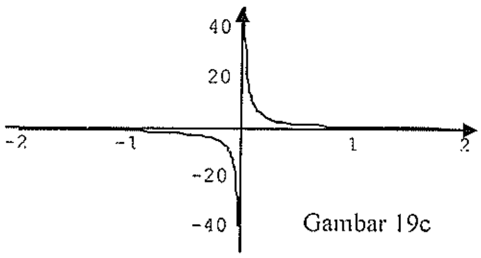
Gambar 19b

ii. Bila a=1/n, n bilangan asli

Fungsi $f(x)=x^{1/n}$, n bilangan asli adalah fungsi akar.

Analog dengan $f(x)=x^n$, n bilangan asli, fungsi $f(x)=x^{1/n}$, untuk n genap grafiknya serupa dengan $f(x)=\sqrt[2]{x}$ dengan domain $[0,\infty)$ dan range juga $[0,\infty)$. Untuk n ganjil grafiknya serupa dengan $f(x)=\sqrt[3]{x}$ dengan domain $(-\infty,\infty)$ dan range juga $(-\infty,\infty)$ (ingat bahwa setiap bilangan real mempunyai akar kubik)

iii. Bila a=-1



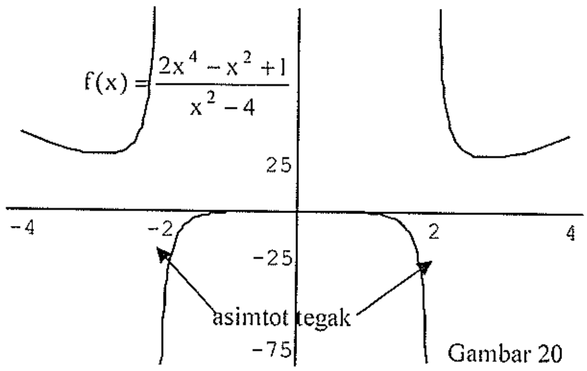
Gambar 19c

Grafik $f(x)=1/x$ berbentuk hiperbola dengan sumbu x dan y sebagai asimtot

c. Fungsi Rasional

Fungsi rasional berbentuk $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, dengan P dan Q keduanya polinom.

Domain fungsi rasional adalah $x\in$ yang memenuhi Q(x)



Gambar 20

Contoh

Domain fungsi $f(x) = \dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$, adalah $x \in$ yang memenuhi penyebut $g(x)=x^2-4 \neq 0$.
Sehingga domainnya adalah $D_f = -\{-2,2\}$, dan garis $x=-2$ dan $x=2$ merupakan asimtot tegak

2. Fungsi Transenden

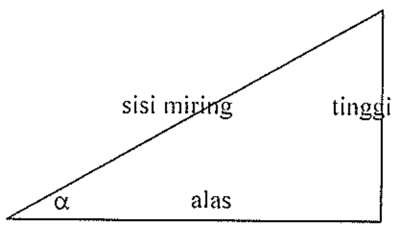
Yaitu fungsi yang bukan fungsi aljabar.

Contoh fungsi transenden: $f(x) = \cos x$, $h(x) = e^x \tan x$, $g(x) = 2^x$

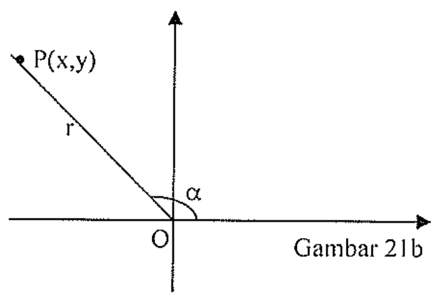
Fungsi transenden meliputi:

a. Fungsi Trigonometri

Untuk sudut lancip α, enam fungsi trigonometri berikut didefinisikan sebagai hasil bagi panjang sisi dari segitiga siku-siku, sebagai berikut.



Gambar 21a

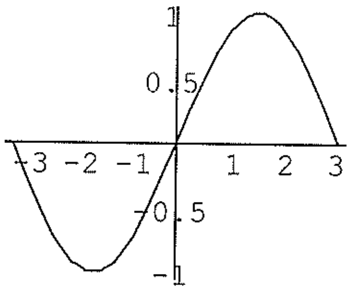


Gambar 21b

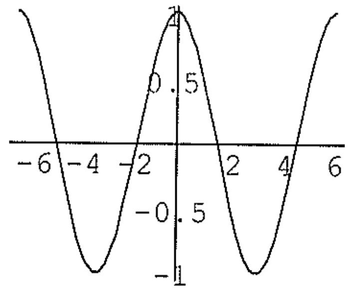
$$\sin\alpha = \frac{\text{tinggi}}{\text{sisi miring}} \qquad \tan\alpha = \frac{\text{tinggi}}{\text{alas}} \qquad \sec\alpha = \frac{\text{sisi miring}}{\text{alas}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{alas}}{\text{sisi miring}} \qquad \csc\alpha = \frac{\text{sisi miring}}{\text{tinggi}} \qquad \cot\alpha = \frac{\text{alas}}{\text{tinggi}}$$

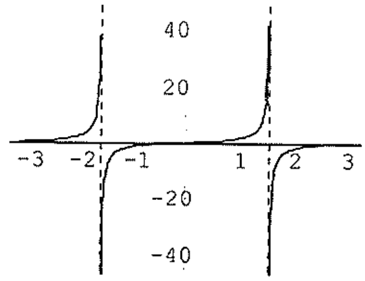
Definisi ini tidak berlaku untuk sudut tumpul dan negatif, sehingga untuk sudut umum α dalam posisi baku, dimisalkan $P(x,y)$ adalah sembarang titik pada sisi akhir dari α dan r adalah jarak $|OP|$.



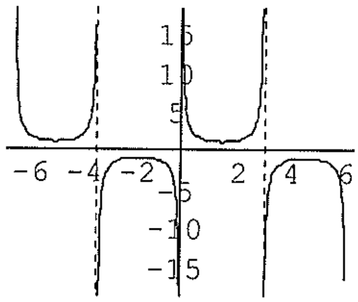
Gambar 22a f(x)=sin x



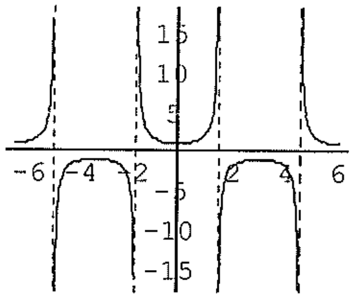
Gambar 22b f(x)=cos x



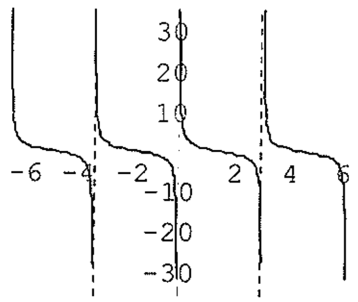
Gambar 22c f(x)=tan x



Gambar 22d f(x)=csc x



Gambar 22e f(x)=sec x



Gambar 22f f(x)=cot x

Identitas trigonometri

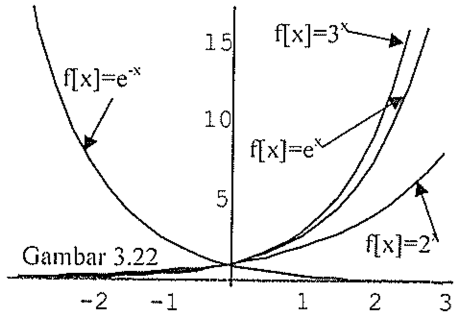
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$$
$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$
$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$
$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= 2\cos^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha \end{aligned}$$

b. Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial mempunyai bentuk umum $f(x) = a^x$, dengan bilangan dasar a adalah konstanta positif.

Contoh



Gambar 3.22

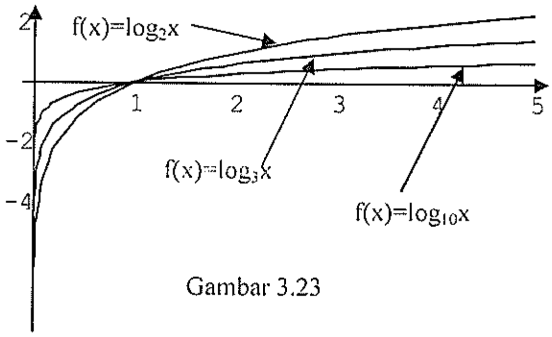
Grafik fungsi eksponensial tidak pernah memotong sumbu x (sumbu x sebagai asimtot datar), dan memotong sumbu y di titik (0,1). Semakin besar bilangan dasarnya, grafiknya semakin mendekati sumbu y.

e adalah bilangan alam, nilainya $\cong 2,71828$

c. Fungsi Logaritma

Jika a>0 dan $a \neq 1$, maka fungsi eksponensial $f(x)=a^x$ merupakan fungsi satu satu. Fungsi inversnya disebut fungsi logaritma dengan bilangan pokok (dasar) a dan ditulis dengan $f(x)=\log_a x$. (Mengenai fungsi invers akan dibahas kemudian)

Jadi $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$



Gambar 3.23

Perhatikan grafik fungsi logaritma berikut ini. Fungsi $f(x)= \log_a x$, selalu memotong sumbu x di titik (1,0) dan mempunyai asimtot tegak sumbu y. Semakin besar bilangan pokoknya, grafik fungsinya semakin mendekati sumbu x

3. Fungsi hiperbolik

Kombinasi tertentu dari fungsi eksponensial e^x dan e^{-x} sering muncul dalam matematika maupun terapannya sehingga perlu diberi nama khusus. Dalam banyak hal fungsi tersebut mirip dengan fungsi trigonometri dan mempunyai hubungan dengan hiperbola, seperti halnya fungsi trigonometri dengan lingkaran. Sehingga fungsi ini disebut fungsi hiperbolik

Jika t bilangan real, maka titik P(cos t, sin t) terletak pada lingakaran satuan $x^2+y^2=1$, sebab $\cos^2 t+\sin^2 t=1$. Di sini t menyatakan ukuran radian dari sudut AOB.

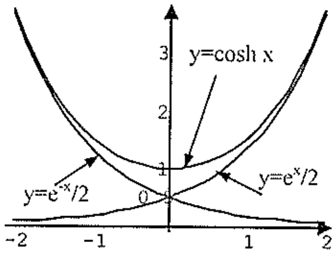
Analog dengan itu, bila t bilangan real sembarang, maka titik P(cosh t, sinh t) terletak pada bagian kanan dari hiperbola $x^2-y^2=1$ sebab $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$. Dalam hal ini t tidak menyatakan ukuran sudut, melainkan luas dua kali daerah sektor hiperbolik yang diarsir, seperti halnya dalam kasus trigonometri, t menyatakan dua kali luas sektor lingkaran yang diarsir.

Definisi fungsi hiperbolik

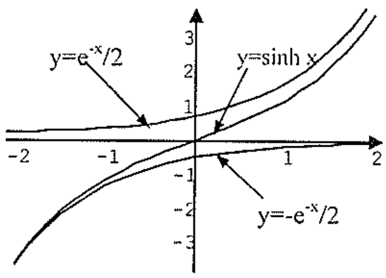
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

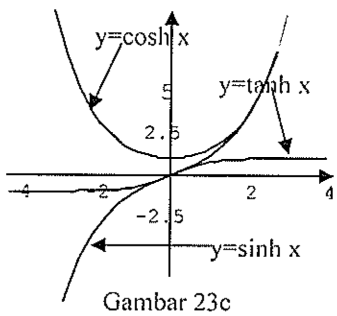
Grafik fungsi hiperbolik



Gambar 23a



Gambar 23b



Gambar 23c

Identitas fungsi hiperbolik mempunyai kesamaan dengan identitas fungsi trigonometri, yaitu:

$\sinh(-x) = -\sinh x$	$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$
$\cosh(-x) = \cosh x$	$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh y \cosh x$
$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$	$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$
$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$	$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

4. Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Fungsi f dikatakan fungsi genap jika $f(-x)=f(x)$ untuk setiap x dalam daerah asal, dan fungsi f dikatakan fungsi ganjil jika $f(-x)=-f(x)$ untuk setiap x dalam daerah asal.

Grafik fungsi genap simetris terhadap sumbu y, dan grafik fungsi ganjil simetris terhadap titik asal (0,0).

Contoh

Tentukan apakah

a. $f(x)=x^3+x$

b. $f(x)=|x|$

c. $f(x)=x+\cos x$

merupakan fungsi genap atau fungsi ganjil

Penyelesaian

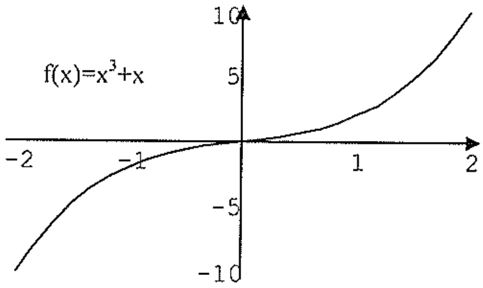
a. $f(x) = x^3 + x \Leftrightarrow f(-x) = (-x)^3 + (-x)$

$\Leftrightarrow f(-x) = -x^3 - x$

$\Leftrightarrow f(-x) = -(x^3 + x)$

$\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$

Menurut definisi $f(x)=x^3+x$ fungsi ganjil, dan terlihat dari grafik fungsinya yang simetris terhadap (0,0)



Gambar 3.24a

b.Menurut definisi nilai mutlak:

$|x| = x, x > 0$

$= -x, x < 0$

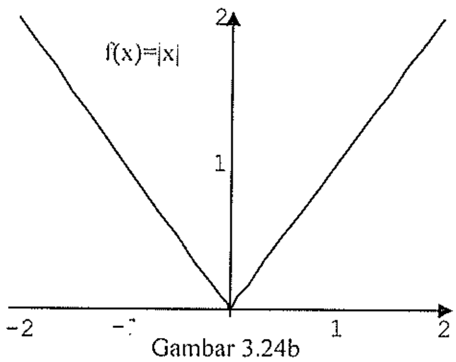
Sehingga

$f(x) = |x| \Leftrightarrow f(-x) = |-x|$

$\Leftrightarrow f(-x) = |-1||x|$

$\Leftrightarrow f(-x) = |x| = f(x)$

Menurut definisi $f(x)=|x|$ fungsi genap, dan terlihat dari grafik fungsinya yang simetris terhadap sb y



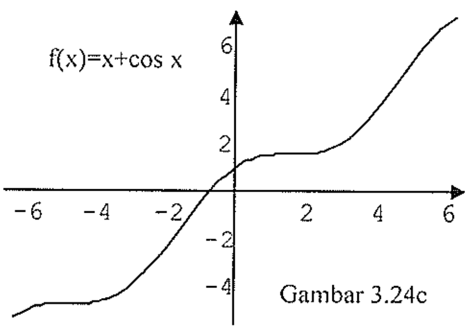
Gambar 3.24b

c. $f(x) = x + \cos x \Leftrightarrow f(-x) = -x + \cos(-x)$

$\Leftrightarrow f(-x) = -x + \cos x$

$\Leftrightarrow f(-x) \neq -f(x) \neq f(x)$

Menurut definisi $f(x)=x+\cos x$ bukan fungsi genap maupun fungsi ganjil, dan terlihat dari grafik fungsinya tidak simetris terhadap titik (0,0) maupun sb y



Gambar 3.24c

5. Fungsi Eksplisit dan Fungsi Implisit

Fungsi Eksplisit y terhadap x adalah fungsi dengan aturan $y=f(x)$ yang memasangkan setiap unsur di daerah asalnya dengan tepat satu unsur di daerah nilainya

Contoh: $y=\sqrt{(a^2-x^2)}$

Jika F(x,y)=0 adalah fungsi dengan peubah x dan y, maka pada aturan F(x,y)=0, terkandung pengertian y sebagai fungsi dari x, tetapi tidak dapat secara eksplisit dinyatakan y sebagai fungsi dari x atau x sebagai fungsi dari y. Fungsi yang demikian dinamakan fungsi implisit.

Contoh

Pada fungsi $x^5+3xy^3-2y^5-2=0$ kita tidak dapat menyatakan y eksplisit terhadap x

6. **Fungi Parameter**

Dari persamaan lingkaran $x^2+y^2=c^2$, kita hanya dapat mengetahui bahwa lingkaran tersebut berpusat di (0,0) dan berjari-jari c. Tetapi kita tidak tahu bagaimana arah yang dijalani lengkungannya sehingga dapat membentuk lingkaran, dimana titik awal dan titik akhir pergerakan lengkungannya. Jika P(x,y) adalah sembarang titik pada lingkaran dengan jari-jari c, dan θ adalah sudut antara garis OP dan sumbu x positif, maka

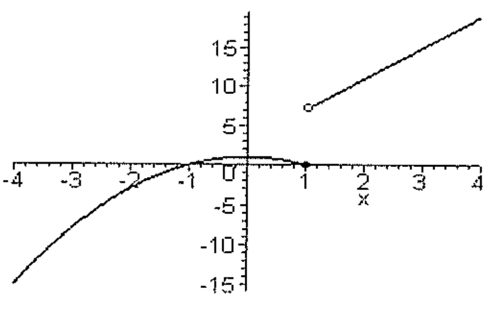
$\begin{cases} x = c\cos\theta \\ y = c\sin\theta \end{cases}, 0 \le \theta \le 2\pi$ merupakan fungsi parameter dengan parameter θ yang memuat informasi mengenai arah pergerakan titik (c,0) yang bergerak berputar satu kali dan kembali ke titik (c,0)

7. **Fungsi yang Terdefinisi Sepotong-sepotong (*Piecewise Function*)**

Yaitu fungsi yang domainnya dibagi dalam beberapa interval, dan untuk tiap interval definisi fungsinya berbeda.

Contoh

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, x \le 1 \\ 4x + 3, x > 1 \end{cases}$$



Gambar 3.25

8. **Fungsi Periodik**

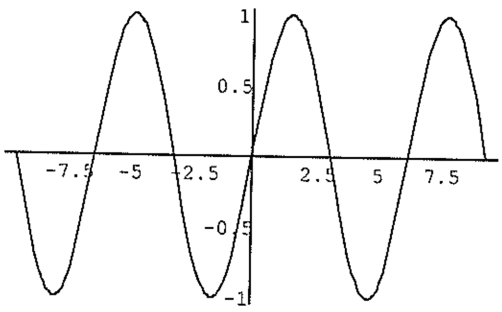
Fungsi f dikatakan periodik dengan periode p, jika terdapat $p \neq 0$, sedemikian sehingga $f(x+p)=f(x)$ untuk setiap x dalam daerah asal f.

Contoh

a. Fungsi $f(x)=\sin x$, adalah fungsi periodik dengan periode 2π, karena $f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)=\sin x.\cos 2\pi + \sin 2\pi.\cos x = \sin x$

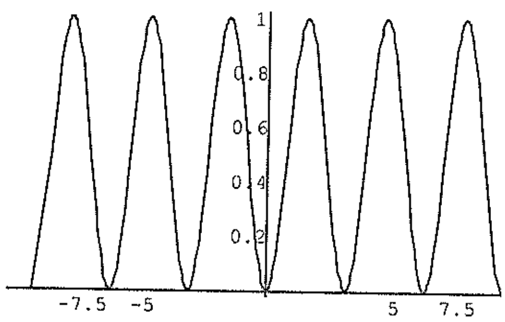
b. Karena $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$, $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$ dan periode dari cos 2x adalah π, maka periode dari $\sin^2 x$ dan $\cos^2 x$ juga π

a. $f(x)=\sin x$, $x \in [-3\pi, 3\pi]$



Gambar 3.26a

b. $f(x)=\sin^2 x$, $x \in [-3\pi, 3\pi]$



Gambar 3.26b

Tampak bahwa bukit dan lembah grafik $f(x)=\sin x$ dan $f(x)=\sin^2 x$, berulang setiap 2π

9. Fungsi Bilangan Bulat Terbesar

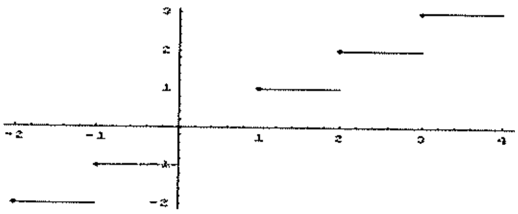
Jika x adalah bilangan real, maka terdapat tak hingga banyaknya bilangan bulat yang lebih kecil atau sama dengan x. Di antara semua bilangan bulat tersebut, tentunya ada yang terbesar. Fungsi bilangan bulat terbesar dinotasikan dengan $[x]$ atau $\lfloor x \rfloor$, dan didefinisikan dengan $[x] = n \Leftrightarrow n \leq x \leq n+1$

Contoh

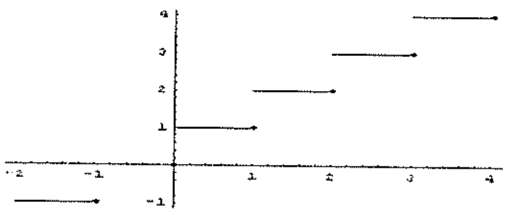
$[1,5] = 1$ karena $1 \leq 1,5 \leq 2$, $[-1,5] = -2$, karena $-2 \leq -1,5 \leq -1$, $[2] = 2$

Grafiknya adalah sebagai berikut

a. Fungsi bilangan bulat terbesar



b. Fungsi bilangan bulat terkecil



Gambar 3.26a Gambar 3.26b

Soal

1. Tunjukkan bahwa:
   a. fungsi f(x)=tan x adalah fungsi periodik dengan periode π
   b. fungsi f(x)=sin x dan f(x)=cos x adalah fungsi periodik dengan periode 2π
2. Manakah yang merupakan fungsi genap atau fungsi ganjil
   c. $f(x)=x(x^2+1)$
   d. $f(x)=\dfrac{x^2}{1-|x|}$
   e. $h(t)=|t|^3$
   f. $k(c)=\dfrac{c}{c^2-1}$
3. Gambarkan fungsi berikut
   g. $f(x)=\begin{cases}3 \quad , & x<-5\\ x+1, & -5\le x\le 5\\ \sqrt{x} \quad , & x>5\end{cases}$
   h. $f(t)=\begin{cases}x^2 \quad , & x<0\\ -1 & ,0<x<2\\ x \quad , & x>2\end{cases}$
   i. $f(t)=\begin{cases}-1 & , \quad x\le -1\\ 3x+2 & ,|x<1|\\ 7x+2 & ,x\ge 1\end{cases}$
4. Jendela Norman mempunyai bentuk persegi panjang yang di atasnya berupa setengah lingkaran. Jika keliling jendela 30 kaki, nyatakan luas jendela, sebagai fungsi lebar x.
5. Kotak tanpa tutup di buat dari lembaran papan persegi panjang dengan ukuran 1,2 m dan 2 m, dengan cara membuang tiap pojok dari papan dengan panjang x m, kemudian melibat ke atas sisi-sisinya. Nyatakan volume kotak sebagai fungsi dari x.
6. Sebuah perusahaan taksi menarik ongkos dua dollar untuk satu mil pertama (atau bagiannya), dan 20 sen untuk setiap sepersepuluh mil berikutnya (atau bagiannya).

Nyatakan biaya perjalanan C sebagai fungsi jarak tempuh untuk $0<x<2$, dan sketsakan grafiknya.

7. Pengelola pabrik mebel menemukan bahwa biaya pembuatan 180 kursi dalam sehari sebesar $2200 dan 300 kursi sebesar $4800.. Bila diasumsikan fungsi tersebut linear, nyatakan biaya sebagai fungsi dari banyaknya kursi yang dihasilkan.
8. Pada permukaan lautan, tekanan air sama dengan tekanan udara di atas air 15 lb/in^2. Di bawah permukaan, tekanan air bertambah sebesar 4,34 lb/in^2 untuk setiap penurunan 10 kaki.
   a. Nyatakan tekanan air sebagai fungsi kedalaman di bawah permukaan air.
   b. Pada kedalaman berapa tekanan air 100 lb/in^2
7. Sebuah bejana bebentuk kerucut lingkaran tegak terbalik dengan jari-jari lingkaran alas 8 cm dan tinggi 20 cm. Pada saat tinggi air h cmm, tentukan volume air dalam bejana sebagai fungsi dari h.
8. Volume sebuah kotak berbentuk balok dengan alas persegi adalah 10.000 cm^3. Bila biaya pembuatan bidang alas dan tutup kotak Rp. 100 per cm^2 dan bidang sisinya Rp. 50 per cm^2, tentukan biaya total pembuatan kotak itu sebagai fungsi dari panjang rusuk alasnya.
9. Di dalam sebuah bola berjari-jari r dibuat tabung lingkaran tegak dengan lingkaran alas dan lingkaran atas terletak pada permukaan bola. Tentukan volume tabung sebagai fungsi dari tinggi, kemudian tentukan juga volume tabung sebagai fungsi dari jari jari lingkaran alasnya.
10. Pakar biologi telah melakukan penelitian bahwa laju mengerik jangkrik jenis tertentu terkait dengan suhu dan kaitan tersebut mendekati linear. Seekor jangkrik menghasilkan 113 kerikan tiap menit pada suhu 70^0F dan 173 kerikan pada suhu 80^0F. Jika suhu dinotasikan dengan T dan kerikan dengan N, tentukan persamaan yang memodelkan suhu sebagai banyaknya kerikan. Kemudian tentukan suhu saat itu jika jangkrik mengerik sebanyak 150 kerikan.
11. Tarif pemakaian listrik rumah tangga dengan daya 1300 watt adalah seperti tabel berikut

Banyaknya pemakaian (kWh)	Biaya/kWh

Biaya ini masih ditambah lagi dengan tarif dasar listrik (TDL) sebesar Rp

$x \leq 20$	Rp 385	
$20 < x \leq 40$	Rp 445	
$x > 40$	Rp 495	

39.130 dan pajak penerangan jalan sebesar 8% dari akumulasi biaya total kWh dan TDL

Tentukan

a. Rumus fungsi untuk menentukan biaya pemakaian listrik setiap bulannya.

b. Bila sebuah keluarga pada bulan tertentu memakai listrik sebesar 182 kWh berapa biaya yang harus dibayar?

12. Gaji tetap seorang cleaning service losmen adalah Rp 7.500/hari. Selain itu, setiap mendapat tambahan gaji Rp 1000/kamar/hari. Penghasilan bersih setelah dipotong pajak adalah 85% dari total upah perhari.

    a. Berapa penghasilan persih setiap petugas cleaning service, bila pada hari itu ada x kamar yang disewa?

    b. Jika penghasilannya pada suatu hari kurang dari Rp. 15.000, ada berapa kamar yang disewa?

c. Operasi pada Fungsi

Definisi 1

Jika f dan g keduanya fungsi, maka jumlahan, selisih, perkalian, dan pembagian f dan g didefinisikan dengan:

a. $(f+g)x=f(x)+g(x)$

b. $(f-g)x=f(x)-g(x)$

c. $(f.g).x=f(x).g(x)$

d. $(f/g)x=f(x)/g(x)$, $g(x)\neq 0$

Pada tiap tiap operasi di atas, domain hasil pengoperasian adalah interseksi (irisan) dari domain f dan domain g, kecuali untuk d, dimana $g(x)\neq 0$

Contoh

1. Bila f dan g didefinisikan dengan $f(x)=\sqrt{x+2}$ dan $g(x)=\sqrt{x-3}$, tentukan

   a. $(f+g)x$

   b. $(f-g)x$

c. (f.g).x

d. (f/g)x

2. Diketahui fungsi yang terdefinisi sepotong-sepotong berikut ini

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2, x\le 0\\ x \quad , x>0\end{cases} \text{ dan } g(x)=\begin{cases}-2x, x<1\\ 1-x, x\ge 1\end{cases}$$

Tentukan:

a. (f+g)x

b. (f-g)x

c. (f.g).x

Penyelesaian

1. Menurut definisi

a. $(f+g)x = f(x)+g(x) = \sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}$

b. $(f-g)x = f(x)-g(x) = \sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}$

c. $(f.g)x = f(x).g(x) = \sqrt{x+2}.\sqrt{x-3} = \sqrt{x^2-x-6}$

d. $(f/g)x = f(x)/g(x) = \sqrt{x+2}/\sqrt{x-3}$, $\sqrt{x-3}\neq 0$

Domain untuk f(x) adalah [-2,∞), domain untuk g(x) adalah [3,∞), sehingga domain untuk a sampai c adalah [3,∞), sedangkan domain untuk d adalah (3,∞), hal ini dikarenakan $x-3\neq 0$.

2. Langkah pertama yang harus dilakukan adalah menyamakan domain antara f dan g, menjadi $x\le 0$, $0<x<1$, $x\ge 1$ yaitu

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2, x\le 0\\ x \quad ,0<x<1\\ x \quad ,x\ge 1\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}-2x \ ,x\le 0\\ -2x \ ,0<x<1\\ 1-x \ ,x\ge 1\end{cases}$$

Sehingga

a. $$f(x)+g(x)=\begin{cases}1-2x-x^2, x\le 0\\ -x \quad ,0<x<1\\ 1 \quad ,x\ge 1\end{cases}$$

b. $f(x) - g(x) = \begin{cases} 1 + 2x - x^2, x \le 0 \\ 3x \quad ,0 < x < 1 \\ 2x - 1 \quad ,x \ge 1 \end{cases}$

c. $f(x)g(x) = \begin{cases} -2x - 2x^3, x \le 0 \\ -2x \ 2 \quad ,0 < x < 1 \\ x - x^2 \quad ,x \ge 1 \end{cases}$

Soal

1. Diberikan fungsi $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ dan $g(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$. Tentukan
   a. 6f(x)+3g(x) dan domainnya
   b. f(x)g(x) dan domainnya
   c. f(x)/g(x) dan domainnya
2. Diberikan fungsi $f(x) = \begin{cases} 1 - x, x \le 1 \\ 2x - 1, x > 1 \end{cases}$ dan $g(x) = \begin{cases} 0 \quad ,x < 2 \\ -1, x \ge 2 \end{cases}$

   Tentukan
   a. f(x)+g(x) dan domainnya
   b. f(x)-g(x) dan domainnya
   c. f(x)g(x) dan domainnya
3. Jika f dan g keduanya fungsi genap, apakah f+g dan fg juga fungsi genap?
4. Jika f dan g keduanya fungsi ganjil, apakah f+g dan fg juga fungsi ganjil?
5. Diketahui fungsi f dengan domain bilangan real. Bila g(x)=f(x)+f(-x), tunjukkan bahwa g(x) adalah fungsi genap.

d. Komposisi Fungsi

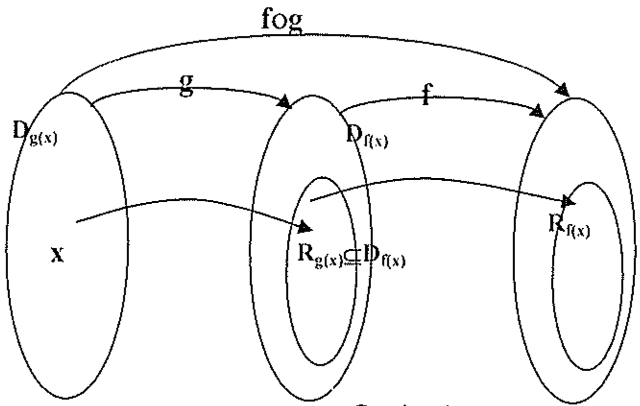
Terdapat cara lain untuk mengkombinasikan dua fungsi (selain operasi fungsi yang sudah dibahas) untuk mendapatkan fungsi yang baru. Sebagai contoh, misalkan y=f(u)=u+1 dan $u=g(t)=t^2-1$. Karena y adalah fungsi u dan u fungsi t, maka y merupakan fungsi dari t, yaitu $y=f(u)=f(g(t))=(t^2+1)-1=t^2$.

Langkah ini disebut komposisi, karena fungsi baru diperoleh dengan mengkomposisikan dua fungsi yang sudah ada yaitu f dan g.

Secara umum, diketahui dua fungsi sembarang f dan x, dan dimulai dari bilangan t dalam domain g dan mencari nilai g(t). Bila nilai g(t) ini berada dalam domain f, maka dapat dihitung nilai dari f(g(t)). Hasilnya adalah fungsi baru k(t)=f(g(t)) yang diperoleh dengan cara mensubstitusi g ke dalam f.

Jadi $R_g \subseteq D_f \Rightarrow (fog)(x) = f(g(x))$

Diagram panah untuk fungsi komposisi adalah sebagai berikut



Gambar 27

Contoh

1. Misalkan diketahui $f(x) = \frac{1}{x} + x^2$ dan $g(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1}$, maka

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} + [g(x)]^2 = \frac{x^4+1}{x^2+1} + \left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)^2$$

2. Bila diketahui $H = \frac{1}{x+1}$, dan $f \circ g = H$, maka kita dapat menetapkan $g(x) = x+1$

   dan $f(x) = \frac{1}{x}$ sehingga $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = \frac{1}{x+1} = H$.

   Atau dapat juga $f(x) = \frac{1}{x+3}$ dan $g(x) = x-2$, sehingga $f(g(x)) = \frac{1}{x+1}$

Soal

1. Tentukan $f \circ g \circ h$, jika diketahui

   a. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{2x+1}$, $h(x) = x^2$

b. $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{2x+1}$, $h(x)=x^2$

2. Tentukan f sehingga $f \circ g = F$ bila diketahui

a. $g(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$, $F(x)=\dfrac{1+x^4}{1+x^2}$

b. $g(x)=-x^2$, $F(x)=\sqrt{a^2+x^2}$

3. Bentuklah $f \circ g$ dan $g \circ f$ bila

a. $f(x)=\begin{cases} 1-x, x \le 0 \\ x^2 \quad, x>0 \end{cases}$ dan $g(x)=\begin{cases} -x \quad, x<1 \\ 1+x, x \ge 1 \end{cases}$

b. $f(x)=\begin{cases} 1-2x, x<1 \\ 1+x \quad, x \ge 1 \end{cases}$ dan $g(x)=\begin{cases} x^2 \quad, x<0 \\ 1-x, x \ge 0 \end{cases}$

d. Transformasi Fungsi

Dengan menerapkan transformasi tertentu pada grafik fungsi yang diketahui, kita dapat memperoleh grafik fungsi baru yang berkaitan. Hal ini akan memberikan kemampuan menggambar grafik secara cepat dengan tangan.

Pergeseran Tegak dan Mendatar

Misalkan c>0, maka untuk memperoleh grafik

- y=f(x)+c, geser grafik y=f(x) ke atas sejauh c satuan
- y=f(x)-c, geser grafik y=f(x) ke atas sejauh c satuan
- y=f(x-c), geser grafik y=f(x) ke kanan sejauh c satuan
- y=f(x+c), geser grafik y=f(x) ke kiri sejauh c satuan

Peregangan dan Pencerminan Tegak dan Mendatar

Misalkan c>1, maka untuk memperoleh grafik

- y=cf(x), regangkan grafik y=f(x) secara tegak dengan faktor c
- y=(1/c)f(x), mampatkan grafik y=f(x) secara tegak dengan faktor c
- y=f(cx), mampatkan grafik y=f(x) secara mendatar dengan faktor c
- y=f(x/c), regangkan grafik y=f(x) secara mendatar dengan faktor c

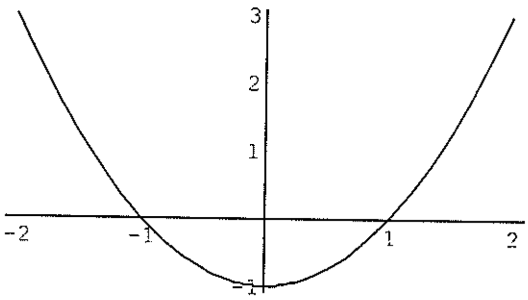
- y=-f(x), cerminkan grafik y=f(x) terhadap sumbu x
- y=f(-x), cerminkan grafik y=f(x) terhadap sumbu y

Contoh

1.Gunakan transformasi fungsi untuk menggambarkan grafik fungsi $f(x)=x^2-1$, $g(x)=x^2+1$, $h(x)=(x-1)^2$, $k(x)=(x+1)^2$

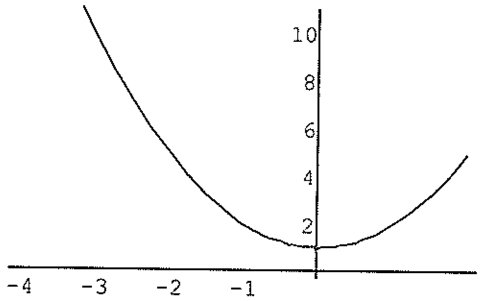
2.Gunakan transformasi fungsi untuk menggambarkan grafik fungsi f(x)=(cos x)/2, g(x)=2 cos x, h(x)=cos x/2, k(x)=cos 2x

Penyelesaian



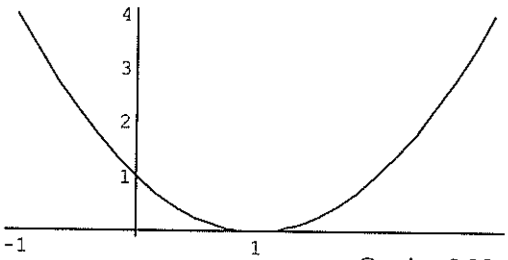
Gambar 3.28a

Fungsi $f(x)=x^2-1$ diperoleh dari grafik $f(x)=x^2$ dengan menggeser ke bawah sejauh 1 satuan



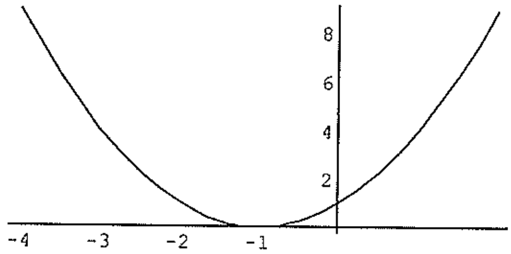
Gambar 3.28b

Fungsi $f(x)=x^2+1$ diperoleh dari grafik $f(x)=x^2$ dengan menggeser ke atas sejauh 1 satuan



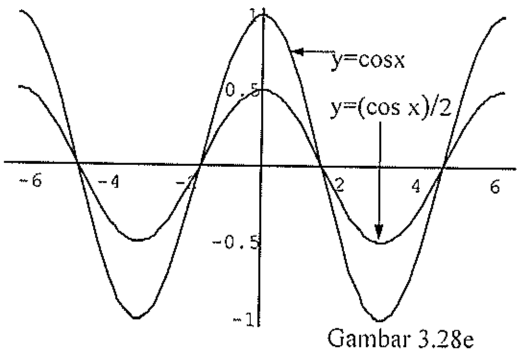
Gambar 3.28c

Fungsi $f(x)=(x-1)^2$ diperoleh dari grafik $f(x)=x^2$ dengan menggeser ke kanan sejauh 1 satuan



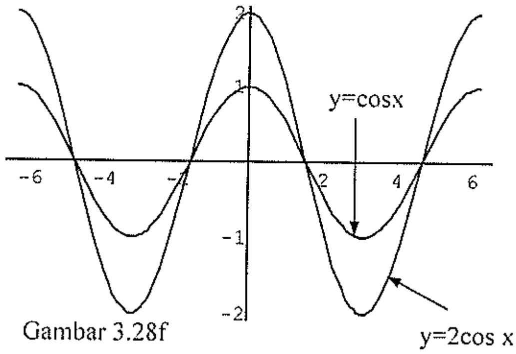
Gambar 3.28d

Fungsi $f(x)=x^2-1$ diperoleh dari grafik $f(x)=x^2$ dengan menggeser ke kiri sejauh 1 satuan



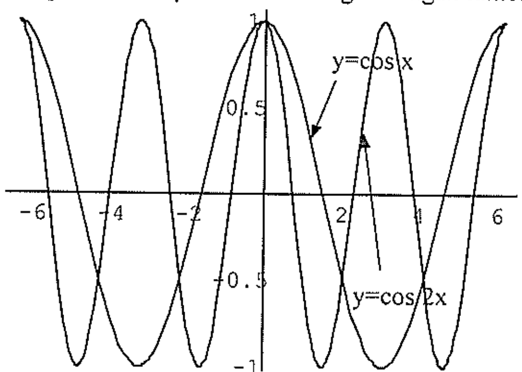
Gambar 3.28e

Grafik y=(cosx)/2 diperoleh dari grafik y=cosx dengan memampatkan secara tegak dengan faktor 2



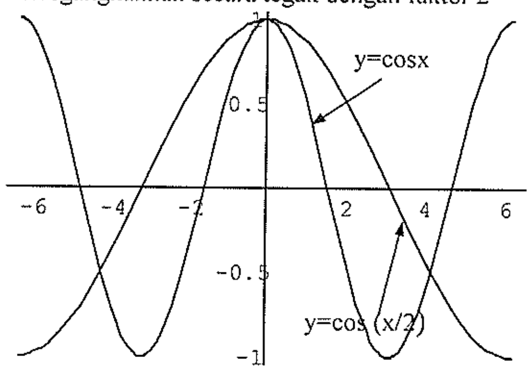
Gambar 3.28f

Grafik y=2cosx diperoleh dari grafik y=cosx dengan meregangkankan secara tegak dengan faktor 2



Gambar 3.28g

Grafik y=cos 2x diperoleh dari grafik y=cos x dengan memampatkan secara mendatar dengan faktor 2



Gambar 3.28h

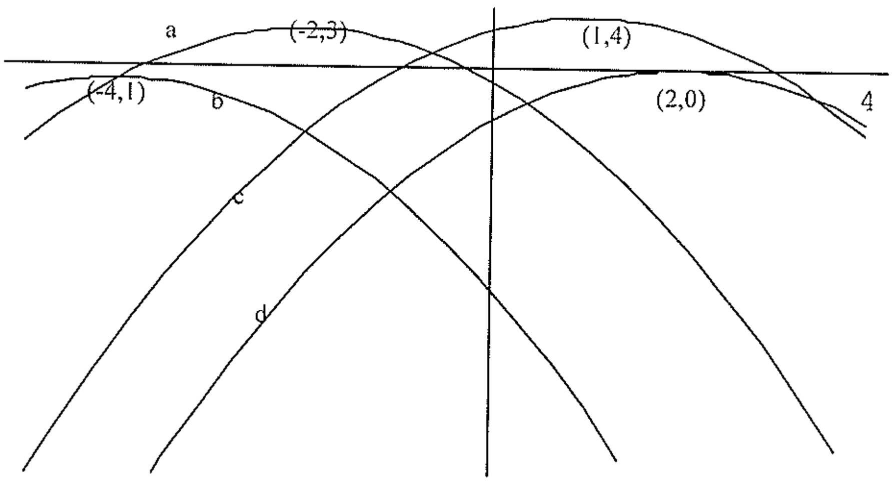
Grafik y=cos (x/2) diperoleh dari grafik y=cos x dengan meregangkan secara mendatar dengan faktor 2

Soal

1. Dengan transformasi gambarkan keempat fungsi berikut:

   a. $y=x^2-2x-3$ b. $y=x^2+4x+6$ c. $y=x^2-4x+6$ d. $y=x^2+6x-7$

2. Dari masing-masing grafik berikut tentukan rumus fungsinya, bila fungsi asalnya adalah $f(x)=-x^2$



e. Fungsi Invers

Berikut ini diberikan tabel jarak dan waktu perjalanan seorang pengendara sepeda motor

Waktu (jam)	Jarak (km)
1	60
2	90
3	120
4	170

Suatu ketika pengendara berhenti di suatu tempat yang berjarak 120 km dari tempat keberangkatannya, dan ketika ia melihat jam pengendara tersebut telah berjalan selama 3 jam. Artinya pengendara tersebut telah menyatakan jarak sebagai fungsi dari waktu. Fungsi ini disebut sebagai fungsi invers dari f dan ditulis f^{-1} Jika jarak sebagai fungsi waktu dinyatakan dengan $S=f(t)$, maka waktu sebagai fungsi jarak (invers dari f) dinyatakan dengan $t=f^{-1}(S)$, yaitu waktu yang diperlukan untuk menempuh jarak S km.

Tapi tidak setiap fungsi mempunyai invers. Perhatikan fungsi f : x□x^2 dari himpunan A ke himpunan B yang disajikan dengan himpunan pasangan berurutan {(-2,4),(-1,1),(1,1),(2,4),(3,9)}

Pada contoh pengendara motor, setiap selang 1 jam, pengendara menempuh jarak yang berbeda. Sementara pada himpunan pasangan terurut, 4 merupakan kuadrat dari -2 dan 2. Ini artinya terdapat x_1, $x_2 \in A$ dengan $x_1 \neq x_2$, tapi $f(x_1) \neq f(x_2)$ Dikatakan bahwa fungsi pada tabel kedua tidak mempunyai invers.

Definisi 5.2

Fungsi f disebut fungsi satu-satu jika f tidak pernah mencapai nilai yang sama lebih dari satu kali, yaitu $x_1 \neq x_2$ □ $f(x_1) \neq f(x_2)$ atau $f(x_1) = f(x_2)$ □ $x_1 = x_2$.

Uji Garis Horisontal

Sebuah fungsi bersifat satu-satu jika dan hanya jika tidak terdapat garis horisontal yang memotong grafik fungsi tersebut lebih dari satu kali.

Contoh

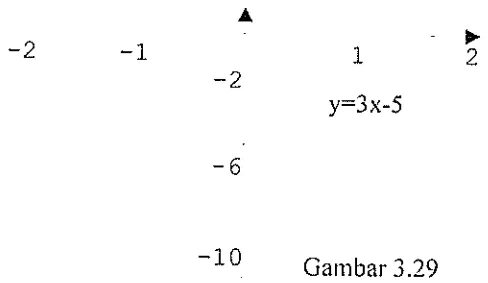
1. Misalkan diketahui $f(x)=3x-5$, akan ditunjukkan bahwa $f(x)$ fungsi satu satu dengan menggunakan definisi maupun dengan grafis.
2. Apakah $f(x)=x^2$ fungsi satu-satu?

Penyelesaian

1. Sesuai definisi misalkan diketahui $f(x_1)$ dan $f(x_2)$ dengan $f(x_1)= f(x_2)$

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ 3x_1 - 5 &= 3x_2 - 5 \\ 3x_1 &= 3x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Karena $f(x_1) = f(x_2)$ mengakibatkan $x_1 = x_2$, maka $f(x)=3x-5$ merupakan fungsi satu satu



Gambar 3.29

Dari grafik di samping bila ditarik garis horisontal sembarang, maka garis tersebut akan memotong garis y=3x-5 hanya di satu titik.

2. $f(x)=x^2$ bukan fungsi satu satu, sebab $-2 \neq 2$, tapi $f(-2)=f(2)=4$. Tidak sesuai dengan definisi)

   Dari grafik fungsi $y=x^2$, jika ditarik garis sembarang $y=c$, $c>0$, pasti akan memotong grafik fungsi di dua titik . (Tidak sesuai dengan uji garis horisontal)

Definisi 5.3

Misalkan f fungsi satu-satu dengan daerah asal A dan daerah nilai B. Maka fungsi invers dari f, yaitu f^{-1}, mempunyai daerah asal B dan daerah nilai A dan didefinisikan dengan

$f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y$ untuk setiap y di B

Contoh

Jika $f(1)=4$, $f(2)=8$, $f(5)=-1$, tentukan $f^{-1}(4)$, $f^{-1}(8)$, $f^{-1}(-1)$

Penyelesaian

Dari definisi f^{-1}, diperoleh $f^{-1}(4)=1$, $f^{-1}(8)=2$, $f^{-1}(-1)=5$

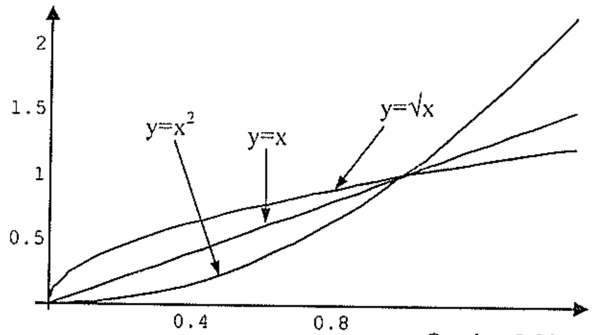
Langkah-langkah menentukan fungsi invers dari fungsi satu-satu

1. Tuliskan $y=f(x)$
2. Selesaikan persamaan $y=f(x)$ sehingga x dinyatakan dalam y
3. Untuk menyatakan f^{-1} sebagai fungsi dari x, tukarkan x dan y. Persamaan yang dihasilkan adalah $y=f^{-1}(x)$

Contoh

Tentukan invers dari fungsi $y=x^2$, $x\geq 0$, dan gambarkan grafik $y=f(x)$ dan $y=f^{-1}(x)$ dalam sistem koordinat yang sama.

Penyelesaian



Gambar 3.30

Menurut uji garis horisontal, fungsi $y=x^2$ bukanlah fungsi satu-satu. Tapi dengan dibatasinya domain $x\geq 0$, maka fungsi $y=x^2$ menjadi fungsi satu-satu. Sehingga mempunyai invers

$$y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Soal

Tentukan apakah fungsi berikut satu satu. Jika ya tentukan inversnya.

1. $f(x)=7x-4$
2. $f(x)=x^3$
3. $f(x)=x^3-1$
4. $f(x)=1-x^2$
5. $f(x)=1+3x^2$
6. $f(x)=(x+1)^3+2$
7. $f(x)=x^2-3x+2$
8. $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$
9. $f(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$
10. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

TUJUAN INSTRUKSIONAL

Umum

Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester I), mahasiswa mempunyai pemahaman konseptual yang benar tentang topik-topik utama dalam Kalkulus (limit, kekontinuan, diferensial, integral) beserta teorema dan sifat-sifat serata teknik-teknik penting didalamnya.

Khusus

Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 10), mahasiswa akan dapat menjelaskan konsep yang tepat tentang limit dan kekontinuan suatu fungsi, serta hubungan limit dan kekontinuan.

4. LIMIT DAN KEKONTINUAN FUNGSI

Limit fungsi di suatu titik dan di tak hingga merupakan konsep dasar materi kalkulus. Turunan dan integral yang merupakan materi inti kalkulus, dibangun dengan konsep limit. Untuk memahami konsep limit, dibutuhkan pengertian tentang harga mutlak sebagai jarak antara dua titik, dan pertidaksamaan sebagai ukuran kedekatan.

4.1. Konsep Limit Fungsi

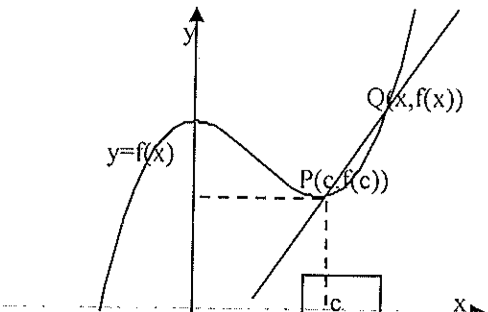
Bila kita mempunyai suatu fungsi yang peubah bebasnya menuju suatu titik tertentu di sumbu x, (artinya jarak antara peubah bebas dan titik tertentu tersebut semakin lama semakin mengecil tapi tidak harus sama dengan nol), apakah peubah tak bebasnya juga menuju suatu nilai tertentu di sumbu y. Atau, bagaimana perilaku peubah tak bebas jika peubah bebasnya membesar sampai tak hingga?

Untuk memahami konsep limit ini, perhatikan contoh berikut:

Masalah garis singgung

Misalnya diketahui grafik $y=f(x)$, dan akan ditentukan gradien garis singgung di titik $P(c, f(c))$.

Permasalahannya adalah untuk menentukan kemiringan suatu garis diperlukan paling sedikit dua titik.



Gambar 4.1

Karena yang diketahui hanya titik $P(c,f(c))$, maka untuk pertolongan ditetapkan satu titik, misalnya $Q(x,f(x))$, $x \neq c$. Kemiringan garis PQ (m_{PQ}) ditentukan dengan rumus:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Perhatikanlah dari grafik $y=f(x)$, bahwa jika x semakin dekat ke c, maka tali busur PQ berubah menjadi garis yang menyinggung kurva $y=f(x)$ di titik P, yang disebut garis singgung di titik P. Artinya ketika x semakin dekat ke c, gradien tali busur PQ menjadi gradien garis singgung di titik P

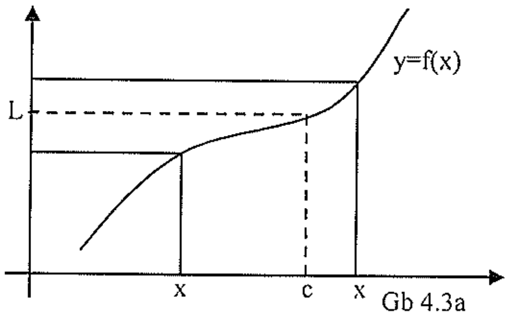
Bila m_{PQ} adalah gradien garis PQ, maka gradien garis singgung di titik P dinotasikan dengan m_P, dan dirumuskan dengan

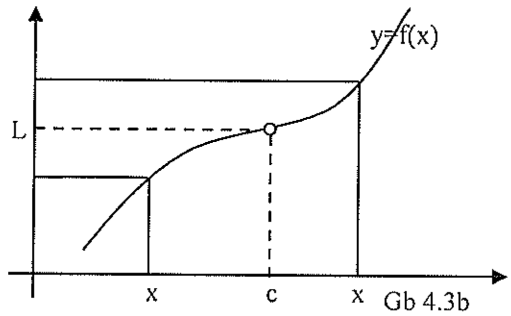
Ide Limit

Apa artinya bahwa suatu fungsi f mempunyai limit L ketika x mendekati satu titik c?. Suatu fungsi f mempunyai limit L ketika x mendekati satu nilai tertentu c, ditulis dengan notasi $\lim_{x \to c} f(x) = L$, mempunyai pengertian sebagai berikut:

"untuk setiap x yang cukup dekat dengan c tapi $x \neq c$, nilai f(x) dapat dibuat sedekat mungkin dengan L"

Perhatikan grafik berikut





Dari Gambar 4.3a, f terdefinisi di c. Untuk nilai x yang semakin dekat dengan c, nilai f(x) juga semakin dekat dengan L. Bagaimana jika f tidak terdefinisi di c?. Dari Gambar 4.3b terlihat, bahwa meskipun f tidak terdefinisi di c, nilai f(x) tetap saja semakin dekat dengan L.

a. Pendekatan Limit Secara Numerik

Contoh

Misalkan $f(x)=x^2$, dan c=3. Perhitungan secara numerik untuk $\lim_{x \to 3} x^2$ menghasilkan tabel sebagai berikut

x	f(x)=x^2	f(x)=x^2	x
2	4	16	4
2.5	6.25	12.25	3.5
2.7	7.29	10.89	3.3
2.8	7.84	10.24	3.2
2.9	8.41	9.61	3.1
2.99	8.9401	9.0601	3.01
2.999	8.994001	9.006001	3.001
2.9999	8.9994	9.0006	3.0001

Dari tabel tampak bahwa, bila x dibuat sedekat mungkin dengan 3, baik sebelum maupun sesudah 3, nilai f(x) semakin dekat dengan 9.

Berarti $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$

Contoh

Perhitungan numerik untuk $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ dihasilkan tabel sebagai berikut

x	f(x)=(x^2-4)/(x-2)	f(x)=(x^2-4)/(x-2)	x
1	3	5	3
1.5	2.25	6.25	2.5
1.7	2.89	5.29	2.3
1.8	3.24	4.84	2.2
1.9	3.61	4.41	2.1
1.99	3.9601	4.0401	2.01
1.999	3.996001	4.004001	2.001
1.9999	3.99960001	4.00040001	2.0001

Terlihat dari tabel $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$

Untuk x dekat dengan 2, tapi $x \neq 2$ kita dapat menyederhanakan $\dfrac{x^2-4}{x-2} = x+2$.

Sehingga mudah untuk dipahami bahwa untuk x yang semakin dekat dengan 2, f(x) akan dekat dengan 2+2=4

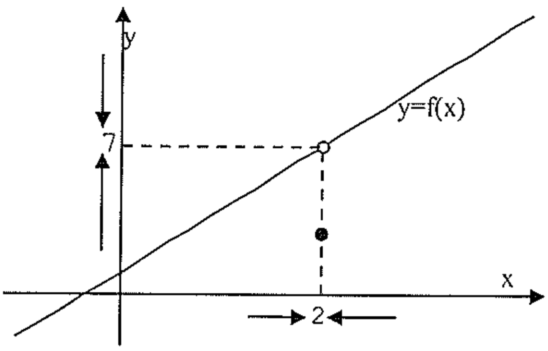
b. Pendekatan Limit Secara Grafik

Beberapa contoh berikut ini akan menggunakan grafik untuk menemukan limit suatu fungsi.

Contoh

Gambarkan grafik fungsi $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x \neq 2 \\ 3 \quad , & x = 2 \end{cases}$, dan gunakan grafik itu untuk mencari $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Penyelesaian



Gambar

Dari grafik untuk x mendekati 2, nilai f(x) mendekati 7. Pada kenyataannya, secara numerik, dengan memilih x sedekat mungkin dengan 2, nilai f(x) juga akan sedekat mungkin dengan 7. Terlihat bahwa f(2)=3, tapi $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 7$

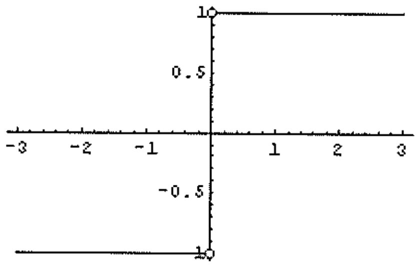
Dari contoh dan pemahaman limit di atas, dapat disimpulkan prinsip penting tentang limit, yaitu:

Limit L dari suatu fungsi y=f(x) ketika x mendekati suatu titik c tidak bergantung pada nilai f di c.

Contoh

Gunakan garfik untuk menemukan nilai, bila $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1\ , & x > 0 \end{cases}$

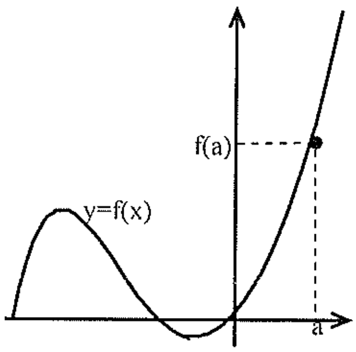
Penyelesaian



Gambar 4.5

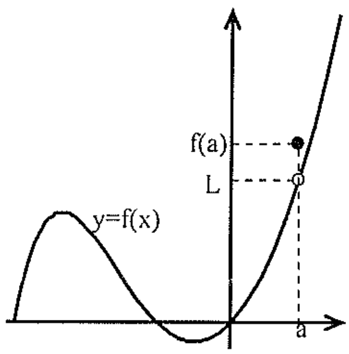
Dari grafik ketika x mendekati 0 dan negatif nilai f sama dengan -1, sedangkan ketika x mendekati 0 dan positif nilai f sama dengan 1. Karena untuk x mendekati 0 dihasilkan dua nilai f yang berbeda, maka $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ tidak ada.

Tiga contoh grafik fungsi berikut, mungkin dapat lebih membantu pemahaman tentang limit.



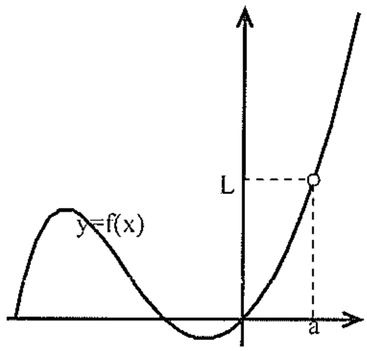
Gb 4.6a

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$



Gb 4.6b

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \neq f(a)$



Gambar

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, tapi f(a) tak terdefinisi

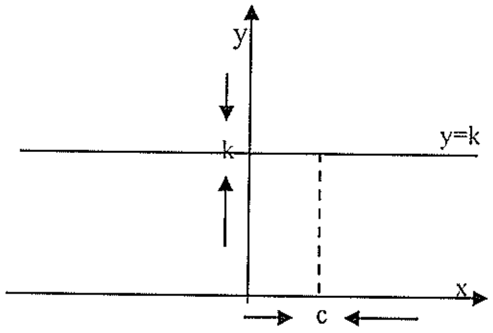
Contoh

Dengan menggunakan grafik tunjukkan, bahwa:

a. $\lim\limits_{x \to c} k = k$, dengan k sembarang bilangan real

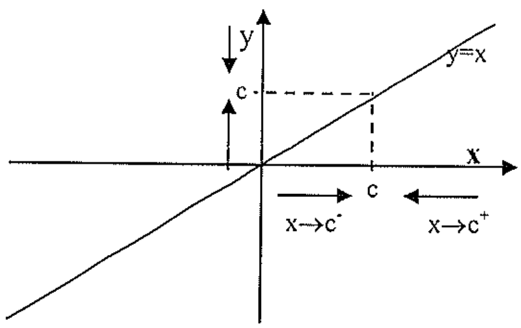
b. $\lim\limits_{x \to c} x = c$

Penyelesaian



Gambar

Fungsi f(x)=k adalah fungsi konstan, dengan grafiknya berupa garis mendatar. Untuk setiap titik c sembarang, bila x dekat dengan c, nilai f sama dengan k, sehingga $\lim\limits_{x \to c} k = k$



Gambar

Grafik fungsi f(x)=x berupa garis lurus yang membentuk sudut 45 derajat dengan sumbu x. Untuk titik c sembarang, bila x mendekati c, nilai f juga sama dengan c, sehingga $\lim\limits_{x \to c} x = c$

4.2. Sifat-sifat Limit Fungsi

Andaikan k suatu konstanta serta limit $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ dan $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ ada, maka:

1. Limit Jumlah

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

2. Limit Selisih

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) - g(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

3. Untuk setiap bilangan real k,

$$\lim_{x \to a} \left(kf(x)\right) = k \lim_{x \to a} f(x)$$

4. Limit Pembagian

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}, \quad \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

5. Limit dari $[f(x)]^n$

Jika n adalah bilangan bulat positif : $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x)\right)^n = \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)^n$

6. Limit dari $\sqrt[n]{f(x)}$

Jika n≥2 dan n bilangan bulat: $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

7. Untuk setiap fungsi polinomial $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$$

8. Teorema Apit

Jika $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk setiap x dalam interval buka yang memuat c (kecuali mungkin di c sendiri), dan $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ maka $\lim_{x \to a} g(x) = L$

Contoh

Dengan menggunakan sifat-sifat limit, tentukan nilai

a. $\lim_{x \to 3} 2(x+4)$ b. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

b. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$ d. $\lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$

Penyelesaian

a. Dengan menggunakan rumus limit konstanta dan limit x, serta sifat limit jumlah:

$$\lim_{x \to 3} 2(x+4) = \lim_{x \to 3} (2x+8)$$

$$= \lim_{x \to 3} 2x + \lim_{x \to 3} 8$$

$$= 2 \lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 8 = 2(3) + 8 = 14$$

b. Jawaban soal b tidak bisa menggunakan sifat limit pembagian, karena akan dihasilkan bentuk tak tentu 0/0

Karena $x \to 3$, berarti $x \neq 3$, sehingga $x - 3 \neq 0$, akibatnya

$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3$. Jadi $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} x + 3 = 6$

c. Jawaban soal c, analog dengan b, karena $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} = \frac{\lim_{x \to 2}(x^2 - 4)}{\lim_{x \to 2}(3 - \sqrt{x^2 + 5})} = \frac{0}{0}$

(bentuk tak tentu).

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} = \lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 4}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} \right) \left(\frac{3 + \sqrt{x^2 + 5}}{3 + \sqrt{x^2 + 5}} \right) = \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 - 4)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}{9 - (x^2 + 5)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(3+\sqrt{x^2+5})}{-(x^2-4)} = -\lim_{x\to 2}(3+\sqrt{x^2+5}) = -6$$

d. Karena h□0, berarti h≠0, sehingga dapat dilakukan operasi pembagian h/h=1 . Jadi

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x-(x+h)}{xh(x+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{xh(x+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x(x+h)} = \frac{1}{x^2}$$

Latihan

Tentukan nilai dari limit berikut

a. $\lim\limits_{t\to 2} t\sqrt{t^3-4}$

b. $\lim\limits_{x\to 1/2}(2x^4-8x^3+4x-5)$

c. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^3+5x}{3x-2}$

d. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

e. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

f. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{(x+h)^3}-\frac{1}{x^3}}{h}$

g. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2-\sqrt{x^2+3}}{1-x^2}$

h. Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$

i. Jika $1\le f(x)\le x^2+2x+2$ untuk setiap x, tentukan $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

4.3. Limit Fungsi

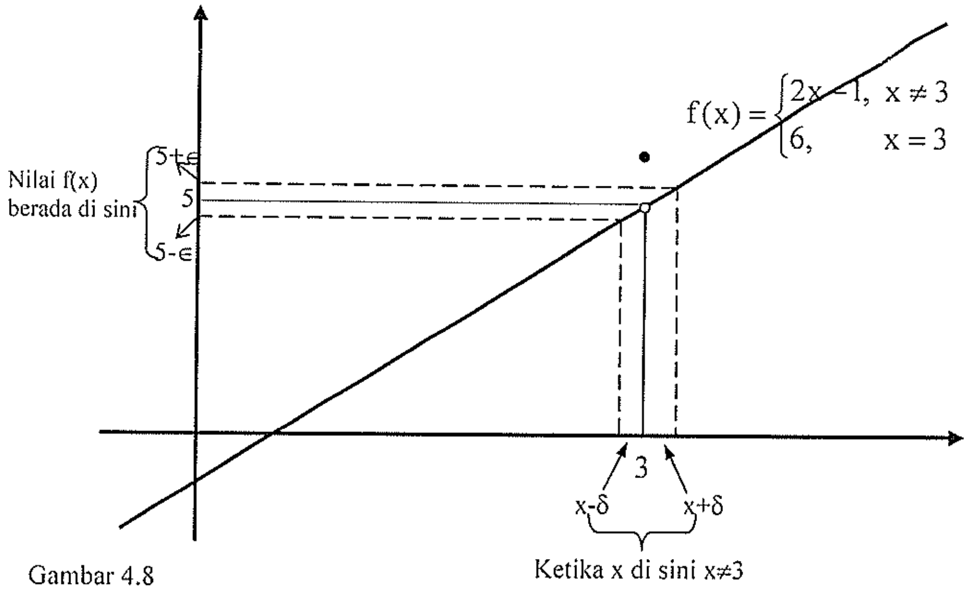
Definisi

Jika sebuah fungsi yang terdefinisi pada suatu selang buka yang memuat a, kecuali di a sendiri. Maka kita katakan bahwa limit f(x) untuk x mendekati a adalah L, dan ditulis

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta>0$ sedemikian sehingga $|f(x)-L|<\varepsilon$ bila $|x-a|<\delta$

Misalkan diketahui suatu fungsi $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\neq 3\\ 6, & x=3\end{cases}$



Gambar 4.8

Contoh:

Buktikan bahwa

a. $\lim\limits_{x\to 3}(4x-5)=7$

b. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x-3}=7$

c. $\lim\limits_{x\to -2}(x^2-1)=3$

d. $\lim\limits_{x\to -5}(4-\frac{3x}{5})=7$

e. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$

f. $\lim\limits_{x\to 3}x^2=9$

Penyelesaian

a. **Analisa**

Akan dibuktikan bahwa untuk sembarang bilangan positif kecil ε, $|(4x-5)-7|<\varepsilon$ bila $|x-3|<\delta$.

Padahal $|(4x-5)-7|=|4x-12|=|4(x-3)|=4|x-3|$, dan diinginkan $|(4x-5)-7|<\varepsilon$. Karena diketahui $|x-3|<\delta$, maka $|(4x-5)-7|<4\delta$, sehingga kita dapat memilih $\delta=\varepsilon/4$

Bukti

Diberikan sembarang $\varepsilon>0$, pilih $\delta=\varepsilon/4$, sehingga bila $|x-3|<\delta$., maka

$$|(4x-5)-7|=|4x-12|=|4(x-3)|=4|x-3|<4\delta=\varepsilon$$

Karena $|(4x-5)-7|<\varepsilon$ bila $|x-3|<\delta$, jadi terbukti $\lim\limits_{x\to 3}(4x-5)=7$

b. **Analisa**

Akan dibuktikan bahwa untuk sembarang bilangan positif kecil ε, $\left|\frac{x^2+x-12}{x-3}-7\right|<\in$ bila $|x-3|<\delta$.

Padahal $\left|\frac{x^2+x-12-7(x-3)}{x-3}\right|=\left|\frac{x^2-6x+9}{x-3}\right|=\left|\frac{(x-3)^2}{x-3}\right|$. Karena $|x-3|<\delta$,

maka $\left|\frac{x^2+x-12-7(x-3)}{x-3}\right|=|x-3|<\in$, sehingga dapat dipilih δ=ε

Bukti

Diberikan sembarang ε>0, pilih δ=ε, sehingga bila $|x-3|<\delta$, maka

$$\left|\frac{x^2+x-12-7(x-3)}{x-3}\right|=\left|\frac{x^2-6x+9}{x-3}\right|=\left|\frac{(x-3)^2}{x-3}\right|=|x-3|<\delta=\in$$

Karena $\left|\frac{x^2+x-12}{x-3}-7\right|<\in$ bila $|x-3|<\delta$, maka terbukti $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x-3}=7$

c. **Analisa**

Akan dibuktikan bahwa untuk sembarang bilangan positif kecil ε, $|(x^2-1)-3|<\varepsilon$ bila $|x-(-2)|<\delta$

Padahal $|(x^2-1)-3|=|x^2-4|=|(x-2)(x+2)|=|x-2||x+2|$

Menurut definisi, x□-2 berarti bahwa x mendekati -2 sedekat mungkin, tanpa harus sama dengan 2. Sehingga masuk akal jika jarak antara x dan -2 kurang dari 1, yaitu δ≤1. Jadi $|x-(-2)|<\delta\leq 1$

Sementara $|x-2|=|x+2-4|$, sehingga $|(x^2-1)-3|=|x+2||x-2|$

$$\begin{aligned}&=|x+2||x+2-4|\\&\leq|x+2|(|x+2|+4)\\&<\delta(\delta+4)\\&=\delta^2+4\delta\\&<5\delta=\varepsilon\end{aligned}$$

Bukti

Diberikan sembarang ε>0, pilih $\delta\leq\min\{1,\varepsilon/5\}$, sehingga jika $|x-(-2)|<\delta$, maka

$|(x^2-1)-3|=|x^2-4|=|(x-2)(x+2)|=|x-2||x+2|=|x+2||x+2-4|$

$$\leq|x+2|(|x+2|+4)$$

$<\delta(\delta+4)$

$=\delta^2+4 <5\delta=\varepsilon$

Penyelesaian contoh d,e dan f silakan diusahakan dibuktikan sendiri.

Definisi (Limit Kiri)

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ jika $\forall\ \varepsilon > 0 \exists\ \delta > 0 \ni$, $a-\delta<x<a \square |f(x)-L|<\varepsilon$

Definisi (Limit Kanan)

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ jika $\forall\ \varepsilon > 0 \exists\ \delta > 0 \ni$, $a<x<a+\delta \square |f(x)-L|<\varepsilon$

Teorema

1. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{x\to c} |f(x)| = L$
2. $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$

Teorema

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$

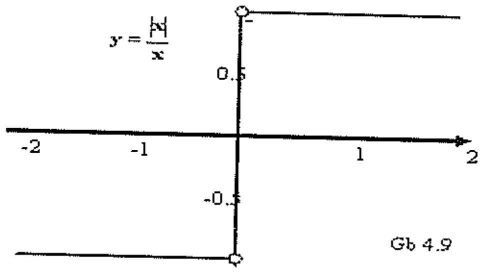
Contoh

Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

Penyelesaian.

Menurut definisi $|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$, sedangkan $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x}{x} = -1$. Karena $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} \neq \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$, maka $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ tidak ada.



Gb 4.9

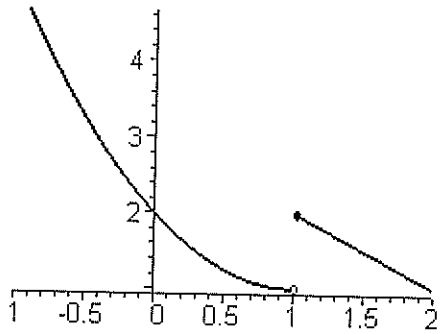
Contoh:

Jika $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+2, & x<1 \\ 3-x & ,x\geq 1\end{cases}$, tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Penyelesaian.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+2)=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(3-x)=2$

Karena $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, maka $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ tidak ada.

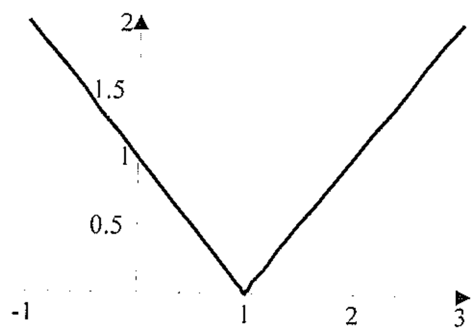


Gambar 4.10

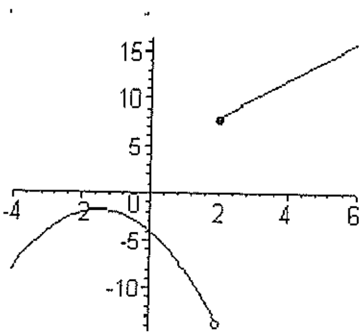
Latihan

1. Dari grafik berikut ini, tentukan apakah $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ ada

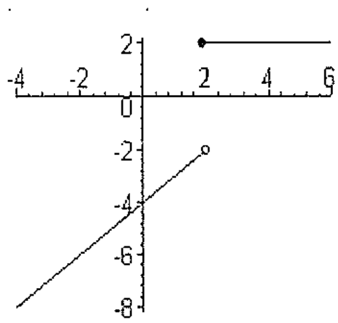
a.



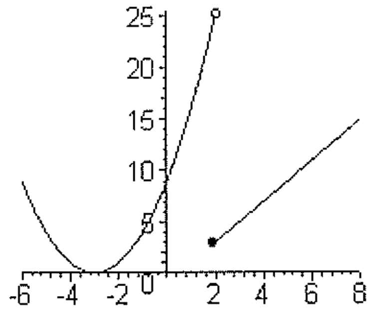
b.



c.



d.



2. Tentukan limit berikut ini , jika ada:

a. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2-9}{x-3}$

b. $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{|x-5|}{x-5}$

c. $\lim\limits_{x\to 2/3^-} [\![2x]\!]$

d. $\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{|x|-x}$

e. $\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{[\![x]\!]-x}$

f. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$

g. $\lim\limits_{x\to 1,5} \dfrac{2x^2-3x}{|2x-3|}$

h. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}$

i. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$

3. Adakah bilangan a sedemikian sehingga $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$ ada? Jika ada tentukan nilai a dan limitnya.

4. Tentukan limit kiri dan limit kanan dari fungsi berikut ini di titik c yang ditentukan, kemudian tentukan apakah limit fungsi di titik tersebut ada.

a. $f(x)=\begin{cases} 2x, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}, \quad c=0$

b. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & x\neq 3 \\ 6, & x=3 \end{cases}, \quad c=3$

c. $f(x)=\begin{cases} 3x-1, & x<1 \\ 4, & x=1, \\ 2x, & x>1 \end{cases} \quad c=1$

d. $f(x)=\begin{cases} 3x-1, & x<1 \\ 2, & x=1, \\ 2x, & x>1 \end{cases} \quad c=1$

e. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-1|}{x-1}, & x\neq 1 \\ 0, & x=1 \end{cases}, \quad c=1$

f. $f(x)=\begin{cases} 3x-1, & x<1 \\ \text{tak terdefinisi}, & x=1, \\ 2x, & x>1 \end{cases} \quad c=1$

5. Diketahui fungsi $f(x)=\begin{cases}\sqrt{15-5x}, & x<2\\ \sqrt{5} &, x=2\\ \sqrt{9-x^2} &, 2<x<3\\ x-2 &, x\geq 3\end{cases}$, tentukan

a. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ c. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ e. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

b. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ d. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ f. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

6. Diketahui fungsi $f(x)=\begin{cases}1, & \text{jika x bilangan bulat}\\ 0, & \text{jika x bukan bilangan bulat}\end{cases}$, tentukan

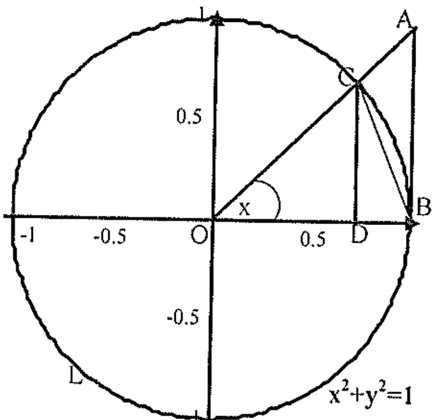
a. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\to ½} f(x)$ c. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ d. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

7. Tentukan

a. $\lim\limits_{x\to 1}\left(|x-3|+\dfrac{x}{|x-1|}\right)$

b. $\lim\limits_{x\to 2}\left(|x-3|+\dfrac{x}{|x-1|}\right)$

4.4. Limit Fungsi Trigonometri



Gb 4.11

Lingkaran L di samping berjari-jari 1 satuan OC=OB dengan CD⊥AB, dan x=∠(OA,OB)= ∠AOB, 0<x<π/2. Sehingga CD=sin x dan AB=tan x. Dari gambar disamping dapat disusun pertidaksamaan:

Luas ΔOCD<Luas juring OCB<Luas ΔOAB

$$0{,}5.\sin x < (x/2\pi).\pi < 0.5.\tan x$$

$$\cos x < (\sin x/x) < 1$$

Dari luas ΔOCD<luas juring OCB diperoleh sin x<x, 0<x<π/2. Dari sini diperoleh 0<sin x<x. Bila pertidaksamaan ini dikuadratkan, dikalikan dengan 2, kemudian menggunakan rumus trigonometri, diperoleh pertidaksamaan baru cos x>1-x^2/2. Jadi kita sudah mempunyai pertidaksamaan:

$$1-x^2/<\cos x<(\sin x/x)<1,\ 0<x<\pi/2$$

Dengan menggunakan teorema apit diperoleh $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Dari hasil ini diperoleh rumus limit fungsi trigonometri

a. $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \tan x = 0$

d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$

e. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

f. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x} = 1$

Contoh

Hitunglah limit fungsi trigonometri berikut ini:

1. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos x}{(x - \pi/2)}$

2. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x^2 - 3x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)\sin\dfrac{1}{x}$

Penyelesaian

1. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos x}{(x - \pi/2)} = \lim\limits_{x\to \pi/2} -\dfrac{\sin(\pi/2 - x)}{(\pi/2 - x)} = -\lim\limits_{x-\pi/2\to 0} \dfrac{\sin(\pi/2 - x)}{(\pi/2 - x)} = -1$

2. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos(2.\frac{1}{2}x)}{\sin(2.\frac{1}{2}x)} = \lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+(2\cos^2(\frac{1}{2}x)-1)}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x}$

$= \lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos(\frac{1}{2}x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} = 0$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x^2 - 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x(x-3)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{(x-3)} = -\dfrac{1}{3}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)\sin\dfrac{1}{x} = 0$

Soal

Tentukan limit berikut

1 $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{x\tan 3x}{\sin(2x^2)}$

2 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cot x}{x - \frac{\pi}{2}}$

$$3 \quad \lim_{x \to 4} \frac{\tan(x - \sqrt{x} - 2)}{x - 4}$$

$$4 \quad \lim_{x \to 1} \frac{\sin(x - 1)}{x^2 - x - 2}$$

4.5. Limit Tak Hingga

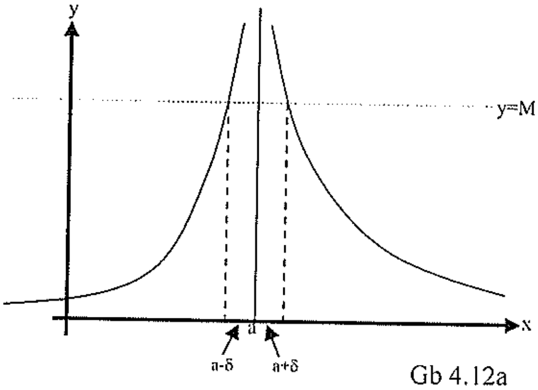
Definisi (Limit Tak Hingga)

Misalkan f sebuah fungsi yang terdefinisi pada selang buka yang memuat a, kecuali mungkin pada a sendiri, maka $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, berarti bahwa

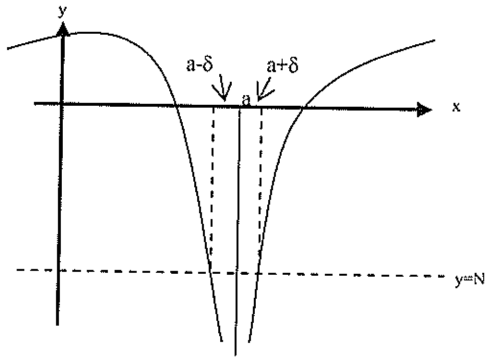
$$\forall\ M>0\ \exists\ \delta>0 \ni 0<|x-a|<\delta \ \square |f(x)>M$$

Misalkan f sebuah fungsi yang terdefinisi pada selang buka yang memuat a, kecuali mungkin pada a sendiri, maka $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, berarti bahwa

$$\forall\ N<0\ \exists\ \delta>0 \ni 0<|x-a|<\delta \ \square f(x)<N$$



Gb 4.12a



Gb 4.12b

Contoh

Tentukan

a. $\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{x+2}}{x-2}$ b. $\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x}-x}{x-2}$

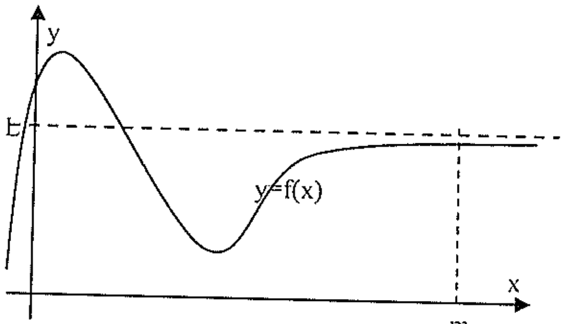
Penyelesaian

a. $$\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{x+2}}{x-2} = \frac{\lim_{x \to 2^-} \sqrt{x+2}}{\lim_{x \to 2^-} x-2} = \frac{2}{0} = \infty$$

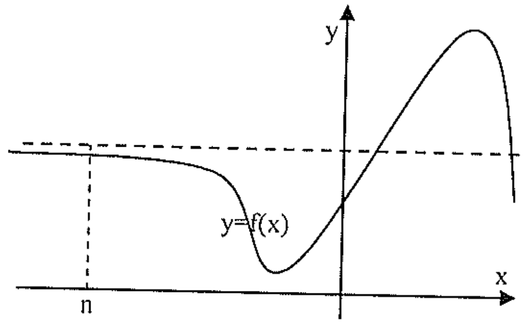
b. $$\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x}-x}{x-2} = \frac{\lim_{x \to 2^+} \sqrt{x}-x}{\lim_{x \to 2^+} x-2} = \frac{\sqrt{2}-2}{0} = \infty$$

a. Limit di Tak Hingga

- Misalkan fungsi f terdefinisi pada (a,∞). Limit fungsi f untuk menbesar tanpa batas adalah L ditulis $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ jika $\forall\varepsilon > 0 \exists m > 0 \ni x > m \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
- Misalkan fungsi f terdefinisi pada (-∞,c). Limit fungsi f untuk mengecil tanpa batas adalah L ditulis $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ jika $\forall\varepsilon > 0 \exists n > 0 \ni x < n \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$



Gb 4.13a
x→∞



-∞←x
Gb 4.13b

Contoh

Tentukanlah

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 1}$

b. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{2x^3 + 3x}$

Penyelesaian:

a. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1 - 2/x)}{x^2(2 + 1/x^2)} = \frac{1 - \lim_{x\to\infty} 2/x}{2 + \lim_{x\to\infty} 1/x^2} = \frac{1}{2}$$

b. $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{2x^3 + 3x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(1 - 2/x + 1/x^3)}{x^3(2 + 3/x^2)}$$

$$= \frac{1 - \lim_{x\to-\infty} 2/x + \lim_{x\to-\infty} 1/x^3}{2 + \lim_{x\to-\infty} 3/x^2} = \frac{1}{2}$$

b. Limit Tak Hingga di Tak Hingga

Limit tak hingga di tak hingga adalah kasus di mana $f(x) \to \infty$ bila $x \to \infty$

Definisi:

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ jika $\forall M > 0 \exists m > 0 \ni x > m \Rightarrow f(x) > M$

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ jika $\forall N > 0 \exists n > 0 \ni x > n \Rightarrow f(x) < N$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ jika $\forall M > 0 \exists m > 0 \ni x < m \Rightarrow f(x) > M$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ jika $\forall N < 0 \exists m > 0 \ni x < m \Rightarrow f(x) < N$

Contoh

Tentukan

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\sqrt{x}}{2x+x^2}\cos x$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} (x-1)\tan\dfrac{1}{x}$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2-x-2}}$

Penyelesaian

a. Untuk berapapun x, nilai $|\cos x| < 1$

Sehingga $\left|\dfrac{1-\sqrt{x}}{2x+x^2}\right||\cos x| < \left|\dfrac{1-\sqrt{x}}{2x+x^2}\right|$

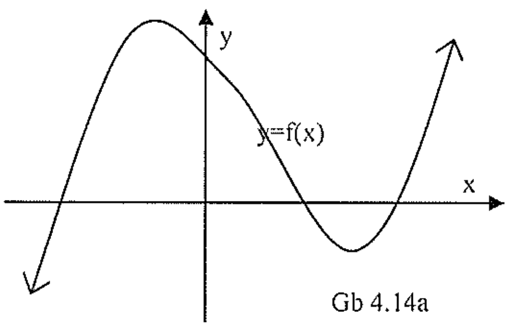
$\lim\limits_{x\to\infty}\left|\dfrac{1-\sqrt{x}}{2x+x^2}\right| = 0$, sehingga $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\dfrac{1-\sqrt{x}}{2x+x^2}\cos x\right| = 0$

Menurut teorema $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Jadi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sqrt{x}}{2x+x^2}\cos x = 0$

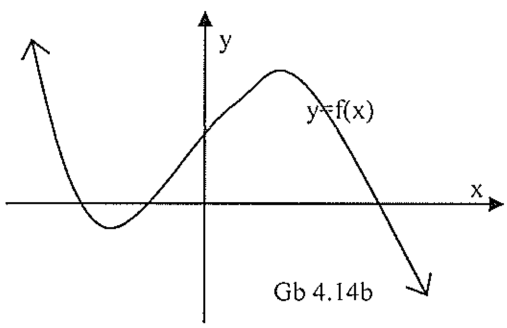
b. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)\tan\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x\tan\dfrac{1}{x} - \tan\dfrac{1}{x}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - \lim_{x\to\infty}\tan\frac{1}{x} = \lim_{\frac{1}{x}\to 0}\frac{\tan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - - \lim_{x\to\infty}\tan\frac{1}{x} = 1$$

c. Jawaban c silakan diselesaikan sendiri.



Gb 4.14a



Gb 4.14b

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ dan $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ dan $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

c. Bentuk-Bentuk Tak Tentu Limit Fungsi

Perhatikan limit fungsi trigonometri $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, dimana limit pembilang dan limit penyebutnya nol. Bentuk demikian disebut bentuk tak tentu. Bentuk-bentuk tak tentu yang lain adalah $\frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0.\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$. Bentuk tak tentu yang akan dibahas di sini adalah $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0.\infty$. Bentuk tak tentu yang lain akan dibahas setelah pembahasan fungsi berpangkat fungsi dan logaritma natural.

Contoh

Tentukan: a. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-\sqrt{x}-2}{x-4}$ $\qquad$ c. $\lim\limits_{x\to\infty} x.\sin\frac{1}{x}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-\sqrt{x}-2}{x-4}$ $\qquad$ d. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)$

Penyelesaian

a. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3}{4}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}(1+{}^{1}\!/\!_{\sqrt{x}})}{\sqrt{x}(2+{}^{1}\!/\!_{\sqrt{x}})} = \frac{(1+\lim\limits_{x\to\infty} {}^{1}\!/\!_{\sqrt{x}})}{(2+\lim\limits_{x\to\infty} {}^{1}\!/\!_{\sqrt{x}})} = \frac{1}{2}$$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} x.\sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} .\frac{\sin {}^{1}\!/\!_{x}}{{}^{1}\!/\!_{x}} = \lim\limits_{{}^{1}\!/\!_{x}\to\infty} .\frac{\sin {}^{1}\!/\!_{x}}{{}^{1}\!/\!_{x}} = \lim\limits_{t\to\infty} .\frac{\sin t}{t} = 1$

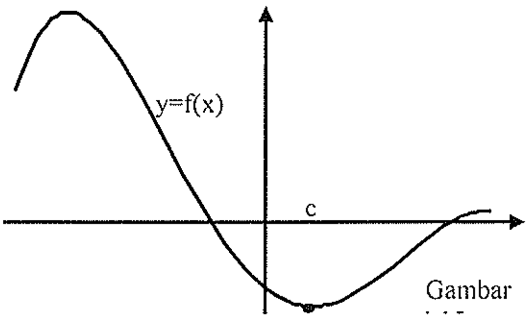
d. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-1-x}{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)} = 0$$

4.6. Kekontinuan Fungsi

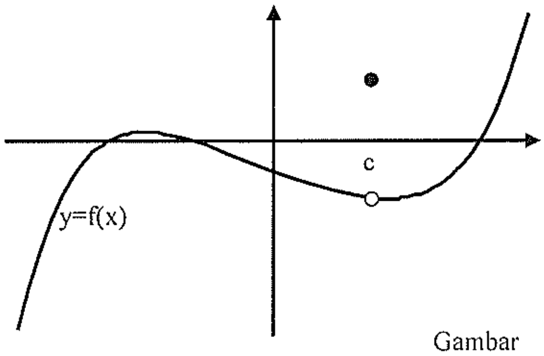
a. Kekontinuan Fungsi di Suatu Titik

Pernah dijumpai suatu fungsi dimana $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ ada dan sama dengan f(c), tapi kadang-kadang $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ ada sedangkan pada kenyataannya f(c) tidak ada (tak terdefinisi). Bagaimana hubungan antara $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ dan f(c)?. Berbagai kemungkinan hubungan itu dijelaskan oleh grafik berikut:



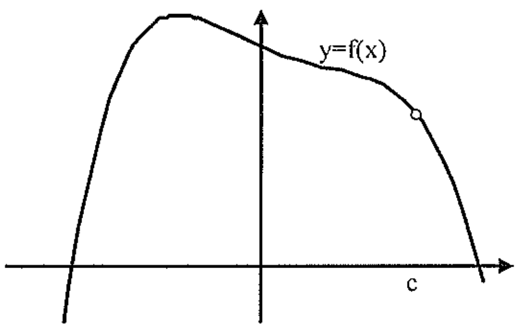
Gambar

$\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \lim\limits_{x \to c^-} f(x) = f(c)$



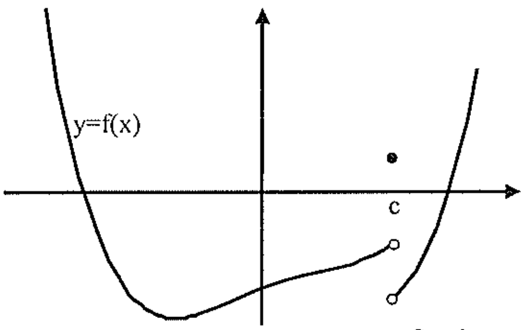
Gambar

$\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \lim\limits_{x \to c^-} f(x) \neq f(c)$



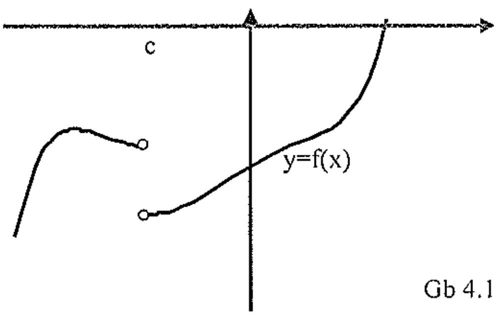
Gb 4.15c

$\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \lim\limits_{x \to c^-} f(x), f(c)$



Gambar

$\lim\limits_{x \to c^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to c^-} f(x) \neq f(c)$



Gb 4.15e

$\lim\limits_{x \to c^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to c^-} f(x)$, $f(c)$ tak terdefinisi

Definisi

Misalkan y=f(x) adalah fungsi yang terdefinisi pada interval buka yang memuat c. Jika

1. $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ ada.
2. Nilai f(x) untuk x=a ada, atau f(c) ada
3. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

maka dikatakan fungsi itu kontinu di x=c

Jika salah satu dari ketiga syarat tersebut tidak dipenuhi, maka dikatakan fungsi itu diskontinu di x=a

Sebagai contoh fungsi $f(x)=3x^3-5x+4$ kontinu di x=1, karena $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (3x^2 - 5x + 4) = 2$ dan f(1)=2. Sedangkan $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-2}$ diskontinu di x=2, karena f(2) tak terdefinisi.

Definisi Formal

Fungsi f dikatakan kontinu di titik c di daerah asalnya jika $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0 \ni$

$|x-c|<\delta$□$|f(x)-f(c)|<\varepsilon$

Contoh

Tentukan kontunuitas fungsi berikut di x=3

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{jika } x \neq 3 \\ 6 & \text{jika } x = 3 \end{cases}$ di x=3

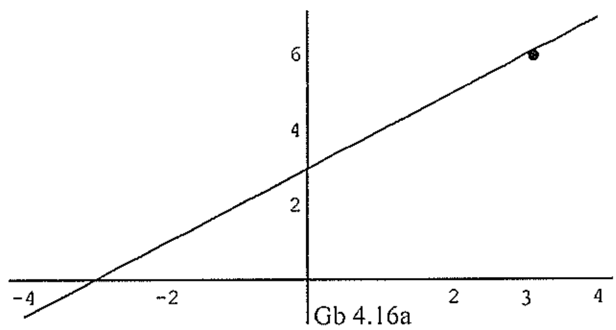
2. $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{jika } x \neq 0 \\ 2 & \text{jika } x = 0 \end{cases}$ di x=0

Penyelesaian

1.- $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = 6$

- f(3)=6
- $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$=f(3)

Jadi f(x) kontinu di x=3



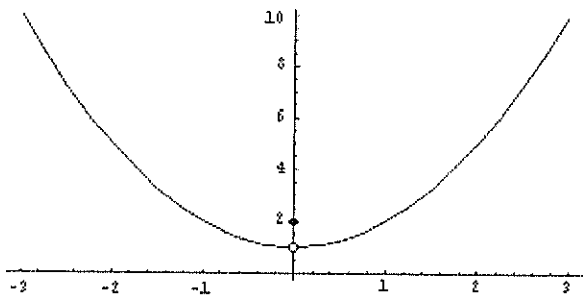
Gb 4.16a

2.- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 + 1) = 1$

- $f(0)=2$

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$

Jadi f(x) diskontinu di x=0



Gambar 4.16b

Definisi

Sebuah fungsi f kontinu dari kanan pada sebuah bilangan a, jika $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

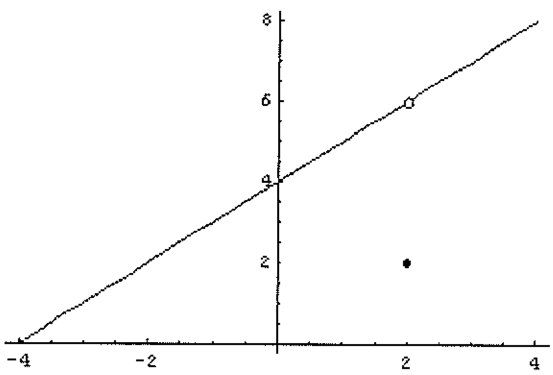
dan kontinu dari kiri pada a, jika $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Contoh.

Selidikilah apakah fungsi $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 2 & , x = 2 \end{cases}$ kontinu di x=2?

Penyelesaian

1. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x-4)}{x - 2} = -2$
2. f(2)=2
3. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$



Gambar 4.17

Sehungga $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 2 & , x = 2 \end{cases}$ diskontinu di x=2.

Sifat-sifat kekontinuan fungsi di satu titik

- Jika f dan g kontinu di c, maka f+g, f-g dan f.g juga kontinu di c
- Jika f dan g kontinu di c dengan $g(c)\neq 0$, maka f/g juga kontinu di c
- Jika f kontinu di g(c) dan g kontinu di c, maka fungsi komposisi f(g(x)) juga kontinu di c.

Sebagai contoh perhatikan fungsi $h(x)=\sqrt{3x^2+5}$, yang kontinu untuk semua $x\geq 0$.

Fungsi h dapat dinyatakan dengan $h=f\circ g$, dengan $f(x)=\sqrt{x}$ yang kontinu untuk

setiap $x\geq 0$ dan $g(x)=3x^2+5$.yang kontinu untuk setiap x. Karena $g(x)>0$ untuk setiap x, maka $h=f\circ g=\sqrt{3x^2+5}$ juga kontinu untuk setiap x

Contoh lain, perhatikan fungsi $h(x)=\sqrt{\dfrac{x^2}{x-1}}$. Fungsi h dapat dinyatakan sebagai komposisi $h=f\circ g$ dengan $f(x)=\sqrt{x}$ yang kontinu untuk $x\geq 0$, dan $g(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ yang kontinu untuk $x\neq 1$. Karena $g(x)\geq 0$ untuk $x>1$, maka h juga kontinu untuk $x>1$.

Latihan

1 Tentukan apakah fungsi berikut kontinu di titik yang ditentukan. Kemudian gambarkan pula grafik fungsinya.

a. $f(x)=|x-5|$, c=5

b. $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x<1\\ 4, & x=1\\ 2x, & x>1\end{cases}$, c=1

c. $f(x)=\begin{cases}4-3x^2, & x<0\\ 4, & x=0\\ \sqrt{16-x^2}, & 0<x<4\end{cases}$, c=0

d. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4+x} & , x \le 4 \\ \sqrt{\dfrac{x^2-16}{x-4}}, & x > 4\end{cases}$ c=4

2 Untuk fungsi-fungsi di bawah ini tentukan f(c) sehingga merupakan fungsi yang kontinu di c

a. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, c=2

b. $f(x)=\begin{cases}2x & , x>1 \\ 1+x, & x<1\end{cases}$, c=1

c. $f(x)=\dfrac{x^2+x-12}{x-3}$, c=3

d. $f(x)=\begin{cases}x^2+5x, & x<-1 \\ x-3 & , x>-1\end{cases}$, c=-1

3 Tentukan daerah sehingga fungsi berikut kontinu

a. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

b. $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$

c. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{2-x}}$

d. $f(x)=\sqrt{\dfrac{4}{x^2-1}}$

4 Diketahui fungsi $f(x)=\begin{cases}\sqrt{15-3x}, & x<2 \\ \sqrt{5} & , x=2 \\ \sqrt{9-x^2} & , 2<x<3 \\ [\![x-2]\!] & , x \ge 3\end{cases}$

a. Apakah f kontinu di 0?
b. Apakah f kontinu di 2?
c. Apakah f kontinu di 4?
d. Apakah f kontinu di 3?
e. Gambarkan grafik f.

b. Kekontinuan Pada Suatu Interval

Definisi

- Sebuah fungsi f kontinu pada interval buka (a,b) jika fungsi itu kontinu pada setiap bilangan $c \in (a,b)$.
- Sebuah fungsi f kontinu pada interval [a,b) jika fungsi itu kontinu pada (a,b) dan $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
- Sebuah fungsi f kontinu pada interval (a,b] jika fungsi itu kontinu pada (a,b) dan $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.
- Sebuah fungsi f kontinu pada interval [a,b] jika fungsi itu kontinu pada (a,b), $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ dan $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Contoh.

Apakah fungsi $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ kontinu pada interval [-1,1]?

Penyelesaian.

- Bila -1<a<1, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a}\left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)$

$$\begin{aligned} &= 1 - \lim_{x \to a} \sqrt{1 - x^2} \\ &= 1 - \sqrt{1 - a^2} \\ &= f(a) \end{aligned}$$

- Bila a=-1, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+}\left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)$

$$\begin{aligned} &= 1 - \lim_{x \to -1^+} \sqrt{1 - x^2} \\ &= 1 - \sqrt{1 - (-1)^2} \\ &= f(-1) \end{aligned}$$

- Bila a=1, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-}\left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)$

$$\begin{aligned} &= 1 - \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x^2} \\ &= 1 - \sqrt{1 - (1)^2} \\ &= f(1) \end{aligned}$$

Jadi $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ kontinu pada interval [-1,1].

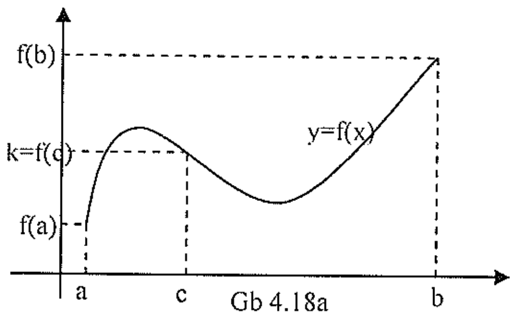
Sifat-sifat kekontinuan fungsi di suatu interval

- Jika fungsi f kontinu pada [a,b], maka f terbatas pada [a,b]
- Teorema Nilai Antara (TNA)

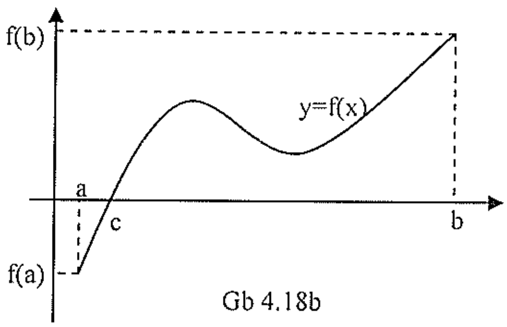
  Jika fungsi f kontinu pada [a,b], dan k terletak antara f(a) dan f(b), maka terdapat $c \in [a,b]$ sedemikian sehingga f(c)=k

  Gambar 4.17a adalah ilustrasi geometris dari TNA
- Akibat TNA

  Jika f kontinu pada [a,b] dan f(a).f(b)<0, maka terdapat $c \in [a,b]$ sedemikian sehingga f(c)=0. Diilustrasikan dengan Gambar 4.17b



Gb 4.18a



Gb 4.18b

Latihan

1. Tunjukkan bahwa fungsi berikut kontinu pada interval yang ditentukan

   a. $f(x) = x\sqrt{16 - x^2}$, [-4,4] b. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$, (-∞,3)

2. Jika f dan g keduanya fungsi kontinu dengan f(3)=5 dan $\lim\limits_{x \to 3} [2f(x) - g(x)] = 4$, tentukan g(3)!

3. Tentukan nilai c sehingga fungsi f dan g berikut ini kontinu di (-∞,∞)

   a. $f(x) = \begin{cases} cx + 1, & x \le 3 \\ cx^2 - 1, & x > 3 \end{cases}$

   b. $g(x) = \begin{cases} x^2 - c^2, & x < 4 \\ cx + 20, & x \ge 4 \end{cases}$

   c. $h(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 3 \\ 5 - x, & x \ge 3 \end{cases}$

4. Tentukan konstanta c dan d agar fungsi berikut ini kontinu di interval tutup [0,4]

$$f(x) =, \begin{cases} [\![x]\!] & , -2 < x < 1 \\ 2cx + d, & 1 \le x < 2 \\ x^2 + 3d, & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

5. Tentukan konstanta p dan q, sehungga fungsi berikut ini kontinu di R

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + 5, & x < -1 \\ p & , \ x = -1 \\ qx + 6 & , \ x > -1 \end{cases}$$

6. Tentukan nilai k sehingga fungsi f berikut ini kontinu di x=2

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x+5} - \sqrt{x+7}}{x-2}, & x \ne 2 \\ k & , \ x = 2 \end{cases}$$

7. Dengan konsep komposisi, tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = \dfrac{x-1}{4 - \sqrt{x^2 - 9}}$ kontinu di daerah asalnya.
8. Untuk fungsi berikut ini gunakan teorema nilai antara (bukan dengan memfaktorkan) untuk menemukan interval terkecil samoai dengan 2 tempat desimal dimana pembuat nol dari f(x) berada.
   a. $f(x) = x^3 - 3x$ pada [-2,2]
   b. $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2} - 1$
   c. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x} - 2$

Latihan

1. Tentukan nilai limitnya
   a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{4+x} - \dfrac{1}{4}\right)$
   b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{(2+x)^2} - \dfrac{1}{4}\right)$
   c. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+3)^2 - 9}{x}$
2. Gambarkan grafik fungsi $f(x) = x - [\![x]\!]$ pada $[-3,3]$

3. Diketahui $f(x)=\dfrac{x^2-6x-16}{\left(x^2-7x-8\right)\sqrt{x^2-4}}$
   a. Tentukan daerah sehingga f(x) terdefinisi
   b. Tentukan titik diskontinu f(x)
4. Tentukan a,b,c dan d sehingga fungsi berukut kontinu untuk setiap x

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}, & -\infty<x<0\\ a, & x=1\\ b(x-c)^2, & 1<x<4\\ d, & x=4\\ 2x-8, & 4<x<\infty\end{cases}$$

5. Apakah masing-masing fungsi berikut ini kontinu atau diskontinu? Jelaskan!
   a. Suhu pada lokasi tertentu sebagai fungsi waktu
   b. Tarif taksi sebagai fungsi jarak yang ditempuh
   c. Upah karyawan sebagai fungsi dari waktu.
   d. Denyut jantung manusia setiap waktu.
   e. Curah hujan yang diukur pada stasiun cuaca.
6. Dengan menggunakan grafik $f(x)=\frac{1}{x}$, tentukan bilangan δ sedemikian sehingga $\left|\frac{1}{x}-0.5\right|<0.2$ bila $|x-2|<\delta$
7. Sebuah tungku dipergunakan dalam penelitian untuk menentukan bagaimana cara terbaik untuk membuat kristal yang dipergunakan dalam komponen elektronik pesawat ulang-alik.
   Untuk pertumbuhan kristal yang baik, suhu harus dikendalikan secara akurat dengan menyesuaikan daya masukan. Misalkan hubungan dirumuskan dengan: $T(w)=0{,}1w^2+2{,}155w+20$, dimana T=suhu(^{0}C), w=daya masukan (watt), tentukan
   a. Berapa daya yang diperlukan untuk menjaga suhu pada 200^0C
   b. Jika suhu bervariasi $\pm 1^0$C dari 200^0C, berapa rentang daya yang dipergunakan untuk daya masukan ?
   c. Dalam bentuk definisi limit, apa yang merupakan x, f(x), a, L, ε dan δ?
8. Tarif parkir di suatu super market adalah 3 dollar untu satu jam pertama atau sebelumya, dan setelah itu 2 dollar setiap satu jam berikutnya atau

sebelumnya. Bila setelah 5 jam tarif parkir dianggap sehari dengan tarif 10 dollar:

a. Sketsakan fungsi yang menggambarkan tarif parkir tersebut

b. Apakah sketsa a, merupakan fungsi kontinu/diskontinu?

9. Laju perubahan muatan listrik terhadap waktu dinamakan arus listrik. Apabila $\frac{1}{3}t^3 + t$ coulomb muatan mengalir melalui suatu kawat penghantar dalam t detik, tentukan besarnya arus listrik dalam ampere setelah 3 detik.

10. Sebuah kota dijangkiti oleh epidemi influensa. Petugas menaksir bahwa sampai dengan 40 hari setelah mulainya epidemi, banyaknya warga yang sakit flu dirumuskan dengan $p(t)=120t^2-2t^3$. Dengan laju berapa menularnya virus itu pada hari ke 10.

11. Populasi penduduk di suatu kelurahan X diberikan seperti tabel berikut

Tahun	1991	1993	1995	1997
X	793	820	839	874

a. Tentukan laju pertumbuhan rata-rata

1. dari 1991 sampai dengan 1995
2. dari 1995 sampai dengan 1997

b. Tentukan laju pertumbuhan sesaat tahun 1995, dengan mengambil rata-rata dari dua laju pertumbuhan rata-rata.

c. Taksir pertumbuhan sesaat pada tahun 1995

12. Biaya produksi x unit komoditas tertentu adalah $C(x)=5000+10x+0{,}05x^2$

a. Tentukan rata-rata laju perubahan dari C terhadap x ketika tingkat produksi diubah

1. dari $x=100$ sampai $x=105$
2. dari $x=100$ sampai $x=101$

b. Tentukan laju perubahan sesaat dari C, terhadap x untuk $x=100$

13. Seorang biksu meninggalkan kuil pada pukul 07.00 dan mengikuti jalan ke puncak, gunung dan tiba pukul 19.00. Pagi hari berikutnya, mulai pukul 07.00 turun mengikuti rute semula dan tiba pukul 19.00. Gunakan teorema nilai antara untuk memperlihatkan bahwa terdapat lokasi di mana biksu itu melewatinya pada saat yang sama.

TUJUAN INSTRUKSIONAL

Umum

Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester I), mahasiswa mempunyai pemahaman konseptual yang benar tentang topik-topik utama dalam Kalkulus (limit, kekontinuan, diferensial, integral) beserta teorema dan sifat-sifat serata teknik-teknik penting didalamnya.

Khusus

Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 14), mahasiswa akan dapat menjelaskan pengertian turunan sebagai suatu limit fungsi, hubungan turunan dan kekontinuan, aturan rantai, turunan fungsi aljabar,turunan fungsi invers, turunan fungsi trigonometri, turunan fungsi eksponensial, turunan fungsi siklometri., turunan fungsi hiperbolik.

5. TURUNAN

Dalam bab ini, mulai dibahas mengenai kalkulus diferensial, yang berkenaan dengan perubahan suatu besaran terhadap besaran yang lain. Konsep utama dari pembahasan ini adalah turunan, yang merupakan pengembangan dari konsep limit yang sudah dibahas sebelumnya. Juga akan dibahas, bagaimana penafsiran turunan sebagai laju / kecepatan, kemudian cara menghitung limit, dan penggunaan turunan untuk memecahkan masalah yang menyangkut laju perubahan lainnya.

5.1 Masalah –masalah yang ditafsirkan sebagai turunan

- Pada saat membicarakan limit, telah dibahas sebuah contoh gradien garis singgung pada sebuah kurva $y=x^2$ di titik P(2,4), yaitu $m_P = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$
- Misalkan sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian tertentu dengan panjang lintasan setelah x detik adalah x^2 meter, maka kecepatan bola pada saat x=2, ditentukan dengan cara sebagai berikut.

  Kecepatan rata-rata adalah hasil bagi antara jarak dan waktu selama selang waktu tertentu. Sehingga bila selang waktunya [2,x], maka kecepatan rata-rata selama selang waktu itu adalah $v(x) = \dfrac{S(x)-S(2)}{x-2} = \dfrac{x^2-4}{x-2}$. Dengan menggunakan konsep limit, dapat dicari kecepatan jatuhnya bola setelah 2 detik, yaitu

  $$v(2) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$
- Misalkan diketahui sebuah tongkat yang tak homogen (massa di setiap titiknya tidak sama), dengan panjang 50 cm, dengan massa dari titik 0 sampai titik yang berjarak x cm adalah x^2 gram. Maka rapat massa di titik yang berjarak 2 cm ditentukan dengan cara sebagai berikut

  Rapat massa adalah hasil bagi antara massa dan panjang tongkat pada jarak tertentu. Sehingga rapat massa pada jarak [2,x] adalah

$$\rho = \frac{m(x)-m(2)}{x-2} = \frac{x^2-4}{x-2}$$

Dengan konsep limit, dapat dicari rapat massa di titik yang berjarak 2 cm, yaitu:

$$\rho = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

Dari ketiga contoh di atas, jika diketahui suatu fungsi y=f(x), maka besaran yang dicari adalah

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

Dalam kalkulus, besaran ini menyatakan **laju perubahan fungsi f(x) terhadap x** di titik x=2, yang selanjutnya disebut **turunan** f(x) dititik x=2

5.2 Turunan

Definisi 5.1

Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval buka yang memuat c. Turunan fungsi f di titik c, ditulis dengan f', didefinisikan dengan

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \text{ atau } f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

asal limit tersebut ada.

Contoh

1. Diketahui $f(x)=x^3+x^2$ dan $g(x)=\sqrt{x-1}$. Tentukan
   a. Turunan dari f dan g
   b. Sketsakan grafik f dan f ‘, serta g dan g ‘
2. Tentukan $f'(5)$ dari fungsi $f(x)=\sqrt{x}$

Penyelesaian

1. a. $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3+(x+h)^2-(x^3+x^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + x^2 + 2xh + h^2 - x^3 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 + 2x + h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 + 2x + h)$$

$$= 3x^2 + 2x$$

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(x+h)-1} - \sqrt{x-1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(x+h)-1} - \sqrt{x-1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{(x+h)-1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{(x+h)-1} + \sqrt{x-1}}$$

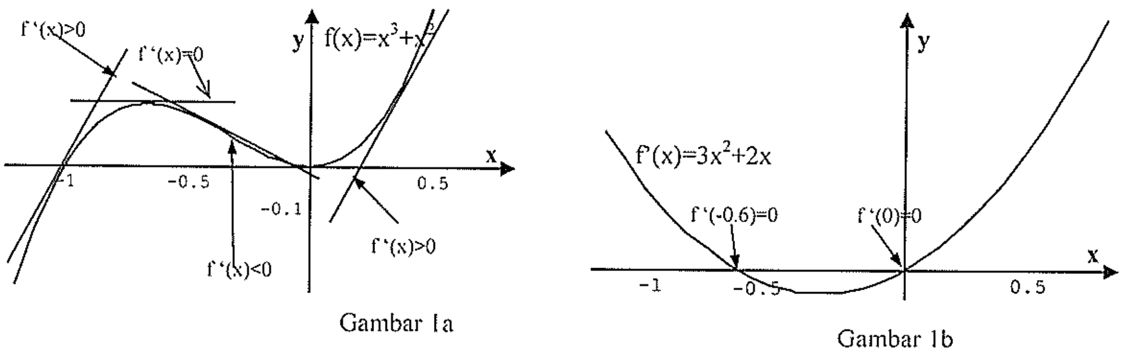
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - 1 - (x-1)}{h\left(\sqrt{(x+h)-1} + \sqrt{x-1}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{(x+h)-1} + \sqrt{x-1}\right)}$$

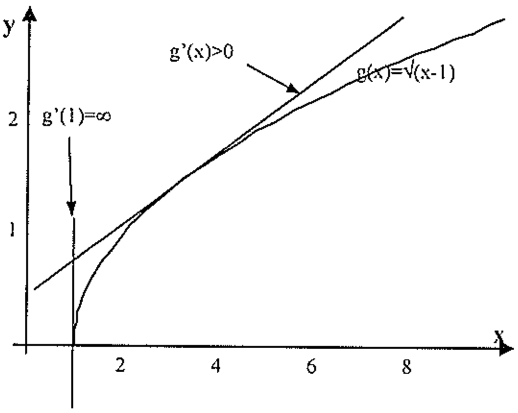
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{(x+h)-1} + \sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

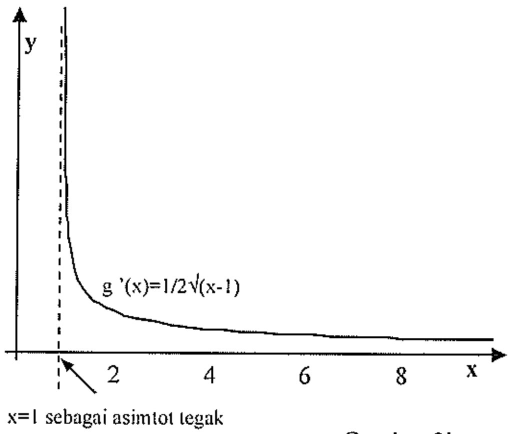
b. Grafik f dan f ', serta g dan g '



Grafik kiri adalah grafik $y=x^3+x^2$, grafik kanan adalah $y=3x^2+2x$. Dapat dilihat pada grafik kiri, gradien garis singgungnya pada titik x=0 dan x=-0.6 mendatar, sehingga f '(0)=0 dan f '(0.6)=0, seperti yang ditunjukkan pada grafik $y=3x^2+2x$. Kemudian untuk $x \in (-\infty, -0.6]$ dan $x \in [0, \infty)$, gradient garis singgung pada $y=x^3+x^2$ di titik itu positif (kemiringannya positif), pada grafik $y=3x^2+2x$ untuk x di dalam interval tersebut grafik fungsinya di atas sumbu x. Untuk $x\in(-0.6,0)$, gradient garis singgung pada $y=x^3+x^2$ di titik itu negatif, pada grafik $y=3x^2+2x$ untuk x di dalam interval tersebut grafik fungsinya di bawah sumbu x



Gambar 2a



Gambar 2b

Grafik kiri adalah grafik y=√(x-1), grafik kanan adalah y=1/2√(x-1). Garis singgung kurva y=√(x-1) di titik x=1 tegak sehingga gradiennya tak hingga, di grafik y=1/2√(x-1) digambarkan dengan garis x=1 sebagai asimtot, artinya g'(x)□∞ untuk x□1. Untuk x semakin besar digambarkan dengan semakin kecilnya nilai g'(x) yang asimtot terhadap garis y=0

2. $$f'(5) = \lim_{x\to 5} \frac{f(x)-f(5)}{x-5}$$
$$= \lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}$$
$$= \lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)}$$
$$= \lim_{x\to 5} \frac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

Atau dapat juga dicari $f'(x)$ kemudian substitusikan nilai x=5

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\,\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Bila x=5 maka $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{5}}$

5.3 Sifat-sifat Turunan

1. Jika $f(x) = k$, k konstanta maka $f'(x) = 0$

   Bukti

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

2. Jika $f(x) = x^n$, n bilangan asli, maka $f'(x) = nx^{n-1}$

   Bukti

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

karena $(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-1}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, maka dengan menganggap $x+h = a$ dan $x = b$ dihasilkan

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left((x+h)-x\right)\left((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-3}x^2 + \ldots(x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-3}x^2 + \ldots(x+h)x^{n-2} + x^{n-1})}_{\text{ada n suku yang masing-masing} = x^{n-1} \text{ ketika } h \to 0}$$

$$= nx^{n-1}$$

3. Diketahui $u'(x)$, $v'(x)$ dan $k \in R$

i. Jika $f(x) = u(x) + v(x)$, maka $f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Bukti

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) + v(x+h) - u(x) - v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(u(x+h) - u(x)) + (v(x+h) - v(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

$$= u'(x) + v'(x)$$

ii. Jika $f(x) = ku(x)$, maka $f'(x) = ku'(x)$

iii. Jika $f(x) = u(x)v(x)$, maka $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

iv. Jika $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$, maka $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$

Bukti

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{u(x+h)} - \frac{1}{u(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{u(x+h)} - \frac{1}{u(x)} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} - \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \frac{1}{u(x)u(x+h)}$$

$$= -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$$

v. Jika $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, maka $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

Sifat ii, iii dan v silakan dibuktikan sendiri.

4. Jika $f(x) = x^n$, n bilangan bulat, maka $f'(x) = nx^{n-1}$

Bukti

vi. n bilangan asli, telah dibuktikan pada pembuktian sifat 2

vii. n=0 sudah dibuktikan pada pembuktian sifat 1

viii. n bilangan negatif $\Rightarrow$ terdapat m bilangan asli sedemikian sehingga n=-m.

Jadi $x^n = x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$, kemudian gunakan pembuktian pada sifat 2 dan 3(iv)

5. Jika $f(x) = x^n$, n bilangan rasional, maka $f'(x) = nx^{n-1}$

(Dibuktikan kemudian)

6. Jika $f'(a)$ ada maka f kontinu di a

Bukti

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) + f(a) \\
&= \underbrace{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{f'(a)} \lim_{x\to a}(x-a) + \lim_{x\to a} f(a) \\
&= f'(a) \lim_{x\to a}(x-a) + \lim_{x\to a} f(a) \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

5.4 Tafsiran Geometris dari Turunan

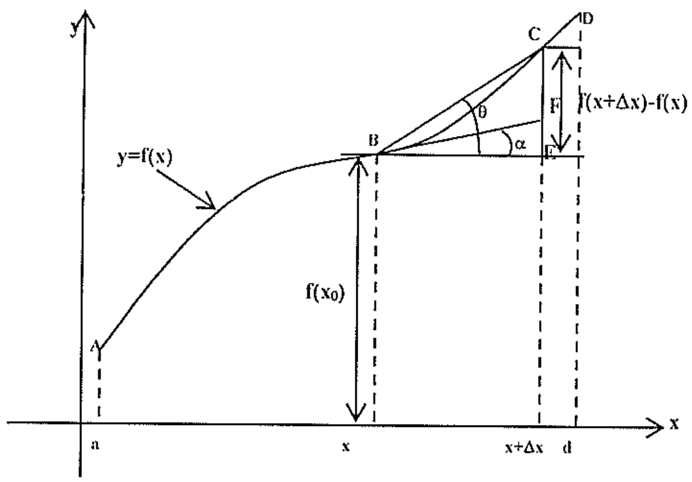
Misalkan grafik fungsi y=f(x) dapat dinyatakan oleh kurva ABCD, kemiringan tali busur yang menghubungkan titik BC dinyatakan dengan :

$$\frac{CE}{BE} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x - x} = \tan\theta$$

Jika $\Delta x \to 0$ maka tali busur BC mendekati garis singgung BF di titik B, sehingga

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{FE}{BE} = \tan\alpha$$

merupakan kemiringan garis singgung di titik B.



Gambar 3

5.5 Turunan Kiri dan Turunan Kanan

Seperti halnya konsep limit dan kekontinuan, turunan juga mempunyai definisi turunan kiri dan turunan kanan seperti berikut

Definisi 5.2

- Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval (a,c], turunan kiri fungsi f di x=c, ditulis $f'_-(c)$ didefinisikan dengan $f'_-(c) = \lim\limits_{x \to c^-} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$
- Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval [c,d), turunan kiri fungsi f di x=c, ditulis $f'_+(c)$ didefinisikan dengan $f'_+(c) = \lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$

Teorema 5.1

Misalkan f terdefinisi pada suatu interval yang memuat c, maka fungsi f diferensiabel di x=c jika dan hanya jika $f'_-(c) = f'_+(c)$

Contoh

Tunjukkan bahwa f(x)=|x| tidak diferensiabel di x=0

Penyelesaian

Sesuai definisi $|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$

Sehingga $f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

Karena $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, maka f(x)=|x| tidak diferensiabel di x=0.

Notasi Leibniz

Jika y=f(x), maka pertambahan y pada kurva f adalah sebesar $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Bila $f'(x)$ ada, maka

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$\frac{dy}{dx}$ disebut dengan notasi Leibniz.

5.6 Diferensial

Telah dibahas di depan, bahwa jika f(x) mempunyai turunan, maka $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Ini artinya untuk $\Delta x \approx 0 \Rightarrow f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow \Delta y \approx f'(x)\Delta x$

Definisi 5.3

i. Diferensial dari x ditulis dx dan didefinisikan dengan $dx = \Delta x$
ii. Diferensial dari y ditulis dy dan didefinisikan dengan $dy = f'(x)\,\Delta x = f'(x)\,dx$

Bila $dx = \Delta x$ adalah pertambahan kepada x, maka $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ dinamakan pertambahan y=f(x). Jika f(x) kontinu dan mempunyai turunan yang kontinu dalam interval tertentu, maka

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon \Delta x = f'(x)dx + \varepsilon dx, \text{ dimana } \varepsilon \to 0 \text{ jika } \Delta x \to 0$$

Pernyataan $dy = f'(x)dx$ disebut diferensial dari y (atau bagian utama dari Δy). Perhatikan bahwa $\Delta y \neq dy$. Tetapi jika $\Delta x = dx$ sangat kecil, maka dy merupakan suatu aproksimasi yang cukup bagus untuk Δy. Jadi $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$

Turunan fungsi pangkat rasional (Pembuktian sifat turunan sifat ke 4)

Jika $f(x) = x^n$, n bilangan rasional, maka $f'(x) = nx^{n-1}$

Bukti.

Karena n bilangan rasional, maka menurut definisi dapat ditulis $n = \frac{p}{q}$, dengan p bilangan bulat dan q bilangan asli. Sehingga $y = x^{\frac{p}{q}} \Leftrightarrow y^q = x^p$. Dengan menggunakan notasi Leibniz untuk turunan fungsi pangkat bilangan bulat dan bilangan asli, diperoleh

$$qy^{q-1}\frac{dy}{dx} = px^{p-1} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{px^{p-1}}{q\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}} = \frac{p}{q}x^{p-1-(p-\frac{p}{q})} = nx^{-1+n} = nx^{n-1}$$

Definisi 5.4

Suatu fungsi dikatakan dapat dideferensialkan (*differensiabel*) di titik x=a, bila f '(a) ada, (turunannya di titik x=a ada) dan dapat dideferensialkan pada (a,b) jika f '(x) ada untuk setiap $x \in (a,b)$

Contoh

Tentukan x sehingga $f(x) = |x-1|$ diferensiabel. Gambarkan pula grafik f(x)

Penyelesaian

Sesuai definisi, $f(x) = |x-1| = x-1, x \geq 1$

$= 1 - x,\ x < 1$

Akan diselidiki untuk x>1, x<1, dan x=1

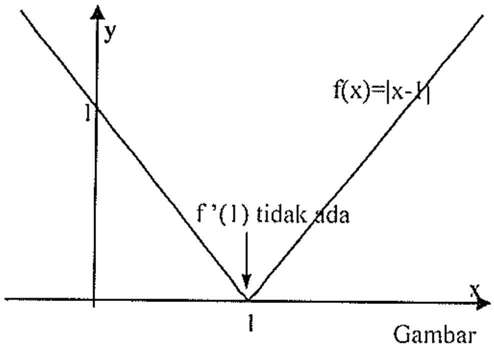
- Untuk c>1, $\lim\limits_{x \to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim\limits_{x \to c}\frac{|x-1|-|c-1|}{x-c} = \lim\limits_{x \to c}\frac{x-1-c+1}{x-c} = 1$
- Untuk c<1, $\lim\limits_{x \to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim\limits_{x \to c}\frac{|x-1|-|c-1|}{x-c} = \lim\limits_{x \to c}\frac{1-x-1+c}{x-c} = -1$
- Untuk c=1, akan diselidiki apakah f '(1) ada, artinya apakah $\lim\limits_{x \to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ada.

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{|x-1|-0}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x-1}=1$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{|x-1|-0}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{1-x}{x-1}=-1$$

Karena $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$, maka $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ tidak ada. Sehingga $f(x)$ tidak diferensiabel di x=1

Jadi $f(x)=|x-1|$ diferensiabel di $x\in(-\infty,1)\cap(1,\infty)$, di x=1 f(x) tidak diferensiabel



Gambar

Bilamana suatu fungsi dikatakan tidak diferensiabel?

1. Dari contoh f(x)=|x-1|, f(x) tidak diferensiabel di x=1, karena grafiknya mempunyai patahan atau sudut di x=1.

   Bila suatu fungsi mempunyai patahan atau suatu sudut di titik tertentu, maka fungsi itu tidak diferensiabel di titik tersebut

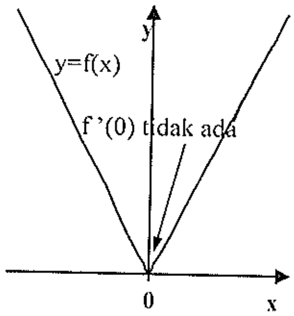
2. Kontraposisi dari teorema di atas adalah

   f(x) diskontinu di x=a→f(x) tidak diferensiabel di x=a

   Artinya bila suatu fungsi mempunyai titik diskontinu, maka fungsi itu tidak diferensiabel di titik tersebut.

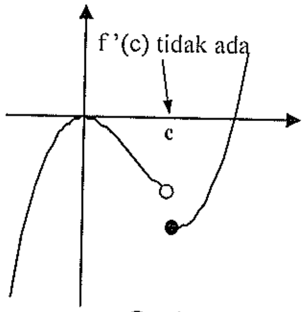
3. Suatu fungsi yang garis singgungnya tegak di x=a, dikatakan tidak diferensiabel di x=a. Hal ini dikarenakan f '(a)=∞

Berikut diberikan contoh grafik fungsi yang tidak diferensiabel di x=a



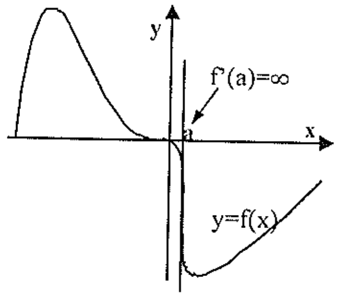
Gambar 5a

Grafik y=f(x) mempunyai patahan di x=0, sehingga f '(0) tidak ada



Gambar 5b

Grafik y=f(x) mempunyai titik diskontinu di x=c, akibatnya f '(c) tidak ada



Gambar 5c

Grafik y=f(x) mempunyai garis singgung tegak di x=a, sehingga f '(a)=∞

5.7 Aturan Rantai

Misalkan y=f(u) dan u=g(x) dua fungsi yang diferensiabel, maka y dapat dinyatakan sebagai fungsi komposisi dari f dan g $y=f(u)=f[g(x)]$ dan $y'=g'(x)f'(g(x))$

Bukti

Misalkan Δx adalah pertambahan untuk x, dan Δu dan Δy berturut-turut pertambahan untuk u dan y, maka

$$\Delta u = g'(x)\Delta x + \in_1 \Delta x = (g'(x)+\in_1)\Delta x\text{, dimana } \in_1 \to 0 \text{ bila } \Delta x \to 0$$

dan $\Delta y = f'(u)\Delta u + \in_1 \Delta u = (f'(u)+\in_2)\Delta u$, dimana $\in_2 \to 0$ bila $\Delta u \to 0$

Penggabungan Δu dan Δy dihasilkan $\Delta y = (g'(x)+\in_2)(f'(u)+\in_1)\Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = g'(x)f'(u) + \in_2 f'(u) + \in_1 g'(x) + \in_2 \in_1$$

karena $\in_1 \to 0$ dan $\in_2 \to 0$ bila $\Delta x \to 0$, maka

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = g'(x)f'(u) = g'(x)f'(g(x))$$

Jadi $y' = \dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = g'(x)f'(u) = g'(x)f'(g(x))$ ∎

Cara mendiferensialkan fungsi y terhadap x ini dikenal dengan **aturan rantai**. Atau dengan notasi Leibniz

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Contoh

Tentukan derivatif fungsi berikut ini dengan menggunakan aturan rantai.

1. $y = \dfrac{2(5x^2+1)^4}{1-4(5x^2+1)^4}$

2. $y = \dfrac{1+s}{1-s}, \quad s = t - \dfrac{1}{t}, \quad t = \sqrt{x}$

Penyelesaian

1. $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{2(1-4u) - 2u(-4)}{(1-4u)^2} = \dfrac{2}{(1-4u)^2}$

$$\frac{du}{dx} = 4(5x^2+1)^3(10x) = 40x(5x^2+1)^3$$

Sehingga $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{2}{(1-4u)^2}\right)\left(40x(5x^2+1)^3\right) = \dfrac{80x(5x^2+1)^3}{\left(1-4(5x^2+1)^4\right)^2}$

Atau dapat juga dibuat langsung dengan terlebih dulu mensubstitusi u ke dalam y menjadi

$$y = \frac{2(5x^2+1)^4}{1-4(5x^2+1)^4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8(5x^2+1)^3 10x\left(1-4(5x^2+1)^4\right) + 32(5x^2+1)^4(5x^2+1)^3 10x}{\left(1-4(5x^2+1)^4\right)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{80x(5x^2+1)^3\left(1-4(5x^2+1)^4\right) + 320x(5x^2+1)^4(5x^2+1)^3}{\left(1-4(5x^2+1)^4\right)^2}$$

$$= \frac{80x(5x^2+1)^3\left[1-4(5x^2+1)^4 + 4(5x^2+1)^4\right]}{\left(1-4(5x^2+1)^4\right)^2}$$

$$= \frac{80x(5x^2+1)^3}{\left(1-4(5x^2+1)^4\right)^2}$$

2. Sesuai dengan definisi aturan rantai $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{ds}\dfrac{ds}{dt}\dfrac{dt}{dx}$

$$\frac{dy}{ds}=\frac{1-s+1+s}{(1-s)^2}=\frac{2}{(1-s)^2},\quad \frac{ds}{dt}=1+\frac{1}{t^2},\quad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Sehingga $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{2}{(1-s)^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$$=\left(\frac{2}{1-\frac{t^2-1}{t}}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$=\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x-1}\right)\left(\frac{x+1}{x}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$=\frac{x+1}{x^{\frac{3}{2}}-x^2-x}$$

5.8 Turunan Fungsi

a. Fungsi Invers

Misalkan f(x), $x\in D_f$ fungsi kontinu dan satu satu dan diferensiabel untuk setiap $x\in D_f$, dan inversnya $f^{-1}(x)$. Jika f diferensiabel, dengan $f'(x)\neq 0$, maka fungsi f^{-1} juga diferensiabel dengan aturan turunan sebagai berikut.

Misalkan $f^{-1}=g$, maka

$f(g(x))=x$, karena f dan g diferensiabel, maka derivatif kedua ruas terhadap x adalah

$$f'(g(x))g'(x)=1$$

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

dengan menggunakan notasi Leibniz $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

Contoh

1. Tentukan turunan dari fungsi invers $y=x^2, x\geq 0$
2. Tanpa mencari turunan inversnya, tentukan f^{-1} di titik $x=6=f(2)$ bila $f(x)=x^3-2$.

Penyelesaian

1. Untuk $x \geq 0$, $f(x)=x^2$ adalah fungsi satu satu, sehingga mempunyai invers, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Turunannya $\dfrac{df^{-1}(x)}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$

2. Menurut definisi $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$ atau $(f^{-1})'\big|_{x=f(a)} = \dfrac{1}{f'\big|_{x=a}}$, sehingga bila $f'(2) = 12$ maka $(f^{-1})'\big|_{x=6} = \dfrac{1}{12}$ (Silakan dibuktikan dengan terlebih dahulu mencari $f^{-1}(x)$).

b. Fungsi Parameter

Definisi 5.5

Jika suatu fungsi disajikan dengan

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad t \in \text{Domain}$$

Dengan x dan y keduanya diferensiabel terhadap t, dan $\dfrac{dx}{dt} \neq 0$, maka fungsi y diferensiabel terhadap x, yang didefinisikan dengan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Contoh

Tentukan $\dfrac{dy}{dx}$ dari fungsi parameter $\begin{cases} x = \dfrac{t-1}{t+1} \\ y = \dfrac{t+1}{t-1} \end{cases}, \quad t \in R - \{-1, 1\}$

Penyelesaian

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{t+1-t+1}{(t+1)^2} = \frac{2}{(t+1)^2} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{t-1-t-1}{(t-1)^2} = -\frac{2}{(t-1)^2} \end{aligned}\right\} \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-2/(t-1)^2}{2/(t+1)^2} = -\frac{(t+1)^2}{(t-1)^2}$$

c. **Fungsi Implisit**

Misalkan diketahui y sebagai fungsi x yang memenuhi $3x^2y-4xy-3x^2+1=0$, dan akan ditentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi tersebut. Secara intuitif, pertama yang akan dilakukan adalah mencari solusi y dari persamaan itu, yaitu:

$$3x^2y-4xy-3x^2+1=0 \Leftrightarrow (3x-4)xy-3x^2+1=0 \Leftrightarrow y=\frac{3x^2-1}{x(3x-4)}$$

Berikutnya baru kita menentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $y=\frac{3x^2-1}{x(3x-4)}$, yaitu

$$y=\frac{3x^2-1}{x(3x-4)} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{6x.x(3x-4)-(6x-4)(3x^2-1)}{x^2(3x-4)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{18x^3-24x^2-18x^3+12x^2+6x-4}{x^2(3x-4)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-12x^2+6x-4}{x^2(3x-4)^2}$$

Permasalahannya, tidak semua fungsi dengan relasi F(x,y)=C dapat dibawa ke bentuk y=f(x). Fungsi F(x,y)=C disebut fungsi berbentuk implisit (fungsi implisit) sedangkan y=f(x) disebut bentuk eksplisit. Bagaimana menentukan $\frac{dy}{dx}$ jika yang diketahui F(x,y) tanpa terlebih dahulu mengubah ke bentuk y=f(x)?

Dengan selalu beranggapan bahwa y merupakan fungsi dari x, maka dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

i. Turunkan kedua ruas dari F(x,y)=C terhadap x
ii. Ganti y dari hasil akhir (bila ada) dengan bentuk fungsi awal.

Cara seperti ini, disebut **turunan implisit**.

Penggunaan turunan implisit untuk menyelesaiakan $3x^2y-4xy-3x^2+1=0$

$$\frac{d}{dx}\left(3x^2y-4xy-3x^2+1\right)=\frac{d}{dx}(0)$$
$$\frac{d}{dx}(3x^2y)-\frac{d}{dx}(4xy)-\frac{d}{dx}(3x^2)+\frac{d}{dx}1=0$$

$$6xy + 3x^2\frac{dy}{dx} - 4y - 4x\frac{dy}{dx} - 6x = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(3x^2 - 4x) = 6x + 4y - 6xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x + 4y - 6xy}{3x^2 - 4x}$$

Bila disubstitusi nilai $y = \dfrac{3x^2 - 1}{x(3x-4)}$ ke dalam $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x + 4y - 6xy}{3x^2 - 4x}$, diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x + 4\dfrac{3x^2-1}{x(3x-4)} - 6x\dfrac{3x^2-1}{x(3x-4)}}{3x^2 - 4x} = \frac{6x^2(3x-4) + 12x^2 - 4 - 18x^3 + 6x}{\left(3x^2 - 4x\right)^2}$$

$$= \frac{-12x^2 + 6x - 4}{x^2(3x-4)^2}$$

Contoh

Tentukan gradien kurva $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 1$ di titik (2,-1)

Penyelesaian

Pendiferensialan implisit terhadap $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 1$, menghasilkan

$$\frac{d}{dx}\left(x^3 - 3xy^2 + y^3\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}x^3 - 3\frac{d}{dx}xy^2 + \frac{d}{dx}y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 3(y^2 + x2y\frac{dy}{dx}) + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}(3y^2 - 6xy) = 3y^2 - 3x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - 3x^2}{3y^2 - 6xy}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}\bigg|_{(2,-1)} = -\frac{3}{5}$$

d. Fungsi Trigonometri

1. $\dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

   Bukti

   Misalkan f(x)=sin x, maka

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\,(\cos h - 1) + \sin h \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\,(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\sin h \cos x}{h} \\
&= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}}_{=1} \\
&= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1} + \cos x \\
&= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} + \cos x \\
&= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} + \cos x \\
&= \sin x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}}_{=1} \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{-\sin h}{\cos h + 1}}_{=0} + \cos x \\
&= \cos x
\end{aligned}
$$

2. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

Bukti

Misalkan f(x)=cos x=sin($^{\pi}/_{2}$-x)=sin u, dengan u=($^{\pi}/_{2}$-x), sehingga

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \sin' u . u' \\
&= \cos u(-1) \\
&= -\cos u \\
&= -\cos(\pi/2 - x) \\
&= -\sin x
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan turunan f(x)=sin x dan f(x)=cos x, dapat ditunjukkan bahwa:

3. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

4. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

5. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

6. $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

Contoh

Tentukan turunan dari fungsi berikut

a. $y = \cos\sqrt{x}$

b. $y = \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

c. $\frac{d}{dx}[f(\sin 3x)]$

d. $\frac{d}{dx}[\sin f(3x)]$

Penyelesaian

a. $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(-\sin\sqrt{x}) = -\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

b. $y' = \dfrac{\cos x(1-\cos x) - \sin x(\sin x)}{(1-\cos x)^2} = \dfrac{\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(1-\cos x)^2}$

$$= \frac{\cos x - 1}{(1 - \cos x)^2} = -\frac{1}{1-\cos x}$$

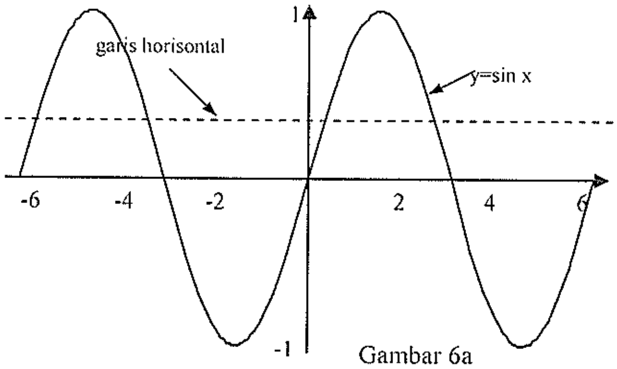
c. $\frac{d}{dx}[f(\sin 3x)] = \frac{d}{dx}(\sin 3x)\, f'(\sin 3x)$

$$= 3\cos 3x\, f'(\sin 3x)$$

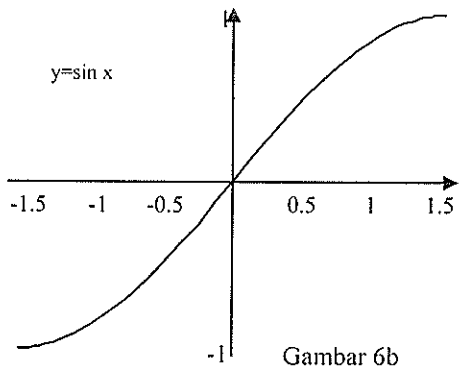
d. $\frac{d}{dx}[\sin f(3x)] = \frac{d}{dx}[f(3x)]\cos f(3x) = 3f'(3x)\cos f(3x)$

e. Fungsi Invers Trigonometri (Fungsi Siklometri)

Pandang grafik fungsi y=sin x berikut,



Gambar 6a



Gambar 6b

Perhatikan grafik sebelah kiri, dengan domain $[-2\pi, 2\pi]$. Menurut uji grafik horisontal, fungsi y=sin x $x \in [-2\pi, 2\pi]$ bukan fungsi satu-satu, karena sembarang garis yang ditarik horisontal akan memotong grafik y=sin x lebih dari satu titik. Hal ini menyebabkan fungsi y=sin x tidak mempunyai invers. Tapi dengan membatasi domain $[-\pi/2, \pi/2]$, fungsi y=sin x merupakan fungsi satu-satu, sehingga mempunyai invers. Fungsi invers dari y=sin x dilambangkan dengan $y=\sin^{-1}x$ atau y=arcsin x.

Karena definisi fungsi invers menyatakan bahwa $f^{-1}(x)=y$ □ $f(y)=x$, maka kita peroleh $\sin^{-1}x=y$ □ $\sin y=x$, $-\pi/2 \le y \le \pi/2$

Sekarang akan dicari turunan dari $y=\sin^{-1}x$, dengan menggunakan turunan implisit.

Karena $y=\sin^{-1}x$ maka sin y=x, sehingga

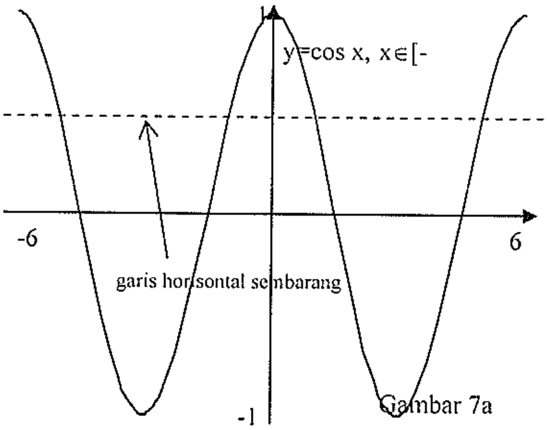
$$\frac{dy}{dx}\cos y = 1 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

Karena $-\pi/2 \le y \le \pi/2$, maka $\cos y \ge 0$, sehingga $\cos y = \sqrt{1-x^2}$

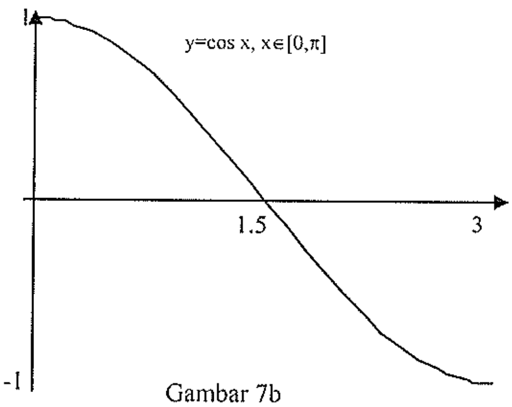
Jadi

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ -1 \le x \le 1$$

Analog dengan fungsi sinus, bila domain dibatasi $x \in [0, \pi]$, maka fungsi y=cos x merupakan fungsi satu-satu, sehingga mempunyai invers.



Gambar 7a



Gambar 7b

Turunan dari $y=\cos^{-1}x$ adalah

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \; -1 \le x \le 1$$

Rumus turunan fungsi invers trigonometri

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\csc^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec s^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

f. Fungsi Eksponensial dan Fungsi Logaritma

Akan kita cari turunan dari fungsi eksponensial $f(x)=a^x$.

Sesuai definisi

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}$$

$$= a^x\lim_{h\to 0}\frac{(a^h-1)}{h} = a^x\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{(a^{0+h}-a^0)}{h}}_{=f'(0)}$$

$$= a^x f'(0)$$

Jadi bila y=a^x, maka $\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = f'(0)\, a^x$

Perhatikan tabel di bawah ini, yang merupakan perhitungan numerik untuk $f'(0)$ untuk a antara 2 dan 3

h	(2^h-1)/h	(2.5^h-1)/h	(2.6^h-1)/h	(2.7^h-1)/h	(2.8^h-1)/h	(2.9^h-1)/h	(3^h-1)/h
0.1	0.717735	0.959582	1.002651	1.044254	1.084492	1.123457	1.161232
0.01	0.695555	0.920502	0.960091	0.998201	1.034938	1.070399	1.104669
0.001	0.693387	0.916711	0.955968	0.993745	1.03015	1.065278	1.099216
0.0001	0.693171	0.916333	0.955557	0.993301	1.029672	1.064767	1.098673
0.00001	0.69315	0.916295	0.955516	0.993257	1.029625	1.064716	1.098618
0.000001	0.693147	0.916291	0.955512	0.993252	1.02962	1.064711	1.098613
0.0000001	0.693147	0.916291	0.955511	0.993252	1.029619	1.064711	1.098612
0.00000001	0.693147	0.916291	0.955511	0.993252	1.029619	1.064711	1.098612

Dari perhitungan di atas, beralasan bahwa terdapat bilangan a antara 2 dan 3 sedemikian sehingga $f'(0) = 1$. Bilangan ini dilambangkan dengan e

Definisi 5.6

Bilangan e adalah suatu bilangan sedemikian sehingga $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

Sehingga dengan menggunakan definisi turunan dan definisi bilangan e, turunan fungsi eksponensial natural y=e^x adalah $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

Karena e terletak antara 2 dan 3, maka dimisalkan e=2^c, 1<c<2. Sehingga e^x=2^{cx}. Dengan h=0,00001, diperoleh $f'(0)$=0,69315, sehingga

$$e^x = \frac{d}{dx}(e^x) = \frac{d}{dx}(2^{cx}) = 2^{cx} f'(0)c = 2^{cx} 0{,}69315\, c$$

Bila x=0, maka diperoleh c=1/0,69315. Sehungga e=2^c=$2^{1/0{,}69315}$ ≈2,71828.

Contoh

1. Tentukan nilai maksimum fungsi f(x)=xe^{-x}

   Penyelesaian

$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$. Karena e^{-x} selalu positif, maka $f'(x)>0$ ketika $x<1$ dan $f'(x)<0$ ketika $x>1$, sehingga f(x) maksimum mutlak ketika x=1, dengan $f(1)=e^{-1}\approx 0,37$

2. Tentukan y' jika $y=e^{-4x}\sin 5x$

   Penyelesaian

   $f'(x) = -4e^{-4x}\sin 5x + e^{-4x}5\cos 5x = e^{-4x}(5\cos 5x - 4\sin 5x)$

g. Fungsi logaritma

Bila a>0, dan $a\neq 1$, maka fungsi eksponensial $f(x)=a^x$, merupakan fungsi naik atau turun, sehingga merupakan fungsi satu-satu. Jadi $f(x)=a^x$ mempunyai fungsi invers yang disebut fungsi logaritma dengan bilangan pokok a.

Jika kita gunakan definisi invers

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y) \text{ maka } {}^{a}\log x = y \Leftrightarrow a^{y} = x$$

Logaritma dengan bilangan pokok e disebut logaritma natural, yaitu ${}^{e}\log x = \ln x$

Sifat logaritma natural

1. $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^{y}$
2. $\ln e^{x} = x,\ x \in R$
3. $e^{\ln x} = x$

Kita mulai pembahasan turunan fungsi logaritma

Bila y=ln x, maka $\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{x}$

Bukti.

Misalkan y=ln x, maka $e^{y} = x$

Dengan menggunakan turunan implisit $\dfrac{dy}{dx}e^{y} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{e^{y}} \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$

Contoh

1. Tentukan turunan dari $y = \ln(x^{3}+1)$

Penyelesaian

Misalkan $u=x^3+1$, sehingga $y=\ln u$ dan dengan menggunakan definisi aturan rantai diperoleh $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\ln u=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

Jadi $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{x^3+1}$

2. Tentukan y' dari $y=\ln|x|$

Menurut definisi $|x|=\begin{cases} x\ , & x\ge 0 \\ -x\ , & x<0 \end{cases}$, sehingga $\ln|x|=\begin{cases} \ln x, & x\ge 0 \\ \ln(-x), & x<0 \end{cases}$

Sesuai definisi $\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}$ dan $\frac{d}{dx}(\ln(-x))=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}$

3. Turunan dari $y=a^x$ adalah $\frac{d}{dx}(a^x)=f'(0)a^x$

Dengan menngunakan logaritma natural tunjukkan bahwa $f'(0)=\ln a$

Penyelesaian

$$\frac{d}{dx}(a^x)=\frac{d}{dx}(e^{\ln a})^x=\frac{d}{dx}e^{(\ln a)x}=\ln a.e^{(\ln a)x}=\ln a.a^x$$

Jadi terbukti $f'(0)=\ln a$

4. Dengan menggunakan logaritma natural, tentukan turunan dari $y=x^{\sin x}$

Penyelesaian

$\ln y=\sin x\ln x$

$$\frac{y'}{y}=\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\Leftrightarrow y'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

Bilangan e sebagai limit

Sebelumnya telah dicari dengan cara numerik bahwa $e\approx 2{,}71828$

Sekarang akan digunakan fungsi logaritma natural dan turunannya untuk menyatakan e sebagai suatu limit.

Bila $f(x)=\ln x$, maka $f'(x)=\frac{1}{x}$. Jadi $f'(1)=1$

Pencarian $f'(1)=1$ dengan definisi menghasilkan

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \ln\left(\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right)$$

$$1 = \ln\left(\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right)$$

$$e^{1} = e^{\ln\left(\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right)}$$

$$e = \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Untuk x□0, pencarian nilai e diberikan oleh tabel berikut

x	(1+x)^(1/x)	(1+x)^(1/x)	x
0.1	2.5937425	2.71828	0.000001
0.01	2.7048138	2.718282	0.0000001
0.001	2.7169239	2.718282	0.00000001
0.0001	2.7181459	2.718282	0.000000001
0.00001	2.7182682	2.718282	1E-10

h. Fungsi hiperbolik

Akan dicari turunan dari $y = \cosh x$, sedangkan untuk fungsi hiperbolik yang lain, analog.

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

Turunan lengkap fungsi hiperbolik

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \qquad \frac{d}{dx} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

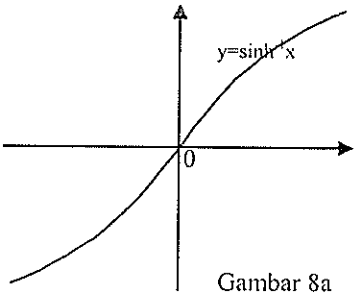
$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x \qquad \frac{d}{dx} \coth x = -\operatorname{csch}^2 x$$

Tugas

Tunjukkan turunan fungsi hiperbolik seperti dalam tabel.

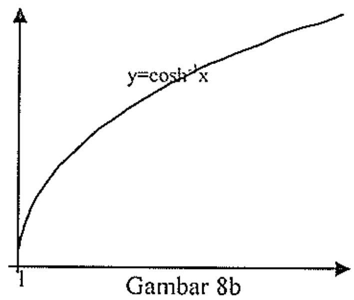
i. Fungsi invers hiperbolik

Ingat kembali grafik fungsi hiperbolik f(x)=sinh x, f(x)=cosh x dan f(x)=tanh x. Fungsi sinh x dan tanh x merupakan fungsi satu-satu, sedangkan grafik cosh x bila domainnya dibatasi untuk $x \in [0,\infty)$ juga merupakan satu-satu. Sehingga sinh x dan tanh x mempunyai invers, dan untuk cosh x dengan pembatasan $x \in [0,\infty)$ juga mempunyai fungsi invers.



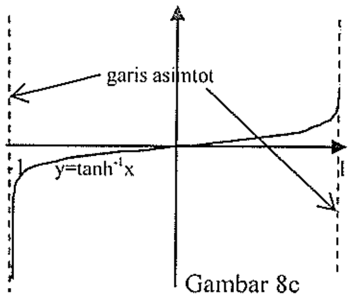
Gambar 8a

$y=\sinh^{-1}x$
Daerah asal=R
Daerah nilai=R



Gambar 8b

$y=\cosh^{-1}x$
Daerah asal $[1,\infty)$
Daerah nilai $[0,\infty)$



Gambar 8c

$y=\tanh^{-1}x$
Daerah asal (-1,1)
Daerah nilai=R

Akan dicari invers dari y=cosh x, sedangkan untuk sinh x dan tanh x analog.

Misalkan $y=\cosh^{-1} x$, maka x= cosh y, sehingga

$$x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \Leftrightarrow e^y + e^{-y} - 2x = 0$$

Kedua ruas dari persamaan terakhir dikalikan dengan e^y, menghasilkan

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

yang merupakan persamaan kuadrat dalam e^y. Dengan menggunakan rumus ABC diperoleh solusi $e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

Jadi invers dari $y = \cosh x$ adalah $y = \cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

Sekarang akan dicari turunan dari $y = \cosh^{-1} x, x \geq 1$

$$y = \cosh^{-1} x \Leftrightarrow x = \cosh y$$

Turunan terhadap x untuk kedua ruas persamaan terakhir, menghasilkan

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}\cosh y \Rightarrow 1 = y'\sinh y \Rightarrow y' = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Jadi $\dfrac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Tugas

Tentukan invers fungsi dan turunan fungsi invers dari sinh x, tanh x, csch x, sech x, coth x.

TUJUAN INSTRUKSIONAL

Umum

Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester I), mahasiswa mempunyai pemahaman konseptual yang benar tentang topik-topik utama dalam Kalkulus (limit, kekontinuan, diferensial, integral) beserta teorema dan sifat-sifat serata teknik-teknik penting didalamnya.

Khusus

Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 17), mahasiswa akan dapat menjelaskan penggunanaan turunan untuk menentukan nilai maksimum/minimum, kecekungan fungsi, teorema Rolle, penggambaran fungsi, bentuk tak tentu limit fungsi, masalah laju yang berkaitan, dan masalah ekstrem.

6. PENERAPAN TURUNAN

Terdapat banyak masalah yang dapat diselesaikan dengan menngunakan konsep turunan sebagai alat bantu. Kemonotonan suatu fungsi dapat ditentukan dengan turunan pertama. Kecekungan grafik suatu fungsi ditentukan dengan turunan keduanya. Kemonotonan dan kecekungan bersama-sama dengan garis asimtot merupakan dasar untuk mensketsa grafik suatu fungsi yang sebelumnya tidak terpikirkan untuk digambar. Selain itu turunan juga dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah maksimum minimum, laju yang berkaitan, dan perhitungan limit fungsi.

6.1 Titik Ekstrim Fungsi

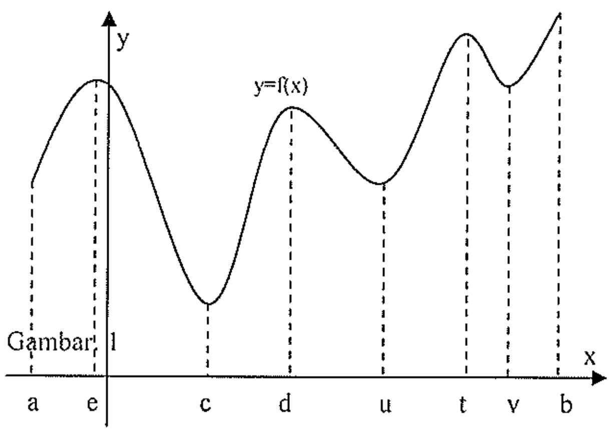
Misalkan diketahui suatu fungsi yang kontinu di daerah asalnya. Nilai maksimum atau minimum yang dicapai fungsi di dalam interval di daerah asalnya disebut sebagai nilai maksimum atau minimum lokal, sedangkan nilai maksimum atau minimum yang dicapai oleh fungsi di dalam daerah asal disebut nilai maksimum atau minimum global. Nilai maksimum atau minimum keduanya disebut nilai ekstrim.

Definisi 6.1

Diberikan fungsi f yang terdefinisi pada [a,b]

- Fungsi f dikatakan mencapai maksimum mutlak di $c \in [a,b]$ bila $f(c) \geq f(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$.
- Fungsi f dikatakan mencapai minimum mutlak di $c \in [a,b]$ bila $f(c) \leq f(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$.

Perhatikan dua contoh grafik berikut ini.

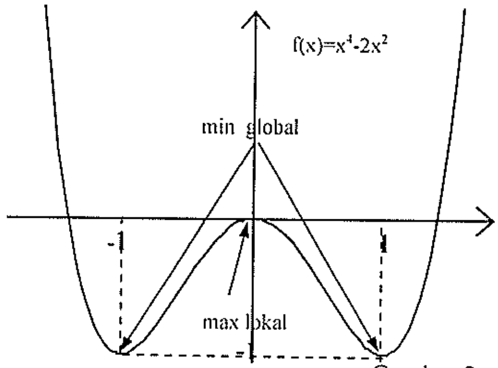


Gambar 1

Apakah f(d) maksimum? Dan apakah f(v) minimum?

Pada [a,b] f(d) tidak maksimum, tapi pada (c,u) maksimum. Sedangkan f(v) pada (t,b) minimum, tapi pada [a,b] tidak.

Pada [a,b] f(t) maksimum, dan minimum pada c.



Gambar 2

- Perhatikan di sekitar titik x=0. Pada interval $(0-{}^1/_2, 0+{}^1/_2)$ berlaku $f(x)=x^2(x^2-2x)<0=f(0)$. Artinya terdapat $\delta=1/2$, sehingga $f(x)<f(0)$ untuk setiap $x\in(0-{}^1/_2, 0+{}^1/_2)$. Jadi (0,0) merupakan koordinat maksimum lokal
- Untuk setiap x bilangan real berlaku $(x^2-1)^2>0\square x^4-2x^2>-1$, sehingga $f(x)>-1$ untuk setiap x. Jadi (-1,-1) dan (1,-1) merupakan koordinat maksimum global.

Definisi 6.2

i. f dikatakan mempunyai maksimum lokal di $u\in[a,b]$ jika ada $(c,d)\subset[a,b]$ sehingga untuk $u\in[a,b]$, $f(u)\geq f(x)\ \forall x\in(c,d)$

ii. f dikatakan mempunyai minimum lokal di $u\in[a,b]$ jika ada $(c,d)\subset[a,b]$ sehingga untuk $u\in[a,b]$, $f(u)\leq f(x)\ \forall x\in(c,d)$

Setiap titik ekstrem global pasti merupakan ekstrem lokal, tapi tidak sebaliknya. Untuk itu cukup dibicarakan ekstrem lokal saja (untuk selanjutnya disebut titik ekstrem saja)

Teorema 6.1 (Turunan di titik ekstrim lokal)

Misalkan f kontinu pada suatu interval buka yang memuat c. Jika f diferensiabel di c, dan (c,f(c)) titik ekstrem maka $f'(c)=0$ atau $f'(c)$ tidak ada.

Pada contoh grafik fungsi $f(x)=x^4-2x^2$, titik ekstrim lokal dicapai oleh (0,0), sementara $f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$. Sehingga $f'(0)=0$.

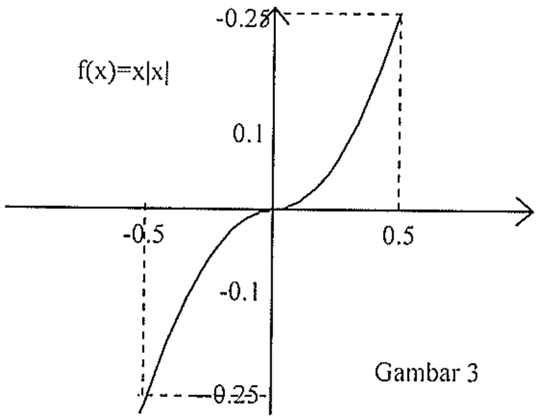
Kebalikan teorema di atas tidak benar, artinya jika $f'(c)=0$ atau $f'(c)$ tidak ada, belum tentu (c,f(c)) titik ekstrem. Namun demikian (c,f(c)) merupakan calon titik ekstrem, artinya titik selain titik (c,f(c)) tak mungkin jadi titik ekstrem. Titik c yang menyebabkan $f'(c)=0$ atau $f'(c)$ tidak ada disebut titik kritis.

Contohnya adalah pada grafik fungsi $f(x)=x^3$. Pada grafik itu $f'(0)=0$, tapi (0,0) bukan merupakan titik ekstrim (silakan diselidiki!)

Jika f terdefinisi pada [a,b], maka nilai maksimum atau minimum dari f dapat ditentukan sebagai berikut:

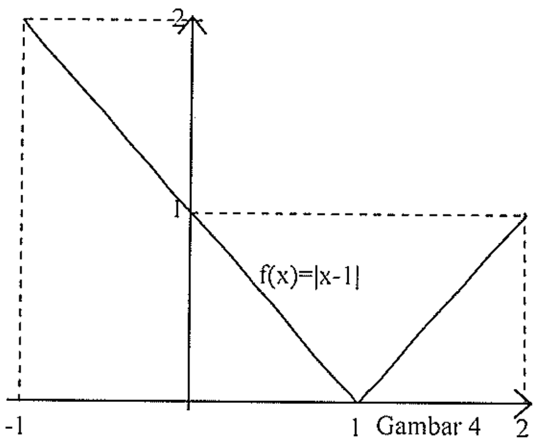
1. Tentukan titik kritisnya, misalkan di x=c.
2. Tentukan nilai-nilai f(c), f(a), f(b). Nilai terbesar dari ketiganya adalah nilai maksimum dan yang terkecil adalah nilai minimum.

Contoh



Gambar 3

Fungsi f(x)=x|x|, pada interval tutup $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$, mempunyai mempunyai tiga titik kritis, yaitu $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$ sebagai titik ujung interval, dan x=0 karena $f'(c) = 0$ (silakan dicek). Dari grafik koordinat $(-\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ dan $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ merupakan titik ekstrim global, sedangkan (0,0) bukan titik ekstrim.



Gambar 4

Fungsi f(x)=|x-1|, pada interval tutup $-1 \le x \le 2$ mempunyai titik kritis, yaitu x=-1, x=2 sebagai titik ujung interval dan x=1 sebagai titik kritis (silakan dicek). Titik (-1,2) merupakan titik maksimum global, dan titik (1,0) merupakan titik minimum global

Contoh

Tentukan ekstrim global dari fungsi $f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$, $-1 \le x \le 5$

Penyelesaian

Terlebih dulu dicari titik kritisnya, yaitu x yang menyebabkan $f'(x) = 0$ atau $f'(x)$ tak ada. Turunan f(x) adalah $f'(x) = \frac{10}{3}x^{-1/3} - \frac{5}{3}x^{2/3} = \frac{5}{3}x^{-1/3}(2-x)$. Sehingga $f'(x) = 0$ untuk x=2 dan $f'(x)$ tak ada untuk x=0. Sehingga titik kritis dari f adalah x=-1 (titik ujung interval), x=0 (titik singular), x=2 (titik stasioner), x=5 (titik ujung interval). Nilai fungsi di titik kritisnya f(-1)=6, f(0)=0, f(2)=$3\sqrt[3]{4}$, f(5)=0. Sehingga titik maksimum global (-1,6) dan minimum global (0,0) dan (5,0).

Teorema 6.2 (Teorema Rolle)

Misalkan fungsi f kontinu pada [a,b] dan diferensiabel pada (a,b), serta f(a)=f(b). Maka terdapat $c \in (a,b)$ sehingga $f'(c) = 0$.

Bukti

- Untuk kasus f fungsi konstan pada [a,b], $f'(x) = 0$ untuk setiap $x \in (a,b)$, sehingga teorema Rolle otomatis dipenuhi
- Untuk kasus f bukan fungsi konstan
- Karena f kontinu pada [a,b], maka terdapat m, M∈ sehingga

$$m = \min_{a \le x \le b} f(x) \le f(x) \le \max_{a \le x \le b} f(x) = M$$

Dalam kasus f bukan fungsi konstan dengan f(a)=f(b), tidak mungkin nilai maksimum atau minimum dipenuhi di titik ujung a dan b. Berdasarkan teorema nilai rata-rata, terdapat $c \in (a,b)$ sehingga M=f(c) atau m=f(c). Karena f diferensiabel pada (a,b), maka $f_-'(c) = f_+'(c) = f'(c)$

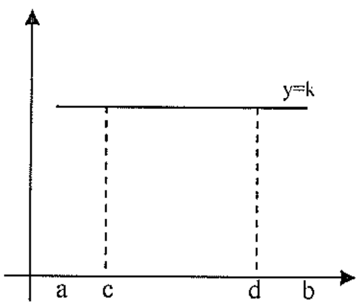
Untuk kasus f(c)=M (kasus f(c)=m, dibuktikan serupa), hal ini berakibat

$f'(c) = f_-'(c) = \lim\limits_{x \to c^-} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim\limits_{x \to c^-} \dfrac{f(x) - M}{x - c} \ge 0$, karena $f(x) - M \le 0$ dan $x - c \le 0 \ldots$ (1)

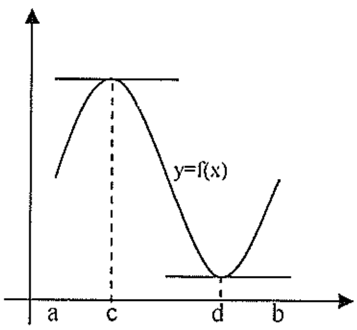
$f'(c) = f_+'(c) = \lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{f(x) - M}{x - c} \le 0$, karena $f(x) - M \le 0$ dan $x - c \ge 0 \ldots$ (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh $f'(c) = 0$

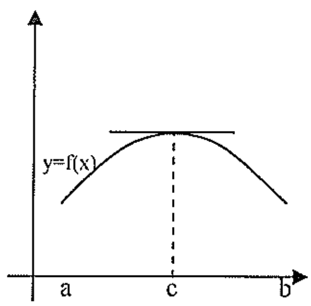
Berikut adalah kemungkinan grafik dimana teorema Rolle berlaku



Gambar 5a



Gambar 5b



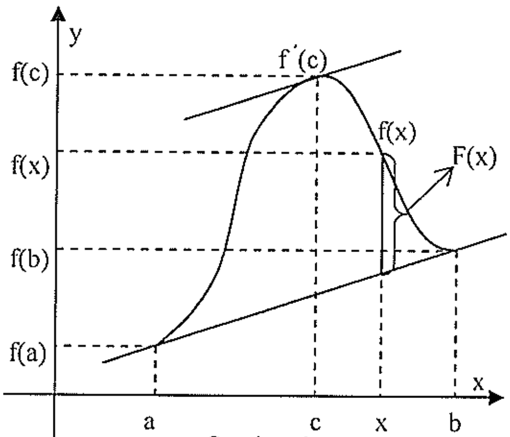
Gambar 5c

Teorema 6.3 (Teorema Nilai Rata-rata)

Misalkan fungsi f kontinu pada [a,b] dan diferensiabel pada (a,b), maka terdapat $c \in (a,b)$ sehingga $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Bukti.

Untuk lebih memahami teorema ini perhatikan grafik berikut. Persamaan garis yang melalui (a,f(a)) dan (b, f(b)) adalah $y = f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$



Gambar 6

Dari grafik

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Akan diperiksa apakah fungsi F(x) memenuhi hipotesis dari teorema Rolle:

a. F(x) merupakan fungsi kontinu pada [a,b] karena merupakan jumlahan f(x) yang kontinu dan polinomial derajat satu yang kontinu.

b. F(x) diferensiabel pada (a,b) karena f(x) dan polinomial derajat satu juga diferensiabel pada (a,b).

Sehingga teorema Rolle dapat diterapkan untuk fungsi F(x). Turunan F(x) adalah .

$F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Karena F kontinu pada [a,b] dan diferensiabel pada (a,b) dan F(a)=F(b)=0, maka menurut teorema Rolle terdapat $c \in (a,b)$ sehingga

$F'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ atau $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Salah satu penggunaan teorema Rolle adalah untuk membuktikan bahwa suatu persamaan mempunyai tepat satu akar.

Contoh

1 Bila $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$, tentukan bilangan $c \in [-1,1]$ sehingga berlaku teorema nilai rata-rata

2 Tunujukkan bahawa persamaan $3x^3 - 4x + 5 = 0$ mempunyai satu akar real .

3 Tunjukkan bahwa $x + \tan x = 1$ mempunyai penyelesaian di $[0,1]$

(Petunjuk: gunakan fungsi $f(x)=(x-1)\sin x$, sebagai fungsi mula-mula)

Penyelesaian

1 $f'(c) = 6c + 2$, $f(-1)=6$, $f(1)=10$

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{2} \Rightarrow 6c + 2 = 2 \Rightarrow c = 0$$

2 Turunan dari $f(x) = 3x^3 - 4x + 5$ adalah $f'(x) = 9x^2 - 4 = 9(x^2 - \tfrac{4}{9})$.

Fungsi f(x) dan $f'(x)$ diferensiabel pada , dan $f'(\tfrac{2}{3}) = f'(-\tfrac{2}{3}) = 0$. Karena f(x) fungsi polinomial, dan $f'(\tfrac{2}{3}) = f'(-\tfrac{2}{3}) = 0$, maka terdapat x pada interval $(-\infty,-\tfrac{2}{3})$, $(-\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3})$ dan $(\tfrac{2}{3},\infty)$ dengan $f'(x) \neq 0$

Persamaan f(x)=0 tidak mungkin mempunyai lebih dari satu akar pada interval $(-\infty,-\tfrac{2}{3})$. Sebab jika persamaan itu mempunyai lebih dari satu akar (katakanlah a dan b), maka f(a)=f(b)=0. Dan itu, menurut teorema Rolle terdapat $c \in (a,b) \subseteq (-\infty,-\tfrac{2}{3})$ dengan $f'(c) = 0$. Hal ini bertentangan dengan $f'(c) = 0$ hanya dipenuhi oleh $c=-\tfrac{2}{3}$ dan $c=\tfrac{2}{3}$. Berarti f(x)=0 hanya mempunyai satu akar pada interval $(-\infty,-\tfrac{2}{3})$. Karena f(-2)=-11 dan f(-1)=6, maka menurut teorema nilai antara terdapat $c \in (-2,-1)$ sehingga f(c)=0. Artinya bahwa persamaan f(x)=0 mempunyai satu akar yang terletak pada (-2,-1).

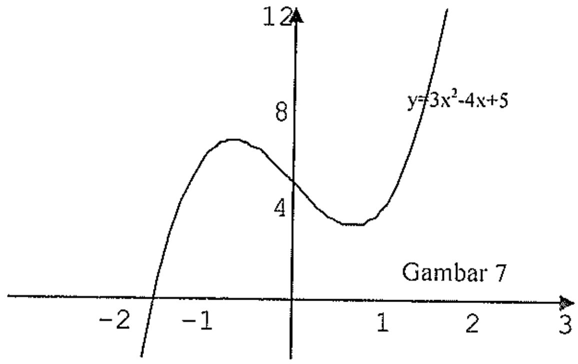
Sekarang akan ditunjukkan bahwa pada interval $(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3})$ dan $(\tfrac{2}{3},\infty)$ persamaan f(x)=0 tidak mempunyai akar.

Karena $f(-\tfrac{2}{3}) = \tfrac{61}{9} > 0$ dan $f(\tfrac{2}{3}) = 5 > 0$, maka menurut teorema nilai antara tidak terdapat $c \in (-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3})$ dengan f(c)=0

Analog untuk interval $(-\infty,-\tfrac{2}{3})$,.

Kesimpulannya persamaan $3x^3 - 4x + 5 = 0$ hanya mempunyai satu akar real pada interval (-2,-1).

Berikut digambarkan grafik fungsi $f(x) = 3x^3 - 4x + 5$



3 Perhatikan f(x)=(x-1)sin x, $x \in [0,1]$

Maka

i. f(x) diferensiabel dengan $f'(x) = \sin x + (x-1)\cos x$

ii. $f(0) = f(1) = 0$

Sehingga menurut teorema Rolle terdapat $c \in (0,1)$ sehingga $f'(c) = 0$

Jadi $\sin c + (c-1)\cos c = 0$

Karena untuk $c \in (0,1)$ $\cos c \neq 0$, maka $\tan c + c = 1$

Dengan kata lain $\tan x + x = 1$ mempunyai penyelesaian di $[0,1]$

Fungsi Naik / Fungsi Turun

Definisi 6.3

Diberikan fungsi f yang terdefinisi pada [a,b]

i. Fungsi f dikatakan naik pada [a,b] jika $u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$ $\forall u, v \in [a,b]$

ii. Fungsi f dikatakan turun pada [a,b] jika $u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$ $\forall u, v \in [a,b]$

Teorema 6.4 (Uji Turunan Pertama Untuk Kemonotonan Fungsi)

Diketahui f terdefinisi pada [a,b] dan diferensiabel pada (a,b)

i. $f'(x) > 0$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow f$ monoton naik pada [a,b]

ii. $f'(x) < 0$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow f$ monoton turun pada [a,b]

Bukti.

Akan dibuktikan dengan menggunakan definisi kemonotonan. Misalkan $[u,v] \subseteq [a,b]$

i. Akan dibuktikan $u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$ $\forall u, v \in [a,b]$

Karena f terdefinisi pada [a,b] dan diferensiabel pada (a,b), maka f juga terdefinisi pada [u,v] dan diferensiabel pada (u,v). Sehingga menurut teorema nilai rata-rata, terdapat $c \in (u,v)$, sehingga $f'(c) = \frac{f(u) - f(v)}{u - v}$. Karena diketahui

$f'(c) > 0$ dan $u - v < 0$, maka $f(u) - f(v) < 0$

Jadi untuk $u < v \Rightarrow f(u) < f(v)\ \forall u, v \in [a, b]$

Terbukti f monoton naik pada [a,b]

ii. Akan dibuktikan $u > v \Rightarrow f(u) < f(v)\ \forall u, v \in [a, b]$

Karena f terdefinisi pada [a,b] dan diferensiabel pada (a,b), maka f juga terdefinisi pada [u,v] dan diferensiabel pada (u,v). Sehingga menurut teorema nilai rata-rata, terdapat $c \in (u,v)$, sehingga $f'(c) = \frac{f(u) - f(v)}{u - v}$. Karena diketahui

$f'(c) < 0$ dan $u - v > 0$, maka $f(u) - f(v) < 0$

Jadi untuk $u > v \Rightarrow f(u) < f(v)\ \forall u, v \in [a, b]$

Terbukti f monoton turun pada [a,b]

Dari selang kemonotonan suatu fungsi dapat ditentukan titik ekstrimnya berdasarkan perubahan kemonotonan fungsinya. Sedangkan perubahan kemonotonan suatu fungsi dapat ditentukan dari perubahan tanda dari turunan pertama di sekitar titik kritisnya. Perubahan dari monoton naik ke monoton turun menghasilkan maksimum lokal, sebaliknya perubahan dari monoton turun ke monoton naik menghasilkan minimum lokal.

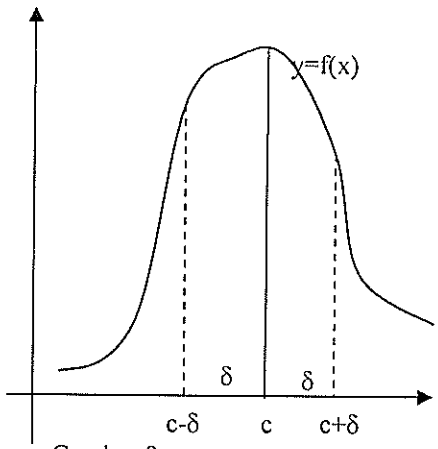
Teorema 6.5 (Uji Turunan Pertama Untuk Ekstrim Lokal)

Misalkan f fungsi kontinu pada interval buka yang memuat titik c. Jika ada suatu $\delta>0$ sehingga:

i. $f'(x) > 0\ \forall x \in (c - \delta, c)$ dan $f'(x) < 0\ \forall x \in (c, c + \delta)$ maka f mencapai maksimum lokal di c

ii. $f'(x) < 0\ \forall x \in (c - \delta, c)$ dan $f'(x) > 0\ \forall x \in (c, c + \delta)$ maka f mencapai minimum lokal di c

Bukti.

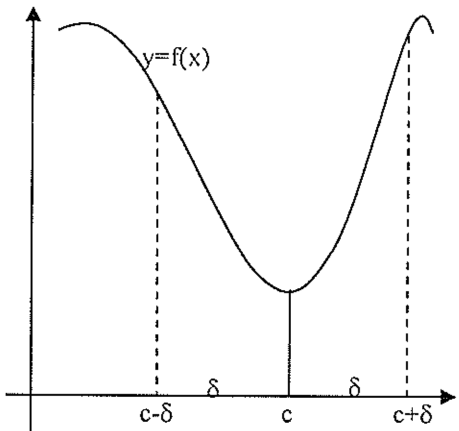


Gambar 8a

i. Karena $f'(x) > 0 \ \forall x \in (c-\delta, c)$ maka f(x) monoton naik pada interval $(c-\delta, c)$, hal ini berarti $x < c \Rightarrow f(x) < f(c)$.

Karena $f'(x) < 0 \ \forall x \in (c, c+\delta)$ maka f(x) monoton turun pada interval $(c, c+\delta)$, hal ini berarti $x > c \Rightarrow f(x) < f(c)$

Karena $f(c) > f(x) \ \forall x \in (c-\delta, c+\delta)$, maka f (x) mencapai maksimum lokal di c



Gambar 8b

ii. Karena $f'(x) < 0 \ \forall x \in (c-\delta, c)$ maka f(x) monoton turun pada interval $(c-\delta, c)$, hal ini berarti $x < c \Rightarrow f(x) > f(c)$

Karena $f'(x) > 0 \ \forall x \in (c, c+\delta)$ maka f(x) monoton naik pada interval $(c, c+\delta)$, hal ini berarti $x > c \Rightarrow f(x) > f(c)$.

Karena $f(c) < f(x) \ \forall x \in (c-\delta, c+\delta)$, maka f (x) mencapai minimum lokal di c

Contoh

Tentukan semua titik ekstrim beserta jenisnya dari fungsi $f(x)=3x^4-4x^3$, dengan menggunakan uji kemonotonannya.

Penyelesaian

$f'(x) = 12x^2(x-1)$. Sehingga titik kritisnya adalah x=0 dan x=1, karena $f'(0) = f'(1) = 0$. Akan diselidiki tanda $f'(x)$ untuk x di sekitar titik kritis.

	$12x^2$	x-1	$12x^2(x-1)$	Kesimpulan
x<0	+ + +	- - - -	- - - -	Fungsi f monoton turun
0<x<1	+ + +	- - - -	- - - -	Fungsi f monoton turun
x>1	+ + +	+ + +	+ + +	Fungsi f monoton naik

Pada interval $(-\infty, 1)$ fungsi monoton turun, pada interval $(1, \infty)$ fungsi monoton naik. Sehingga menurut definisi (1,-1) mrpkn titik minimum lokal

Teorema 6.6 (Uji Turunan Kedua Untuk Ekstrim Lokal)

Misalkan f fungsi yang diferensiabel sampai dengan turunan kedua pada suatu interval yang memuat c dan (c,f(c)) titik ekstrim.

- Jika $f''(c) > 0$, maka f mencapai minimum lokal di c
- Jika $f''(c) < 0$, maka f mencapai maksimum lokal di c
- Jika $f''(c) = 0$, maka uji gagal (tidak ada keputusan)

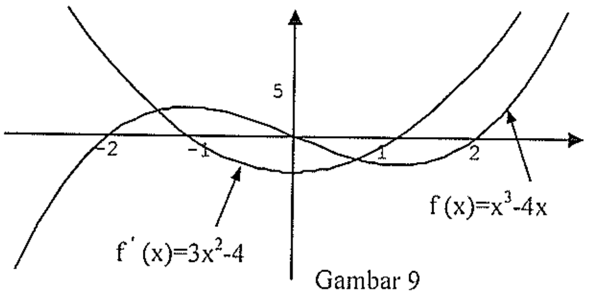
Dari contoh sebelumnya, f mempunyai titik kritis x=0 dan x=1, kemudian $f''(x) = 36x^2 - 24x$ dan $f''(0) = 0$, $f''(1) = 12 > 0$. Jadi $f(x)=3x^4-4x^3$ mempunyai minimum lokal di (1,-1) (Sesuai dengan uji turunan pertama).

Sebelum membahas definisi dan uji turunan kedua untuk kecekungan fungsi, perhatikan terlebih dulu fungsi $f(x)=x^3-4x$

Fungsi $f(x)=x^3-4x$ mempunyai turunan pertama $f'(x) = 3x^2 - 4$ dan turunan kedua $f''(x) = 6x$. Titik kritis f adalah $x=-{}^2/_{\sqrt{3}}$, $x={}^2/_{\sqrt{3}} \cong 1,55$

Sebelum menggambarkan grafik fungsinya akan diselidiki perilaku fungsi di sekitar titik kritis dengan memperhatikan tanda turunan pertama dan turunan kedua di sekitar titik tersebut.

	$f'(x)=3x^2-4$	$f''(x)=6x$
$x<-{}^2/_{\sqrt{3}}$	+ + + + +	- - - - - - -
$-{}^2/_{\sqrt{3}}<x<0$	- - - - - - -	- - - - - - -
$0<x<{}^2/_{\sqrt{3}}$	- - - - - - -	+ + + + +
$x>{}^2/_{\sqrt{3}}$	+ + + + +	+ + + + +

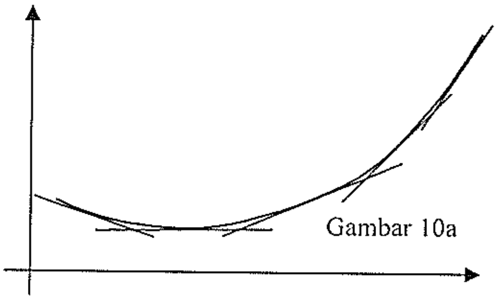


Gambar 9

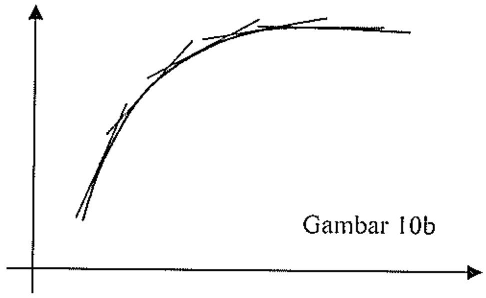
Bandingkan tanda $f'(x)$ dan $f''(x)$ pada setiap subinterval, dan grafik fungsi di sampingnya. Pada interval $(-\infty,-{}^2/_{\sqrt{3}})$ grafik fungsi $f(x)=x^3-4x$ monoton naik ($f'(x)>0$), interval $(-{}^2/_{\sqrt{3}},0)$ dan $(0,{}^2/_{\sqrt{3}})$ grafik monoton turun ($f'(x) <0$), interval $({}^2/_{\sqrt{3}},\infty)$ grafik monoton naik($f'(x)>0$). Pada interval $(-\infty,0)$ grafik fungsi $f(x)=x^3-4x$ cekung ke bawah ($f''(x)<0$, atau grafik $f'(x)$ monoton turun), interval $(0,\infty)$ cekung ke atas ($f''(x)>0$, atau atau grafik $f'(x)$ monoton naik).

Definisi 6.4

- Jika grafik f terletak di atas semua garis singgungnya pada suatu interval, maka dikatakan f cekung ke atas
- Jika grafik f terletak di atas semua garis singgungnya pada suatu interval, maka dikatakan f cekung ke bawah.



Gambar 10a



Gambar 10b

Dari grafik 6.10, dapat dilihat bahwa kemiringan garis singgung, dari kiri ke kanan semakin besar (terjal), artinya bahwa turunan dari f' naik, sehingga f'' positif. Sebaliknya dari grafik 6.11, semakin ke kanan kemiringan garis singgung semakin kecil (landai), artinya bahwa turunan f' menurun, sehingga f'' negatif.

Uji turunan kedua untuk kecekungan suatu fungsi

Pada pembahasan yang lalu, turunan pertama menentukan kemonotonan suatu fungsi. Berikut ini dibahas turunan kedua yang menentukan kecekungan suatu fungsi.

Definisi 6.5

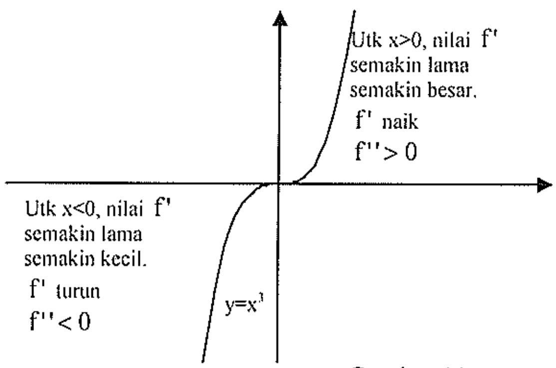
Diketahui fungsi f diferensiabel pada suatu interval

- Fungsi f cekung ke atas jika f' monoton naik pada interval itu
- Fungsi f cekung ke bawah jika f' monoton turun pada interval itu

Ilustrasi

Perhatikan grafik $y=x^3$ di samping ini.

- Untuk $x<0$, fungsi monoton turun, dan perhatikan bahwa kemiringan garis singgungnya semakin lama semakin kecil (f' turun), itu artinya $f''<0$
- Untuk $x>0$, fungsi monoton naik, dan perhatikan bahwa kemiringan garis singgungnya semakin lama semakin besar (f' naik), itu artinya $f''>0$



Gambar 11

Teorema 6.7 (Uji Turunan Kedua Untuk Kecekungan Fungsi)

Misalkan fungsi f terdefinisi pada [a,b] dan mempunyai turunan sampai dengan tingkat dua pada (a,b).

- Jika $f''(x) > 0$ untuk setiap $x \in (a,b)$, maka grafik fungsi f cekung ke atas
- Jika $f''(x) < 0$ untuk setiap $x \in (a,b)$, maka grafik fungsi f cekung ke bawah

Jika di suatu titik pada grafik fungsi terjadi perubahan kecekungan, maka titik itu disebut titik belok fungsi.

6.2 Titik Belok Fungsi

Definisi 6.6

Misalkan fungsi f kontinu pada suatu interval yang memuat c. Fungsi f dikatakan mencapai titik belok di c bila terdapat perubahan kecekungan pada grafik fungsi di sekitar c.

Contoh

Sketsakan grafik fungsi $f(x)=x^2|x-3|$, dengan menentukan semua titik ekstrimnya, titik belok, dan semua asimtot.

Penyelesaian

Karena $x^2|x-3| \neq x^3-3x^2$, maka untuk menentukan turunan pertama dan kedua dari f, kita tidak bisa menggunakan rumus turunan. Akan digunakan definisi turunan untuk menentukan f'

Karena fungsi f memuat harga mutlak $|x-3|$, maka akan diselidiki turunan pertama di $x<3$, $x>3$, $x=3$.

Menurut definisi $|(x+h)-3| = \begin{cases} (x+h)-3, & x+h \geq 3 \\ 3-(x+h), & x+h < 3 \end{cases}$

- Untuk $x<3$, pilih $h>0$ sehingga $x+h<3$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2|(x+h)-3|-x^2|x-3|}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2+2xh+h^2)(3-(x+h))-x^2(3-x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-3x^2h-3xh^2+3h^2-h^3+6xh}{h} \\ &= -3x^2+6x\end{aligned}$$

- Untuk $x>3$, pilih $h>0$ sehingga $x+h>3$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2|(x+h)-3|-x^2|x-3|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2xh+h^2)((x+h)-3)-x^2(x-3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2-3h^2+h^3-6xh}{h}$$

$$=3x^2-6x$$

- Untuk x=3

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2|x-3|-0}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2(x-3)}{x-3}=9$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2|x-3|-0}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2(3-x)}{x-3}=-9$$

Karena $\lim_{x\to 3^+} \neq \lim_{x\to 3^-}$, maka $f'(3)$ tidak ada

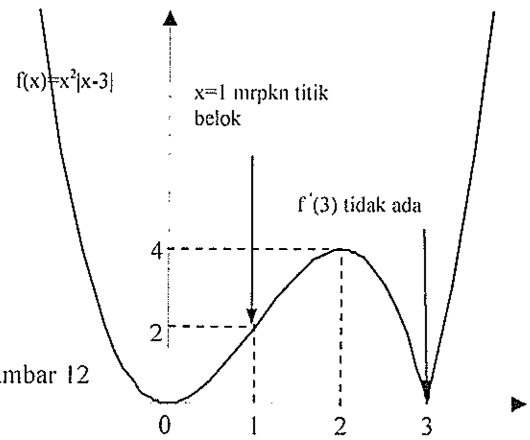
Titik-titik kritis f

- Untuk x<3, $f'(x)=0\to -3x^2+6x=0\to -3x(x-2)=0\to x=0\vee x=2$
- Untuk x>3, $f'(x)=0\to 3x^2-6x=0\to 3x(x-2)=0\to x=0\vee x=2$
- Untuk x=3, $f'(3)$ tidak ada

Titik kritis f' dipenuhi bila $f''(x)=0$, yaitu x=1.

Kemudian akan diselidiki nilai fungsi turunan pertama dan kedua di sekitar masing-masing titik kritisnya.

	$f'(x)$	Kesimpulan
x<0	- - - -	grafik f monoton turun
0<x<2	+ + +	grafik f monoton naik
2<x<3	- - - -	grafik f monoton turun
x>3	+ + +	grafik f monoton naik



Gambar 12

	$f''(x)$	Kesimpulan
$x<1$	+ + +	grafik f cekung ke atas
$x>1$	- - - -	grafik f cekung ke bawah

Perhatikan nilai fungsi $f'(x)$ dan $f''(x)$ dan bandingkan dengan grafik fungsi $f(x)=x^2|x-3|$. Pada interval $(-\infty,0)$ dan $(2,3)$ grafik f monoton turun, pada interval $(0,2)$ dan $(3,\infty)$ grafik f monoton naik (sesuai tanda dari $f'(x)$). Maksimum lokal dicapai di titik (2,4) dan minimum lokal dicapai di titik (0,0) dan (3,0). Di $x=3$, turunannya tidak ada (grafik berupa patahan/sudut di $x=3$)

Pada interval $(-\infty,1)$ grafik f cekung ke atas, dan pada $(1,\infty)$ grafik f cekung ke bawah (sesuai tanda dari $f''(x)$). Karena terjadi perubahan kecekungan di sekitar $x=1$, maka menurut definisi $x=1$ merupakan titik belok.

Berikut diberikan teorema tentang turunan kedua di titik belok.

Teorema 6.8

Misalkan f diferensiabel pada suatu interval yang memuat c. Jika f mencapai titik belok di c dan $f''(c)$ ada, maka $f''(c) = 0$

Bukti.

Diketahui fungsi f mencapai titik belok di c. Ini artinya di sekitar titik c terjadi perubahan kecekungan dari fungsi f, atau terjadi perubahan kemonotonan dari fungsi f' di sekitar c. Sehingga $x=c$ merupakan ekstrim lokal untuk f'. Oleh karenanya $(f')'(c) = f''(c) = 0$.

Perhatikan pernyataan berikut.

- Jika f mencapai titik belok di $x=c$ maka $f''(c) = 0$ belum tentu benar.
- Kebalikan teorema di atas tidak selalu benar, artinya bahwa jika $f''(c) = 0$ tidak selalu c merupakan titik belok

Contoh

1. Perhatikan fungsi $k(x) = x|x|$

Turunan pertama dari $f(x) = |x|$ adalah $f'(x) = \frac{x}{|x|}$ (silakan dicek!)

Sehingga $k'(x) = |x| + \frac{x^2}{|x|} = 2|x|$ (juga silakan dicek!) dan $k''(x) = 2\frac{x}{|x|}$

Dari rumus turunan kedua perhatikan bahwa untuk $x < 0,\ k''(x) < 0$ dan $x > 0, k''(x) > 0$. Artinya terjadi perubahan kecekungan di sekitar x=0. Tapi perhatikan bahwa $k''(0)$ tidak ada.

2. Fungsi linear ax+by+c=0 tidak pernah mempunyai titik belok (karena berbentuk garis), meskipun turunan keduanya di sembarang titik selalu nol.

Teorema 6.9

Misalkan f mempunyai turunan kedua pada suatu interval yang memuat c dan $f'''(c)$ ada. Jika $f''(c) = 0$ dan $f''(c) \neq 0$, maka f mempunyai titik belok di c.

Soal

Sketsakan grafik fungsi yang memenuhi syarat yang diberikan

1. $f'(-1) = f'(1) = 0$ $\quad$ $f'(x) < 0,\ |x| < 1$
   $f'(x) > 0,\ |x| > 1$ $\quad$ $f(-1) = 4, f(1) = 0$
   $f''(x) < 0,\ x < 0$ $\quad$ $f''(x) > 0,\ x > 0$
2. $f'(-1) = 0$ $\quad$ $f'(1)$ tidak ada
   $f'(x) < 0,\ |x| < 1$ $\quad$ $f'(x) > 0,\ |x| > 1$
   $f(-1) = 4,\ f(1) = 0$ $\quad$ $f''(x) < 0,\ x \neq 1$
3. $f'(-1) = 0,\ f'(2) = 0$
   $f(-1) = f(2) = -1,\ f(-3) = 4$
   $f'(x) = 0, x < -3,\ \ f'(x) < 0$ pada $(-3,-1)$ dan $(0,2)$
   $f'(x) > 0$ pada $(-1,0)$ dan $(2,\infty)$
   $f''(x) > 0$ pada $(-3,0)$ dan $(0,5)$
   $f''(x) < 0$ pada $(5,\infty)$

6.3 Penggambaran Grafik Fungsi

Penerapan turunan yang lain adalah penggambaran grafik fungsi. Jika sebelumnya mungkin kita hanya mampu menggambar grafik fungsi sampai pada fungsi pangkat tiga, dengan menggunakan turunan kita akan bisa menggambar grafik fungsi dengan pangkat lebuh tinggi, dan juga fungsi rasional.

Namun sebelum pembahasan penggambaran grafik fungsi, akan dibahas dulu mengenai asimtot fungsi.

Asimtot grafik fungsi kontinu adalah garis lurus yang didekati oleh grafiknya tapi tanpa pernah saling berpotongan. Garis lurus ini dapat sejajar dengan sumbu koordinat (asimtot tegak atau mendatar), atau memotong sumbu koordinat di dua titik (asimtot miring).

- **Asimtot tegak**

  Garis x=c disebut asimtot tegak, bila salah satu syarat berikut dipenuhi

  $$\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$$

- **Asimtot mendatar**

  Garis y=b disebut asimtot mendatar, bila $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$

- **Asimtot miring**

  Garis y=mx+c merupakan asimtot miring dari suatu fungsi f(x), dengan

  $$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ dan } b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$$

Langkah-langkah penggambaran grafik fungsi

- Sangat penting untuk mengetahui daerah asal suatu fungsi
- Perpotongan fungsi dengan sumbu koordinat

  Tentukan titik potong grafik dengan sumbu x (y=0) dan sumbu y (x=0)
- Kesimetrian Fungsi

  Langkah ini cukup membantu bila yang akan digambar adalah fungsi genap (bila f(-x)=f(x)), fungsi ganjil (bila f(-x)=-f(x)) atau fungsi periodik (bila f(x+p)=f(p), p konstanta positif)
- Asimtot

  Langkah ini wajib diketahui bila yang akan digambar adalah fungsi rasional yang mempunyai titik-titik diskontinu.
- Kemonotonan dan kecekungan fungsi, titik kritis, titik belok serta titik ekstrim

Langkah ini merupakan langkah yang sangat penting, karena merupakan langkah terakhir yang dapat menampakkan wujud yang sebenarnya secara utuh grafik fungsi yang digambar.

Contoh

Gambarkan grafik fungsi

a. $f(x) = x^3 + 6x^2$

b. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

c. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

d. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

Penyelesaian

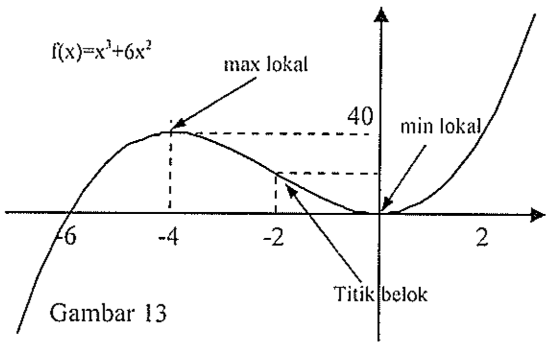
a. $f(x) = x^3 + 6x^2$

- Domain fungsinya adalah $\{x/x \in R\}$
- Titik potong sumbu x (y=0□(0,0) dan (-6,0)) Titik potong sumbu y (x=0□(0,0))
- Dengan menggunakan definisi tentukan asimtot yang mungkin
- Dengan menggunakan definisi tentukan asimtot yang mungkin

  Karena $\lim\limits_{x \to \infty} (x^3 + 6x^2) = \infty$, maka tidak terdapat asimtot datar. Fungsi f(x) merupakan fungsi polinomial sehingga tidak memiliki titik diskontinu, artinya tidak terdapat asimtot tegak
- $f'(x) = 3x^2 + 12x \to f'(x) = 0 \to x = 0$ dan x=-4 merupakan titik kritis
- $f''(x) = 6x + 12 \to f''(x) = 0 \to x = -2$

Perhatikan analisis berikut

	$f'(x)$	Kesimpulan
x<-4	+ + +	Grafik f monoton naik
-4<x<0	- - - -	Grafik f monoton turun
x>0	+ + +	Grafik f monoton naik
	$f''(x)$	Kesimpulan
x<-2	- - - -	Grafik f cekung ke bawah
x>-2	+ + +	Grafik f cekung ke atas



Gambar 13

Perhatikan tanda dari $f'(x)$ dan $f''(x)$ dan bandingkan dengan grafik di sampingnya.

Pada interval $(-\infty,-4)$ dan $(0,\infty)$ grafik f monoton naik, sedangkan pada (-4,0) grafik f monoton turun. Titik maximum lokal (-4,32) dan titik minimum lokal (0,0).

Di sekitar x=-2, terjadi perubahan kecekungan, untuk x<-2 grafik cekung ke bawah dan x>-2 grafik cekung ke atas. Sehingga titik belok dicapai di titik (-2,16)

b. $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

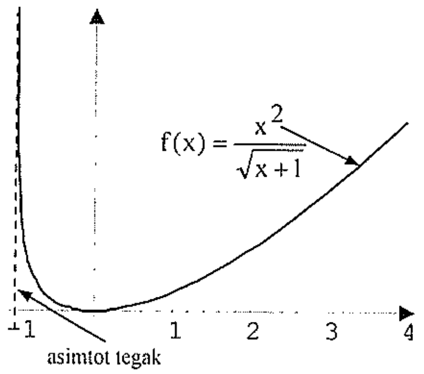
- Domain fungsinya adalah $\{x/x+1>0,\ x\in R\}=(-1,\infty)$
- Titik potong sumbu x dan sumbu y adalah (0,0).
- Bukan merupakan fungsi genap, fungsi ganjil maupun fungsi periodik
- Dengan menggunakan definisi, tentukan asimtot yang mungkin

Karena $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}=\infty$, maka tidak terdapat asimtot datar. Fungsi $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$ mempunyai titik diskontinu x=-1, dan untuk x□-1 $\sqrt{x+1}$ □0, sehingga f(x)□∞. Jadi x=-1 merupakan asimtot tegak karena $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\infty$

- $f'(x)=\dfrac{x(3x+4)}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$. Sesuai dengan definisi titik kritisnya adalah x=0 dan $x=-^4/_3$. Tapi karena domainnya $(-1,\infty)$, maka titik kritisnya x=0 ($x=-^4/_3$ *out of domain*)

- $f''(x)=\dfrac{3x^2+8x+8}{4(x+1)^2\sqrt{x+1}}$. Tidak terdapat x sedemikian sehingga $f''(x)=0$

Perhatikan analisis berikut ini



Gambar 14

	f'(x)	Kesimpulan
x<0	- - -	(-∞,0) grafik f monoton turun
x>0	+ ++	(0, ∞) grafik f monoton naik

Pada titik kritis, nilai fungsinya f(0)=0. Pada domainnya, grafik f cekung ke atas, dan di sekitar titik kritis tidak terjadi perubahan kecekungan. Artinya tidak terdapat titik belok. Untuk setiap x dalam domain f(x)>0. Karena grafik cekung ke atas maka (0,0) merupakan titik minimum lokal.

c. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

- Domain fungsinya adalah $\{x/x^2-1\neq0,\ x\in R\}=R-\{-1,1\}$

- Titik potong terhadap sumbu x dan y adalah (0,0)
- Dengan menggunakan definisi, tentukan asimtot yang mungkin

  Karena $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2-1}=1$, sehingga asimtot datarnya adalah garis y=1

  Fungsi $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$, mempunyai titik diskontinu x=-1 dan x=1. Untuk x□±1, x^2-1□0, sehingga f(x)□∞. Jadi asimtot tegaknya adalah x=-1 dan x=1

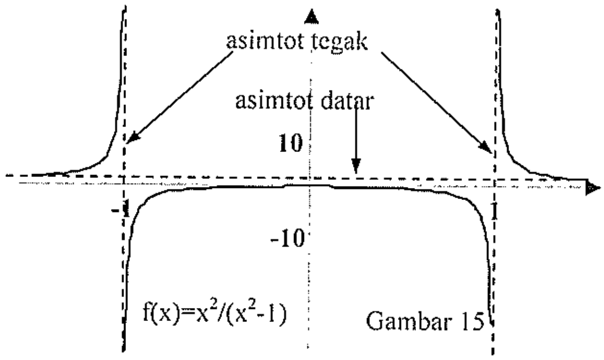
- $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$. Sesuai dengan definisi, titik kritisnya adalah x=0

$f''(x)=\dfrac{2(3x^2+1)(x^2-1)}{(x^2-1)^2}$, $f''(1)=0$, $f''(-1)=0$. Apakah x=±1 merupakan titik belok?

Perhatikan analisis berikut ini

	$f'(x)$	Kesimpulan
x<0	+ + +	Grafik f monoton naik
x>0	- - - -	Grafik f monoton turun

	$f''(x)$	Kesimpulan
x<-1	+ + +	f cekung ke atas
-1<x<1	- - - -	f cekung ke bawah
x>1	+ + +	f cekung ke atas



Gambar 15

Titik x=1 bukan merupakan titik belok (meskipun terjadi perubahan kecekungan di sekitar titik x=1). Hal inidikarenakan terdapat asimtot tegak dan mendatar. Kemudian untuk x<-1 dan x>1, f(x) selalu positif sehingga grafik fungsinya selalu di atas sumbu y, sedangkan untuk -1<x<1, f(x) bertanda negatif sehingga grafik fungsinya selelu di bawah sumbu y . Maksimum lokal dicapai titik (0,0)

d. $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

- Domain fungsinya adalah {x/x-1≠0, x∈R}=R-{1}
- Titik potong terhadap sumbu x dan y adalah (0,0)
- Dengan menggunakan definisi asimtot, tentukan asimtot yang mungkin

  Karena $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x-1}=\infty$, sehingga asimtot datarnya tidak ada.

Fungsi $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ mempunyai titik diskontinu di x=1, artinya ketika x□1, x-1□0, sehingga f(x)□∞. Jadi asimtot tegaknya adalah x=1.

- Karena $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}=x-\dfrac{1}{x-1}$ dan $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[-\dfrac{1}{x-1}\right]=0$, maka sesuai definisi asimtot miring, garis y=x merupakan asimtot miring dari $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ (asimtot miring biasanya dimiliki oleh grafik fungsi rasional dengan pangkat pembilang satu derajat lebih tinggi dari pangkat penyebut)

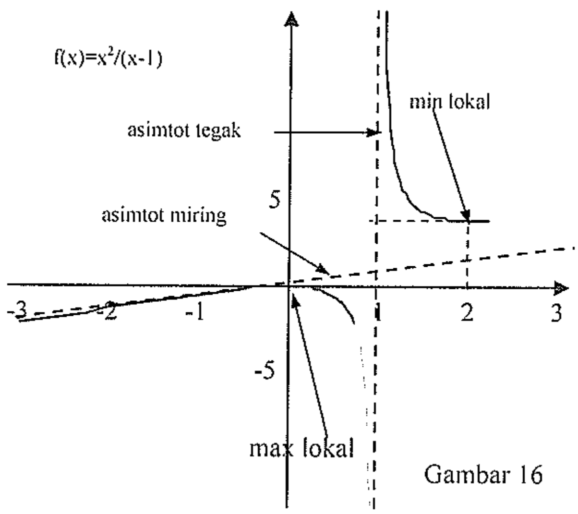
- $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}\to f'(x)=0\to x=0$ dan x=2.

$f''(x)=\dfrac{2}{(x-1)^3}$. Tidak terdapat x sedemikian sehingga $f''(x)=0$

Perhatikan analisis berikut ini

	$f'(x)$	Kesimpulan
x<0	+ + +	Grafik f monoton naik
0<x<1	- - - -	Grafik f monoton turun
1<x<2	- - - -	Grafik f monoton turun
x>2	+ + +	Grafik f monoton naik

Perhatikan tanda $f'(x)$ dan bandingkan dengangrafik di sampingnya. Pada (-∞,0) dan (2,∞) grafik f monoton naik, sedangkan pada (0,2) grafik f monoton turun. Maksimum lokal dicapai di titik (0,0) dan minimum lokal di (2,4).



Gambar 16

Soal

Sketsakan grafik fungsi berikut:

1 $y=\dfrac{x}{x^2-9}$

2 $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

3 $y = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$

6.4 Gerak Rektilinier

Misalkan sebuah obyek bergerak sepanjang garis lurus, dan untuk setiap waktu dalam interval tertentu, obyek tersebut mempunyai posisi x(t). Kecepatan rata-rata dari $t \to t + \Delta t$ adalah $\dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$. Untuk $\Delta t \to 0$ diperoleh $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}$ yang disebut kecepatan/laju sesaat pada saat t.

$$v(t) = x'(t)$$

Bila fungsi kecepatan itu juga diferensiabel terhadap waktu, maka itu adalah laju perubahan kecepatan terhadap waktu dan disebut **percepatan**, dan dinotasikan dengan

$$a(t) = v'(t) = x''(t)$$

Bila obyek bergerak ke kanan maka $v(t)>0$ dengan arah searah jarak temouhnya, dan bila bergerak ke kiri $v(t)<0$ dengan arah berlawanan arah dengan jarak tempuh.. Bila $a(t)>0$, maka gerakan obyek tersebut dipercepat, bila $a(t)<0$, maka obyek tersebut bergerak diperlambat.

Contoh

Sebuah obyek bergerak sepanjang sumbu x dengan posisi di setiap waktu $t \in [0,9]$ diberikan oleh persamaan $x(t)=t^3-12t^2+36t-27$. Analisislah gerakan obyek tersebut.

Penyelesaian

Pada saat t=0, obyek bergerak mulai posisi 27 satuan di sebelah kiri titik asal (x(0)= -27)

Dan berakhir pada jarak 54 satuan di sebelah kanan titik asal (x(9)=54)

Kecepatan obyek ditentukan dengan menurunkan x(t) terhadap t

$$v(t)=x'(t)=3t^2-24t+36=(3t-6)(t-6)$$

Dari turunan pertama terhadap x(t) dihasilkan sebagai berikut

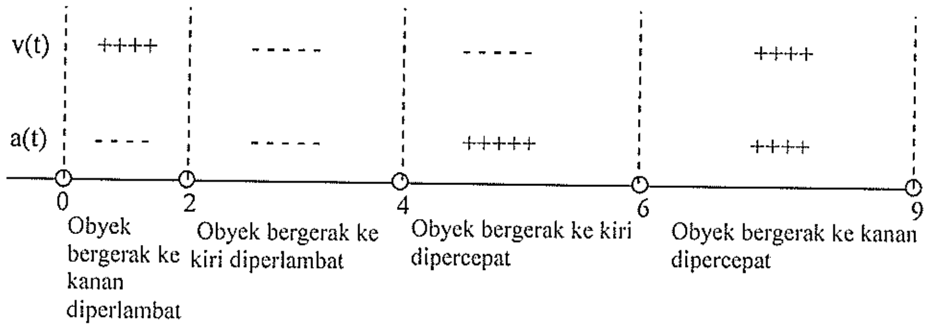
$$\text{kecepatan} = v(t) = \begin{cases} \text{positif} & ,0 \le t < 2 \\ 0 & ,t = 2 \\ \text{negatif} & ,\ 2 < t < 6 \\ 0 & ,\ t = 6 \\ \text{positif} & ,\ 6 < t \le 9 \end{cases}$$

Percepatan yang dilakukan obyek diperoleh dengan menurunkan v(t) terhadap t

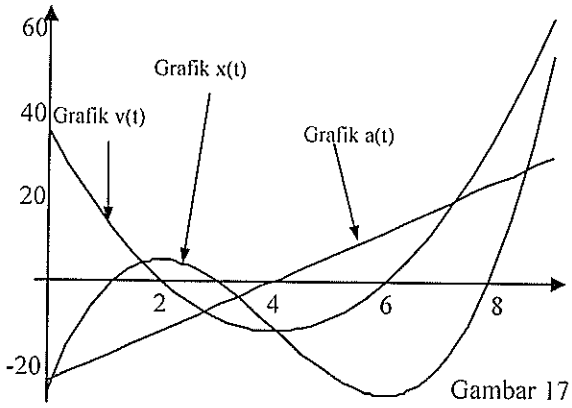
$$a(t)=v'(t)=x''(t)=6t-24$$

Analog dengan kecepatan, dihasilkan

$$\text{percepatan} = a(t) = \begin{cases} \text{negatif}, & 0 \le t < 4 \\ 0, & t = 4 \\ \text{positif}, & 4 < t \le 9 \end{cases}$$



Perhatikan grafik berikut



Gambar 17

-Grafik v(t), untuk t∈[0,2) dan t∈(5,9] di atas sumbu t, artinya saat itu obyek bergerak maju, saat t∈(2,5) obyek bergerak mundur

-Grafik a(t), untuk t∈[0,4) di bawah sumbu t, artinya saat itu gerakannya diperlambat, saat t∈(4,9) gerakannya diperlambat

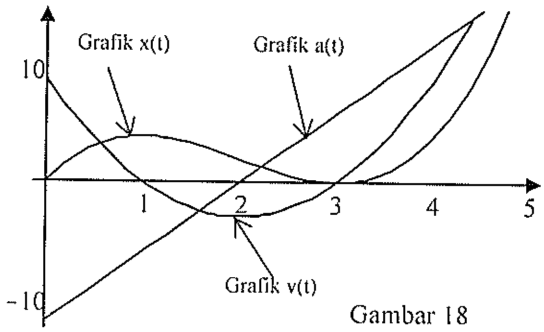
-Grafik x(t), saat t=0, mulai bergerak dari jarak 27 di sebelah kiri titik asal, dan berakhir pada jarak 54, 9 detik kemudian

Contoh

Posisi sebuah partikel diberikan oleh persamaan $x(t)=t^3-6t^2+9t$, dengan t dalam detik dan x dalam meter

Analisislah gerakan partikel tersebut

Penyelesaian



Gambar 18

Akan dianalisis dengan menggunakan grafik. Bandingkan sendiri dengan perhitungan matematisnya

Partikel berhenti pada saat t=1 dan t=3. Saat $t\in(0,2)$, partikel bergerak diperlambat, kemudian setelah 2 detik gerakannya dipercepat. Saat $t\in(0,1)$ dan $t>3$, partikel bergerak maju, saat $t\in(1,3)$ partikel bergerak mundur.

Contoh

Sebuah batu jatuh bebas dari ketinggian 100 m. Dalam berapa lama dan dengan kecepatan berapa batu itu sampai ke tanah?

Silakan dicoba sendiri (Petunjuk: percepatan gravitasi (g)=9,8 m/dtk^2. Rumus gerak jatuh jatuh ke bawah adalah $x(t)=V_o t-1/_2 gt^2$. Gerak jatuh bebas adalah gerak tanpa kecepatan awal, artinya $V_o=0$)

6.5 Masalah laju yang berkaitan

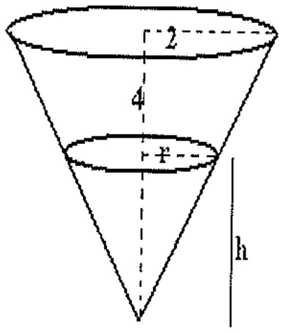
Jika udara dipompakan ke dalam balon udara, maka jari-jari balon akan bertambah seiring dengan pertambahan volume udara yang dipompakan ke dalamnya. Pertambahan tersebut, baik pertambahan volume maupun pertambahan panjang jari-jari, keduanya merupakan laju perubahan terhadap waktu. Masalah-masalah ini juga dapat diselesaikan dengan turunan.

Hal utama yang perlu diingat dan dipahami adalah bahwa **turunan merupakan laju perubahan.**

Contoh

1. Tangki air berbentuk kerucut terbalik, dengan jari-jari alas 2m dan tinggi 4m. Jika air dipompakan ke tangki dengan laju 2m^3/menit, tentukan pertambahan tinggi air ketika kedalamannya 3m

   Penyelesaian



Yang diketahui adalah laju volume air yang dipompakan ke dalam tangki yaitu $\frac{dV}{dt} = 2$, ditanyakan $\frac{dh}{dt}$ ketika h=3

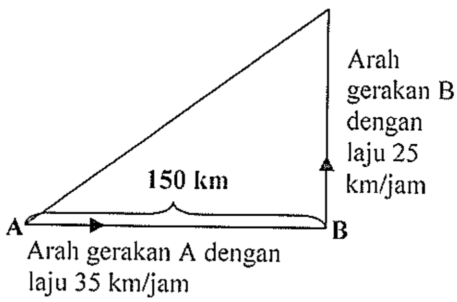
Karena $\frac{r}{h} = \frac{2}{4}$, maka $V = \frac{\pi h^3}{12}$

Pendiferensialan kedua ruas terhadap t menghasilkan:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{4}\frac{dh}{dt} \rightarrow 2 = \frac{9}{4}\pi\frac{dh}{dt} \rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{8}{9\pi}\,m/menit$$

2. Pada pukul 12 siang, kapal A berada 150 km di sebelah barat kapal B. Kapal A berlayar ke timur dengan laju 35 km/jam, dan kapal B berlayar ke utara dengan laju 25 km/jam. Seberapa cepat jarak antara kapal A dan B berubah pada pukul 4 sore?

Penyelesaian



Posisi Kapal A dan B sebelum dan sesudah berlayar membentuk segitiga siku-siku, sehingga berlaku teorema pithagoras $x^2+y^2=z^2$, dengan x, y, z berturut-turut alas, tinggi dan sisi miring

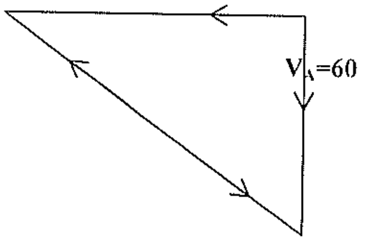
Pendiferensialan kedua ruas terhadap t dan substitusi nilai-nilai yang diketahui menghasilkan $x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = z\frac{dz}{dt}$. Dari pukul 12 siang sampai pukul 4 sore, kedua kapal sudah berlayar selama 4 jam. Sehingga kapal A sudah menempuh jarak 140 km, kapal B menempuh jarak 100 km. Shg bila nilai-nilai ini disubstitusi ke dalam persamaan hasil pendiferensialan, dihasilkan

$$10\frac{dx}{dt} + 100\frac{dy}{dt} = \sqrt{10^2 + 100^2}\,\frac{dz}{dt} \rightarrow 10.35 + 100.25 = \sqrt{10^2 + 100^2}\,\frac{dz}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{2850}{\sqrt{10100}}$$

3. Dua mobil berangkat dari tempat yang sama. Mobil A berangkat ke selatan dengan kecepatan 60 km/jam, dan mobil B berangkat ke barat dengan kecepatan 25 km/jam. Pada laju berapa jarak antara A dan B bertambah setelah 2 jam?

Penyelesaian



Posisi A dan B setelah bergerak membentuk segitiga siku-siku, sehingga $S_A^2+S_B^2=S_{AB}^2$, dengan S_{AB} jarak antara mobil A dan B.

$$S_A\frac{dS_A}{dt}+S_B\frac{dS_B}{dt}=S_{AB}\frac{dS_{AB}}{dt}$$

Setelah berjalan 2 jam, dihasilkan persamaan

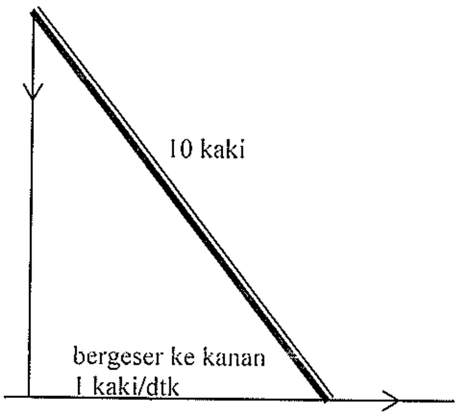
$$120.60+50.25=\sqrt{120^2+50^2}\frac{dS_{AB}}{dt}\to\frac{dS_{AB}}{dt}=\frac{8450}{130}\text{km / jam}$$

4. Tinggi suatu segitiga yang terbuat dari besi memuai dengan laju 1 cm/menit, dan luasnya memuai dengan laju 2 cm^2/menit. Pada laju berapa alas segitiga bertambah pada waktu tingginya 10 cm dan luasnya 100 cm^2?

Penyelesaian

$$L=\frac{1}{2}aT\to\frac{dL}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{da}{dt}T+a\frac{dT}{dt}\right)\to 4=\frac{da}{dt}.10+20.1\to\frac{da}{dt}=-\frac{8}{5}$$

5. Sebuah tangga yang panjangnya 10 kaki disandarkan pada dinding. Pada suatu saat kaki tangga bergeser menjauhi dinding dengan laju 1 kaki/detik. Berapa laju bergesernya puncak tangga saat kaki tangga berjarak 6 kaki dari dinding.



Bila jarak antara puncak tangga dan tanah y, dan jarak kaki tangga dan dinding x, maka berlaku $x^2+y^2=10$. Sehingga ketika x=6 kaki, y=8. Penurunan kedua ruas terhadap t dan substitusi nilai x dan y menghasilkan

$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0\to\frac{dy}{dt}=-\frac{3}{4}$ (bertanda negatif), artinya jarak puncak tangga dan tanah semakin kecil

6.6 Bentuk Tak Tentu dan Aturan L'Hospital

Banyak masalah limit yang belum dapat diselesaikan dengan sifat-sifat limit maupun rumus yang sudah dibahas sebelumnya. Contohnya adalah ketika kita akan mencari nilai $f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$ di x=1. Tentunya hal ini tidak dapat dilakukan karena f(x) teak terdefinisi di x=1. Yang dapat diketahui hanyalah nilai f(x) untuk x di sekitar x=1, yaitu dengan $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}$. Namun limit ini tidak dapat diselesaikan dengan sifat limit hasil bagi (limit hasil bagi sama dengan hasil bagi limit), karena baik pembilang maupun penyebut nilainya sama-sama mendekati nol dan $\frac{0}{0}$ tak terdefinisi.

Secara umum bila kita mempunyai limit dengan bentuk $\lim\limits_{x \to c} \frac{g(x)}{h(x)}$, dengan $g(x) \to 0, h(x) \to 0$ ketika $x \to c$, maka bentuk ini dikenal dengan bentuk tak tentu jenis $\frac{0}{0}$. Kita pernah menyelesaiakn soal $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ dan $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ berturut-turut dengan memfaktorkan dan dengan tafsiran geometris. Tapi tidak demikian halnya dengan $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$. Untuk menyelesaikannya akan dibahas bersama aturan yang disebut aturan l'Hospital.

Bentuk tak tentu yang akan dibahas adalah bentuk tak tentu $^0/_0$, $^\infty/_\infty$, ∞-∞, $0.\infty$. Sedangkan bentuk tak tentu: 0^0, ∞^0, dan 1^∞ akan dibahas setelah membahas logaritma natural.

Teorema 6.9 (Teorema L'Hospital untuk bentuk $^0/_0$)

- Jika $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$
- $f'(x)$ dan $g'(x)$ ada, kecuali mungkin di x=c

maka $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Teorema 6.10 (Teorema L'Hospital untuk bentuk $^\infty/_\infty$)

- Jika $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = \pm\infty$
- $f'(x)$ dan $g'(x)$ ada, kecuali mungkin di x=c

maka $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

- Bentuk Tak tentu $0.\infty$

  Bila $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0$ dan $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \pm\infty$. Maka $\lim\limits_{x \to c} f(x)g(x)$ menjadi bentuk tak tentu jenis $0.\infty$. Bila ini yang terjadi, dapat diselesaikan dengan menuliskan hasil kali fg sebagai hasil bagi $fg = \frac{f}{1/g}$ atau $fg = \frac{g}{1/f}$ sehingga benyuk tak tentunya menjadi bentuk tak tentu jenis $^{\infty}/_{\infty}$ atau $^{0}/_{0}$

- Bentuk Tak Tentu ∞-∞

  Bila $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$ dan $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \infty$. Maka $\lim\limits_{x \to c} [f(x) - g(x)]$ menjadi bentuk tak tentu jenis ∞-∞. Bila ini yang terjadi, dapat diselesaikan dengan mengubah selisih menjadi suatu hasil bagi (dengan menyamakan penyebut atau merasionalkan penyebut atau mengelompokkan faktor yang sama sehingga diperoleh bentuk tak tentu jenis $^{\infty}/_{\infty}$ atau $^{0}/_{0}$

- Bentuk Pangkat Tak Tentu

  Bentuk tak tentu yang lain adalah limit yang berbentuk $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^{g(x)}$, yaitu bentuk tak tentu jenis 0^0, ∞^0, 1^∞

  Bentuk pangkat tak tentu dapat diselesaikan dengan mengoperasikan logaritma pada ruas kiri dan kanan.

  Misalkan $y = [f(x)]^{g(x)}$ maka $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$

Contoh

Hitunglah

a. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\tan \pi x}{x^2 - 4}$

b. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\tan \pi x}{x^2 - 4}$

c. $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + \sin 4x)^{\cot x}$

d. $\lim\limits_{x \to \pi} (x - \pi) \cot x$

e. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x} \right)$

f. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$

Penyelesaian

Akan diselesaikan soal a, c dan d, jawaban soal b dan e analog dengan a dan d, f analog dengan c

a. Substitusi x=2 ke dalam $f(x) = \dfrac{\tan \pi x}{x^2 - 4}$, dihasilkan bentuk $^0/_0$. Bila g(x)=tanπx dan h(x)=x^2-4, maka $g'(x)=\pi\sec^2\pi x$ dan $h'(x)=2x$. Sehingga menurut teorema L'Hospital

$$\lim_{x\to 2} \frac{\tan \pi x}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} \frac{\pi \sec^2 \pi x}{2x} = \frac{\pi}{4}$$

c. Misalkan $y = (1+\sin 4x)^{\cot x}$, maka $\ln y = \cot x \ln(1+\sin 4x)$ dan $y = e^{\cot x \ln(1+\sin 4x)}$

Akan dicari terlebih dahulu $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln y$, untuk kemudian $\lim\limits_{x\to 0^+} y = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln y}$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \cot x \ln(1+\sin 4x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\sin 4x)}{\tan x}$$

$$= \lim_{x\to o^+} \frac{\frac{4\cos 4x}{(1+\sin 4x)}}{\sec^2 x}$$

$$= \lim_{x\to o^+} \frac{4\cos 4x}{\sec^2 x(1+\sin 4x)} = 4$$

Sehingga $\lim\limits_{x\to 0^+} y = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^{\lim\limits_{x\to o^+} \ln y} = e^4$

d. Substitusi x=π ke dalam $f(x) = (x-\pi)\cot x$ menghasilkan bentuk 0.∞. Bentuk ini akan diubah menjadi bentuk tak tentu $^0/_0$, dengan menulis f(x) sebagai $f(x) = (x-\pi)\dfrac{1}{\tan x}$. Bila g(x)=(x-π) dan h(x)=tan x, maka $g'(x)=1$ dan $h'(x)=\sec^2 x$. Sehingga menurut teoremaL'Hospital

$$\lim_{x\to\pi} (x-\pi)\cot x = \lim_{x\to\pi} \frac{(x-\pi)}{\tan x} = \lim_{x\to\pi} \frac{1}{\sec^2 x} = \lim_{x\to\pi} \cos^2 x = 1$$

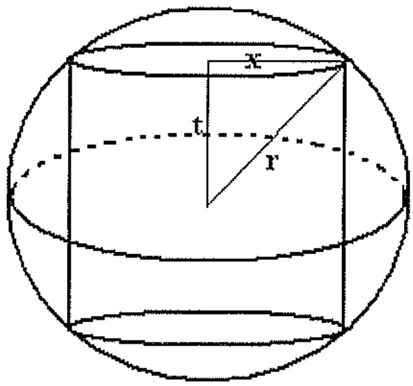
6.7 Terapan Masalah Ekstrim

Banyak masalah dalam kehidupan nyata yang dalam perumusannya menentukan nilai ekstrim. Dalam menyelesaikan masalah seperti ini, kesulitan terbesarnya adalah mengubah masalah yang masih dalam ujud kalimat menjadi masalah pengoptiuman matematis dengan menetapkan fungsi yang harus dimaksimumkan atau diminimumkan.

Contoh

1. Sebuah tabung diletakkan dalam sebuah bola berjarijari r. Tentukan volume terbesar yang mungkin dari tabung tersebut.

   Penyelesaian



Misalkan tinggi tabung 2t dan jari-jari alas x. Antara tinggi tabung, jari-jari bola dan jari-jari lingkaran alas membentuk segitiga siku-siku sehingga berlaku aturan pithagoras yaitu $x^2+t^2=r^2$. Karena r bola konstan, maka penurunan kedua ruas terhadap t menghasilkan:

$$2x\frac{dx}{dt}+2t=0 \rightarrow \frac{dx}{dt}=-\frac{1}{x}\ldots \qquad (1)$$

Volume tabung adalah $V=\pi x^2 2t=2\pi x^2 t$. Tujuan kita adalah volume terbesar dari tabung yang dicapai bila $\frac{dV}{dt}=0$.

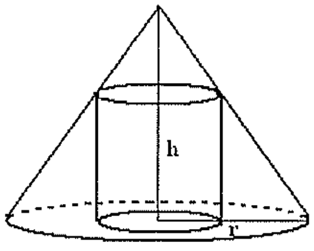
$$\frac{dV}{dt}=4\pi x\frac{dx}{dt}t+2\pi x^2 \rightarrow \frac{dV}{dt}=0 \Leftrightarrow \frac{dx}{dt}=-\frac{x}{2t}\cdots \qquad (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$x=\sqrt{2}$ dan $r^2=\frac{3}{3}x^2$, sehingga $V=\frac{4\pi r^3}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ volume bola.

2. Sebuah tabung diletakkan dalam kerucut dengan tinggi h dan jari-jari alas r. Tentukan volume terbesar yang mungkin dari tabung tersebut.

   Penyelesaian



Bila dimisalkan tinggi tabung=t dan jari-jari tabung=x,

maka berlaku perbandingan $\frac{h}{r}=\frac{t}{r-x}$

$\rightarrow r=\frac{hr-hx}{t}$. $V_{tabung}=\pi x^2 t=\pi x^2\frac{hr-hx}{t}$

$\frac{dV}{dx}=2\pi xh-\frac{3\pi x^2 h}{r}$

3. Tentukan titik pada kurva $y^2=4+x^2$ yang terdekat dengan titik (2,0)

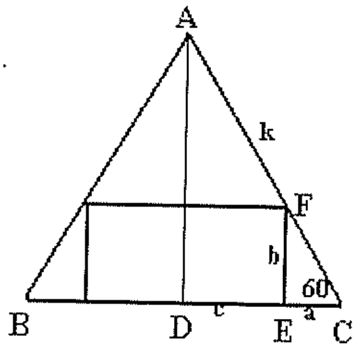
   Penyelesaian

Mencari titik terdekat sama saja dengan mencari jarak terpendek (minimum). Misalkan (x,y) terletak pada kurva $y^2=4+x^2$, maka jarak (x,y) ke (2,0) merupakan fungsi dari x dan y, yaitu $f=d^2=(x-2)^2+(y-0)^2=(x-2)^2+y^2=(x-2)^2+(4+x^2)$. Ketika kita meminimumkan jarak tersebut, berarti sama saja dengan meminimumkan fungsi $f=(x-2)^2+(4+x^2)$, yaitu mencari x sedemikian sehingga $f'(x)=0$

$f'(x)=2(x-2)+2x$□$f'(x)=0$ dipenuhi oleh x=1. Substitusi x ke persamaan $y^2=4+x^2$ menghasilkan y=-5 dan y=5. Jadi titik pada kurva $y^2=4+x^2$ yang terdekat ke (2,0) adalah (1,-5) dan (1,5).

4. Tentukan dimensi persegi panjang yang memiliki luas terbesar dan dapat diletakkan dalam segitiga sama sisi dengan panjang sisi k, jika salah satu dari sisi persegi panjang tersebut terletak pada alas segitiga.

Penyelesaian



Bila segitiga ABC adalah sama sisi dengan panjang sisi k, maka $AD=\frac{1}{2}k\sqrt{3}$ dan $CD=\frac{1}{2}k$.

Bila EC=a, DE=c,dan EF=b, maka berla ku perbandingan $\frac{a}{b}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$b=a\sqrt{3}=(\frac{1}{2}k-c)\sqrt{3}$$

Turunan b terhadap c menghasilkan $\frac{db}{dc}=-\sqrt{3}$

Luas persegi panjang $L_{pp}=2c.b=2c(\frac{1}{2}k-c)\sqrt{3}=ck\sqrt{3}-2c^2\sqrt{3}$

Akan dicari c dan b sehingga luasnya maksimum. Hal ini berarti harus ditemukan c sedemikian $L'(c)=0$

$\frac{dL}{dc}=k\sqrt{3}-4c\sqrt{3}=0\rightarrow c=\frac{k}{4}$. Sehingga $b=\frac{1}{4}k\sqrt{3}$

Jadi lebar persegi panjang adalah $\frac{\sqrt{3}}{4}$ panjang sisi segitiga, dan panjang persegi panjang $\frac{1}{2}$ panjang sisi segitiga.

5. Sebuah pabrik mengemas hasil produksi air mineral dengan volume 250 cc dalam bentuk tabung tegak. Jika pembuatan bidang alas dan atas sama sebesar Rp. 100,

dan bidang sisinya Rp. 200, tentukan ukuran tabung sehingga biaya pembuatannya minimum.

Penyelesaian

Meminimumkan biaya pembuatan tabung minimum, sama saja dengan meminimumkan luas permukaan tabung.

$V = \pi r^2 t \to 250 = \pi r^2 t \to t = \dfrac{250}{\pi r^2}$. Luas permukaan tabung adalah

$L = 2\pi r t + 2\pi r^2 \to L = \dfrac{500}{r} + 2\pi r^2$.

Meminimumkan luas berarti mencari r sehingga $L'(r)=0$.

$$L'(r) = -\frac{500}{r^2} + 4\pi r = 0 \to r = \sqrt[3]{\frac{500}{4\pi}} = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}} \to t = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$$

$$L = \text{Rp}.200\left(100\sqrt[3]{\pi}\right) + \text{Rp}.100\left(50\sqrt[3]{\pi}\right) = \text{Rp}.20500\sqrt[3]{\pi}$$

6.8 Penerapan turunan di bidang ekonomi

Fungsi biaya (dinotasikan C(x)) adalah biaya total yang dikeluarkan oleh suatu perusahaan untuk memproduksi x satuan barang tertentu. Jika banyaknya barang yang diproduksi bertambah dari x_1 menjadi x_2, maka biaya tambahan yang diperlukan adalah $\Delta C=C(x_2)-C(x_1)$ dan laju perubahan biayanya adalah:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

Laju perubahan sesaat biaya terhadap banyaknya barang yang dihasilkan (limit ketika Δx□0) disebut dengan **biaya marginal**, yaitu:

$$\text{biaya marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

Sedangkan biaya rata-rata (c(x)) adalah biaya yang dibutuhkan untuk memproduksi tiap satuan barang.

Biaya rata-rata dirumuskan dengan $c(x) = \dfrac{C(x)}{x}$

Contoh

Produksi x barang dari sebuah pabrik dirumuskan dengan $C(x)=10000+5x+0{,}01x^2$.

Tentukan

a. Biaya marginal pada produksi sebanyak 300 barang (dalam dolar).

b. Tentukan pada tingkat produksi berapa biaya rata-ratanya paling murah

Penyelesaian

Dari fungsi biaya C(x), konstanta pada umumnya menyatakan biaya *overhead* (misalkan sewa, perawatan), sedangkan suku yang lain menyatakan bahan baku, buruh dan sebagainya. Bahan baku bisa saja sebanding dengan x (barang yang diproduksi), tetapi biaya buruh mungkin saja sebagian bergantung pada lain faktor, misalnya biaya lembur.

a. $C(x) = 10000 + 5x + 0{,}01\,x^2 \rightarrow C'(x) = 5 + 0{,}02\,x$

Bila x=300, maka $C'(300) = 5 + 0{,}02\,(300) = 11$

Jadi biaya marginalnya adalah \$11 tiap barang

b. Biaya rata-rata (c(x))=$\dfrac{C(x)}{x} = 5 + 0{,}01x$

Menentukan tingkat produksi sehingga harga tiap satuan barang paling murah sama saja dengan menentukan x sehingga $c'(x)=0$

$$c(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{10000}{x} + 5 + 0{,}01x \Rightarrow c'(x) = -\frac{10000}{x^2} + 0{,}01$$

$c'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$. Jadi saat diproduksi 10 barang, biaya rata-ratanya paling murah.

Perhatikan rumus harga rata-rata $c(x) = \dfrac{C(x)}{x}$

Harga rata-rata minimum artinya $c'(x)=0$□$\dfrac{C'(x).x - C(x)}{x^2} = 0$

$$\Leftrightarrow C'(x).x - C(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow C'(x) = \frac{C(x)}{x} = c(x)$$

Dari penurunan rumus ini dapat disimpulkan, bahwa pada **saat harga rata-rata minimum, harga rata-rata=biaya marginal**

Jika fungsi biaya, fungsi biaya marginal dan fungsi biaya rata-rata yang merupakan biaya produksi sudah kita bahas, sekarang akan dibahas biaya pemasaran yang meliputi fungsi permintaan, fungsi pendapatan, fungsi pendapatan marginal dan fungsi keuntungan.

Fungsi permintaan (fungsi harga) adalah harga tiap satuan barang ketika yang terjual adalah x barang.. Fungsi permintaan dinotasikan dengan **p(x)**.

Fungsi pendapatan adalah pendapatan total ketika x satuan barang terjual. Bila harga tiap barang adalah p(x), maka fungsi pendapatan (dinotasikan **R(x)**) dirumuskan dengan **R(x)=x.p(x)**

Keuntungan didefeinisikan dengan sebagai selisih harga jual (pendapatan) dengan harga produksi (biaya). Sehingga fungsi keuntungan dirumuskan dengan

$$\mathbf{P(x)=R(x)-C(x)}$$

Contoh

1. Tentukan tingkat produksi yang memaksimumkan keuntungan bagi perusahaan bila fungsi biaya dan fungsi permintaan didefinisikan dengan

   $C(c)=42+1,13x-0,01x^2+0.00004x^3$ dan $p(x)=2,5-0,01x$

   Penyelesaian

   Fungsi keuntungan (P(x))=Fungsi pendapatan(R(x))-Fungsi biaya(C(x))

   Fungsi pendapatan=$x.p(x)=2,5x-0,02x^2$

   Sehingga R(x)= $42+1,13x-0,01x^2+0,00004x^3-(2,5x-0,01x^2)=42+1,13x+0,00004x^3$

   Diharapkan keuntungan maksimum, sehingga dicari x sehingga $R'(x)=0$

   $-1,37+0,00012x^2=0\square\, x=\sqrt{\dfrac{1,37}{0,00012}}=106,85\approx 107$

   Jadi supaya keuntungannya maksimum harus memproduksi 107 barang.

2. Sebuah toko elektronik memperkirakan mampu menjual 100 buah player VCD seminggu, masing-masing seharga Rp.500.000. Berdasarkan survey yang dilakukan sebelumnya, penjualan akan bertambah 20 unit VCD player per minggu jika dilakukan pemotongan harga (diskon) 10%.

   Tentukan

   a. Rumus untuk fungsi harga
   b. VCD player yang terjual selama seminggu sehingga pendapatan maksimum
   c. Pendapatan maksimum seminggunya.

   Penyelesaian

a. Misalkan di toko tersebut terdapat x player seminggunya. Dengan terjualnya 100 player, maka masih tersedia (x-100) player. Dari yang tersisa, potongan harga yang diberikan adalah $\frac{x-100}{20}.\text{Rp}.50.000$.

Bila fungsi harga (p(x)) didefinisikan sebagai harga tiap satuan barang ketika terjual x barang, maka

$$\begin{aligned} p(x) &= \text{Rp}.500.000 - \frac{x-100}{20}.\text{Rp}.50.000 \\ &= \text{Rp}.750.000 - 2500\,x \end{aligned}$$

b. Fungsi pendapatan adalah hasil kali fungsi harga dengan banyaknya barang yang terjual, $R(x)=x.p(x)= 750.000x-2500x^2$

Fungsi pendapatan maksimum, bila $R'(x)=0$□$x=150$

c. Pendapatan maksimum ketika yang terjual 150 VCD, sehingga $R(x)=750.000(150)-2500(150)^2=$Rp. 56.250.000.

Latihan

1. Carilah nilai maksimum serta minimum global dan lokal dari fungsi berikut:
   a. $f(x)=1+(x+1)^2$, $-2\leq x<5$
   b. $f(x)=\begin{cases} x^2 \quad , & -1\leq x<0 \\ 2-x^2, & 0\leq x\leq 1 \end{cases}$
2. Tentukan titik kritis fungsi berikut:
   a. $f(r)=\dfrac{r}{r^2+1}$
   b. $f(x)=4x^3-9x^2-12x+3$
   c. $g(x)=|2x+3|$
   d. $g(t)=5t^{2/3}+t^{5/3}$
3. Pada suhu antara 0^0C dan 30^0C, volume (dalam sentimeter kubik) dari 1 kg air pada suhu T secara hampiran dinyatakan oleh

   $$V=999{,}87-0{,}06426T+0{,}0085043T^2-0{,}0000679T^3$$

   Tentukan suhu sehingga pada saat itu volumenya maksimum.

4. Suatu benda dengan berat W ditarik sepanjang bidang datar dengan oleh gaya yang bekerja sepanjang tali yang diikatkan oleh benda itu. Jika tali membuat sudut θ dengan bidang, besarnya gaya didefinsikan dengan

$$F = \frac{\mu W}{\mu \sin\theta + \cos\theta}$$

dengan μ adalah koefisien gesekan (konstanta positif) dan $0 \le \theta \le \pi/2$. Perlihatkan bahwa F minimum ketika $\tan \theta = \mu$

5. Tunjukkan, bahwa $g(x)=2+(x-5)^3$, mempunyai titik kritis 5, tapi tidak mempunyai nilai ekstrim saat $x=5$.
6. Jika f mempunyai minimum pada $x=c$, tunjukkan bahwa $g(x)=-f(x)$ juga mempunyai minimum pada $x=c$.
7. Gambarkann grafik fungsi berikut
   a. $f(x)= x^4-4x^3$
   b. $f(x)=x^{2/3}(6-x)^{1/3}$
   c. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$
   d. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$
   e. $f(x) = x|x|$
8. Tentukan limitnya
   a. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - x + 5}{5x^2 + 6x - 1}$
   b. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(3x-2)(2x+4)}{(2x+1)(x+2)}$
   c. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x\sqrt{x} + 3x + 1}{x^2 - x + 11}$
   d. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}$
   e. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{2x+1}}{x+4}$
   f. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{2x^2+3} - \sqrt{2x^2-5}\right)$

g. $\lim_{x \to \infty}\left(\sqrt{x^2 + 2x} - x\right)$

9. Jarak antara dua sumber panas A dan B yang memiliki intensitas panas a dan b adalah s meter. Intensitas suatu titik P di antara A dan B dirumuskan dengan

$$I(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(s-x)^2}$$

dengan x adalah jarak antara A dan P. Tentukan kedudukan P sehingga intensitasnya paling rendah.

10. Seorang ahli biologi mengamati pertumbuhan suatu koloni bakteri. Luas daerah yang ditempati bakteri diukur dan dicatat setiap hari, misalkan L(t) dan ternyata luas daerah tersebut selalu lebih kecil dari 50 cm^2. Analisi terhadap data yang diperoleh mengungkapkan adanya hubungan antara laju perubahan luas dan luas pada sembarang waktu dengan hubungan $\frac{dL}{dt} = \frac{3}{50}L(50 - L)$. Tentukan luas L ketika perubahan luas itu maksimum dan berapa laju perubahan luas maksimum tersebut.

11. Sebuah kendaraan bermotor mempunyai kecepatan max 75 km/jam dan kecepatan min 10 km/jam. Bila kendaraan bergerak dengan kecepatan x km/jam, maka konsumsi bahan bakarnya dirumuskan dengan

$$f(x) = \frac{1}{200}(\frac{1600}{x} + x) \text{ liter/km}$$

Untuk menempuh jarak tertentu dengan harga bensin yang tertentu pula, fungsi biayanya adalah $C(x) = 60(\frac{1600}{x} + x)$. Berapa kecepatan paling ekonomis kendaraan tersebut, dan berapa konsumsi bahan bakarnya?

12. Tentukan dimensi segitiga sama kaki yang memiliki luas terbesar sehingga dapat dimasukkan dalam lingkaran berjari-jari r.
13. Analog dengan soal nomor 12, tetapi segitiga sama sisi.
14. Margin atas dan bawah sebuah poster masing-masing 6cm dan margin samping masing-masing 4 cm. Jika luas bahan tercetak pada poster 384 cm^2, tentukan dimensi poster dengan luas terkecil.

15. Sebuah poster harus mempunyai luas 180 cm^2 dengan margin bawah dan samping 1 cm, sedangkan margin atas 2 cm. Tentukan dimensi sehingga luas tercetak maksimum.
16. Sebuah balon bundar berbentuk bola dipompa, tentukan kecepatan perubahan luas permukaan terhadap jari-jarinya saat jari-jari bola 5 cm
17. Sebuah kerucut lingkaran tegak terbalik berjari-jari 10 cm dan tinggi 20 cm penuh berisi air. Jika air keluar dari puncak kerucut dengan laju 5 cc/detik, tentukan laju turunnya permukaan air di dalam kerucut pada saat tinggi air 5 cm dari atas!
18. Sebuah tangga panjangnya 6 m bersandar pada dinding tegak yang tingginya 4 m dengan bagian atas tangga melampaui batas atas dinding. Jika ujung bawah tangga ditarik horisontal dengan kecepatan 2 m/detik menjauhi dinding, tentukan kecepatan ujung atas tangga pada saat tangga membentuk sudut 60^0 dengan permukaan kantai.
19. Sebuah lampu tergantung tegak lurus 5 meter di atas jalan lurus. Seorang dengan tinggi 160 cm, bergerak menjauhi lampu dengan kecepatan 2m/detik. Tentukan kecepatan bergerak ujung bayangan dan pertambahan bayangan orang itu.
20. Dari sebuah pelabuhan pulau, berangkat dua kapal ke arah yang berbeda. Kapal A berlayar ke utara pada pukul 09.00 dengan kecepatan 24 knots/jam, kapal B berlayar ke timur pada pukul 11.00 dengan kecepatan 30 knots/jam. Tentukan kecepatan bertambahnya jarak antara dua kapal pada pukul 14.00.
21. Sebuah bak penampungan air berbentuk balok dengan panjang, lebar dan tinggi berturut-turut 8m, 2m, 4m. Ke dalam balok itu dituangkan air dengan kecepatan 2m/detik. Tentukan kecepatan naiknya permukaan air saat tinggi air 1m dari dasar bak.
22. Sebuah balon gas naik tegak lurus dari titik A dengan kecepatan 15m/detik. Titik B berada pada jarak 30 m dari A. Tentukan kecepatan bertambahnya jarak antara balon dan titik B jika tinggi balon 40m.
23. Pasir dijatuhkan dengan kecepatan 10 m^3/detik, sehingga membentuk tumpukan pasir berbentuk kerucut. Jika tinggi kerucut dua kali jari-jari lingkaran alas, tentukan kecepatan bertambahnya tinggi kerucut saat tinggi tumpukan 8m.

24. Andaikan sebuah gelembung sabun berbentuk bola. Kecepatan udara yang ditiupkan ke balon adalah 4 cc/detik. Tentukan kecepatan bertambahnya jari-jari bola pada saat jari-jarinya 2 cm.

25. Sebuah partikel P bergerak sepanjang kurva $y = \sqrt{x^2 - 4}$, $x \geq 2$. Jika absis dari gerakan partikel P bertambah dengan kecepatan 5 satuan/detik, tentukan kecepatan bertambahnya ordinat P saat absisnya 3 satuan.

TUJUAN INSTRUKSIONAL

Umum

Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester I), mahasiswa mempunyai pemahaman konseptual yang benar tentang topik-topik utama dalam Kalkulus (limit, kekontinuan, diferensial, integral) beserta teorema dan sifat-sifat serata teknik-teknik penting didalamnya.

Khusus

Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 21), mahasiswa akan dapat memahami pengertian integral tak tentu sebagai suatu anti turunan, menyelesaikan soal integral fungsi aljabar, fungsi trigonometri, fungsi eksponensial, fungsi logaritma dengan teknik integral parsial, integral sunstitusi trigonometri, integral fungsi rasional, serta menguasai startegi pengintegralan.

7. INTEGRAL TAK TENTU DAN TEKNIK PENGINTEGRALAN

Konsep integral tak tentu diperkenalkan sebagai kebalikan operasi pendiferensialan, yaitu bentuk paling umum dari anti turunan. Kemudian dibahas teknik pengintegralan, yang meliputi: integral parsial, integral fungsi trigonometri, integral substitusi trigonometri, integral fungsi rasional, dan substitusi yang merasionalkan. Juga dibahas integral fungsi transenden, integral fungsi invers trigonometri, integral fungsi hiperbolik dan invers hiperbolik, yang semuanya diperoleh dari turunan fungsi-fungsi tersebut.

7.1 INTEGRAL TAK TENTU

Untuk fungsi f yang terdefinisi pada selang buka I, dapat ditentukan suatu fungsi F yang memenuhi $F' = f$. Fungsi F seperti ini disebut anti turunan dari f.

Definisi 7.1

Fungsi F disebut anti turunan dari f pada interval I, jika $F'(x) = f(x)$ untuk setiap x dalam I.

Teorema 7.1

Jika F adalah anti turunan f pada interval I, maka bentuk F yang paling umum adalah $F(x) + C$, dengan C adalah konstanta sembarang.

Contoh

1. Misalkan diketahui $f(x) = 4\sin x - 3x^5$, akan dicari anti turunan dari f(x).

   Anti turunan dari $4\sin x$ dan $3x^5$ berturut-turut adalah $-4\cos x$ dan $\frac{1}{2}x^6$.

   Sehingga $F(x) = -4\cos x - \frac{1}{2}x^6 + C$

2. Misalkan diketahui $f(x) = x\sqrt{x}$, dan $F(1) = 2$, akan dicari F(x).

   Anti turunan dari $x^{3/2}$ adalah $\frac{2}{5}x^{5/2}$. Sehingga $F(x) = \frac{2}{5}x^{5/2} + C$. Dari $F(1) = 2$ diperoleh $C = \frac{8}{5}$. Jadi $F(x) = \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{8}{5}$

Proses menemukan anti turunan (anti diferensial) dari fungsi f pada interval I dinamakan integral tak tentu dari fungsi f pada interval I, dan ditulis dengan lambang

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Teorema 7.2. (Rumus-rumus Integral Tak Tentu)

1. Linearitas

   a. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$

   b. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

   c. $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$

2. Bila $y = x^n$, n bilangan rasional dan $n \neq -1$, maka

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

3. Rumus Integral dengan Penggantian (aturan substitusi)

   Jika g(x) adalah fungsi yang diferensiabel pada suatu selang I, maka dengan memisalkan $g(x) = u$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

   Aturan substitusi digunakan untuk menyelesaikan integral yang berkaitan dengan aturan rantai.

4. Rumus fungsi trigonometri

   a. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

   b. $\int \cos x dx = \sin x + C$

   c. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

   d. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

   e. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

   f. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

Contoh

1. $\int \frac{1+4x}{\sqrt{1+x+2x^2}}dx$

   Misalkan $1+x+2x^2 = u \rightarrow (1+4x)dx = du$

   Sehingga $\int \frac{1+4x}{\sqrt{1+x+2x^2}}dx = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{1+x+x^2} + C$

2. $\int x^3 \cos(x^4+2)dx$

   Misalkan $u = x^4 + 2 \rightarrow du = 4x^3dx$.

   Sehingga $\int x^3 \cos(x^4+2)dx = \frac{1}{4}\int \cos u du = \frac{1}{4}\sin u + C = \frac{1}{4}\sin(x^4+2) + C$

3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}}$

   Misalkan $u = 1-4x^2 \rightarrow du = -8xdx$

   Sehingga $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}} = -\frac{1}{8}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{16}\sqrt{u} + C = \frac{1}{16}\sqrt{1-4x^2} + C$

4. $\int \sqrt{1+x^2}\, x^5dx$

   Penyelesaian contoh nomor 3 tidak sesederhana nomor 1 dan 2, karena x^5 bukan merupakan turunan dari $1+x^2$.

   Langkah pertama, tulis integral mula-mula menjadi

   $\int \sqrt{1+x^2}\, x^4xdx = \int \sqrt{1+x^2}\left(x^2\right)^2 xdx$

   Kemudian misalkan $1+x^2 = u \rightarrow 2xdx = du$

   Sehingga

   $$\int \sqrt{1+x^2}\left(x^2\right)^2 xdx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}(u-1)^2du = \frac{1}{2}\int\left(u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2}\right)du$$
   $$= \frac{1}{7}u^{7/2} - \frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

5. $\int \sin^5 x dx$

$$\int \sin^5 x dx = \int \sin^4 x \sin x dx = \int \sin^4 x \sin x dx = -\int \left(1-\cos^2 x\right)^2 d(\cos x)$$
$$= -\int \left(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x\right) d(\cos x) = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

6. $\int \sqrt{\cot x} \csc^2 x dx$

Misalkan $u = \cot x \rightarrow du = -\csc^2 x dx$

Sehingga $\int \sqrt{\cot x} \csc^2 x dx = -\int \sqrt{u} du = -\frac{2}{3} u^{3/2} + C$

Latihan Soal

1. $\int \sqrt[3]{x^3 + 1}\, x^5 dx$
2. $\int \frac{x dx}{\sqrt[4]{x+2}}$
3. $\int \cos^4 x \sin x dx$
4. $\int \sin^3 (1+2x) dx$
5. $\int \sec^4 x dx$
6. $\int \cos x \sqrt{1 - \sin x} dx$
7. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + 2\sin x}}$
8. $\int \cos 2x \sin 4x dx$
9. $\int \frac{\sin \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}$
10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$
11. Tunjukkan bahwa $F(x) = x|x|$ adalah anti turunan dari $f(x) = 2|x|$, kemudian tentukan $\int F(x) dx$.
12. Sebuah titik materi bergerak dari keadaan diam dengan percepatan $a(t) = 12t - 3t^2$ m/detik. Tentukan kecepatannya pada setiap saat t. Tentukan pula persamaan gerak materi itu.

7.2 TEKNIK PENGINTEGRALAN

a. Integral Parsial (Integral Sebagian)

Jika aturan substitusi digunakan untuk menyelesaikan integral yang berkaitan dengan aturan rantai, maka untuk menyelesaikan integral yang berkaitan dengan aturan hasil kali turunan digunakan rumus integral parsial.

Misalkan fungsi f dan g keduanya diferensiabel pada I, maka:

$$\frac{d}{dx}(f.g) = f'g + g'f \Leftrightarrow \int (f'g + g'f)dx = f.g$$

$$\Leftrightarrow \int f.g'dx = f.g - \int g.f'dx$$

Bila $f(x) = u$ dan $g(x) = v$, maka dihasilkan

$\int u.dv = u.v - \int v.du$ yang disebut dengan rumus integral parsial.

Contoh

1. Tentukan $\int x \sin x dx$

   Kita dapat memisalkan $u = x \rightarrow du = dx$ dan $dv = \sin x dx \rightarrow v = -\cos x$

   Sehingga $\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx$

   $= -x \cos x + \sin x + C$

2. Tentukan $\int e^x \sin x dx$

   Misalkan $u = e^x \rightarrow du = e^x dx$ dan $dv = \sin x dx \rightarrow v = -\cos x$

   Sehingga $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x$

   Dari hasil terakhir ini masih terdapat bentuk integral yang harus diselesaikan lagi dengan integral parsial, yaitu $\int e^x \cos x$.

   Misalkan $u = e^x \rightarrow du = e^x dx$ dan $dv = \cos x dx \rightarrow v = \sin x$

   Sehingga

   $$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx + C$$

   $$\int e^x \sin x dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C$$

3. Tentukan $\int xe^{2x}dx$

Misalkan $u = x \rightarrow du = dx$ dan $dv = e^{2x}dx \rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$

Sehingga $\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

Latihan

Tentukan hasil integral di bawah ini.

1. $\int x \sin 4x dx$
2. $\int x^2 \cos 3x dx$
3. $\int \cos(\ln x) dx$
4. $\int \cos x \ln(\sin x) dx$
5. $\int e^{2\theta} \sin 3\theta d\theta$
6. $\int e^{s} \sin(t - s) ds$
7. $\int x^3 e^{x^2} dx$
8. $\int (\ln x / x^2) dx$
9. $\int \theta \sec^2 \theta d\theta$
10. $\int x^2 \sin ax dx$

b. Integral Fungsi Trigonometri

Pada subbab ini akan digunakan kesamaan trigonometri untuk mengintegralkan kombinasi fungsi trigonometri.

❖ **Strategi untuk mengitung** $\int \sin^m x \cos^n x dx$

a. Jika pangkat dari kosinus adalah bilangan ganjil (n=2k+1), simpan satu faktor kosinus dan gunakan $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ untuk mengganti faktor kosinus yang tersisa.

$$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx = \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x dx$$
$$= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k x \cos x dx$$

Kemudian substitusikan $u = \sin x$

b. Jika pangkat dari sinus adalah ganjil (m=2k+1), simpan satu faktor sinus, dan gunakan $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ untuk mengganti faktor sinus yang tersisa.

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = \int \sin^{2k} x \cos^n x \sin x dx$$
$$= \int (1-\cos^2 x)^k x \cos^n x \sin x dx$$

Kemudian substitusikan $u = \cos x$

(Jika pangkat dari sin dan cos keduanya ganjil, maka salah satu dari a atau b dapat digunakan)

c. Jika pangkat dari sinus maupun kosinus adalah genap, gunakan kesamaan sudut paruh

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \text{ atau } \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \text{ atau } \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

❖ **Strategi untuk menghitung** $\int \tan^m x \sec^n x dx$

a. Jika pangkat dari sec adalah bilangan genap (n=2k), simpan satu faktor $\sec^2 x$, dan nyatakan faktor sisanya dalam $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$$\int \tan^m x \sec^{2k} x dx = \int \tan^m x \sec^2 x \sec^{2(k-1)} dx$$
$$= \int \tan^m x \sec^2 x (1+\tan^2 x)^{k-1} dx$$

Kemudian substitusi $u = \tan x$

b. Jika pangkat dari tan adalah ganjil (m=2k+1), simpan satu faktor dari $\sec x \tan x$ dan gunakan $\tan^2 x = 1 - \sec^2 x$ untuk menyatakan faktor yang tersisa dalam $\tan x$

$$\int \tan^{2k+1} x \sec^n x dx = \int \tan^{2k} x \sec^{n-1} x \tan x \sec x dx$$
$$= \int (1-\sec^2 x)^k \sec^{n-1} x \tan x \sec x dx$$

Kemudian substitusi $u = \sec x$

❖ Untuk menghitung integral $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$ gunakan kesamaan berikut

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}(\sin(A-B) + \sin(A+B)), \quad \sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \sin(A+B)),$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) + \cos(A+B)).$$

Contoh

1. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)d(\sin x) =$$
$$= \int (\sin^2 x - \sin^4 x)d(\sin x) = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

2. $\int \tan^6 x \sec^4 x dx$

$$\int \tan^6 x \sec^4 x dx = \int \tan^6 x \sec^2 x \sec^2 x dx = \int \tan^6 x(1+\tan^2 x)d(\tan x)$$
$$= \int (\tan^6 x + \tan^8 x)d(\tan x)$$
$$= \frac{1}{7}\tan^7 x + \frac{1}{9}\tan^9 x + C$$

3. $\int \tan^5 x \sec^7 x dx$

$$\int \tan^5 x \sec^7 x dx = \int \tan^4 x \sec^6 x \tan x \sec x dx = \int (\tan^2 x)^2 \sec^6 x d(\sec x)$$
$$= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^6 x d(\sec x) = \int (\sec^6 x - 2\sec^8 x + \sec^{10} x)d(\sec x)$$
$$= \frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{2}{9}\sec^9 x + \frac{1}{11}\sec^{11} x + C$$

4. $\int \sin 4x \cos 5x dx$

$$\int \sin 4x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int (\sin(-x) + \cos 9x)dx = -\frac{1}{2}\int \sin x dx + \frac{1}{2}\int \cos 9x dx$$
$$= \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{18}\sin 9x + C$$

Untuk kasus lain, pedomannya tidaklah sejelas ini. Misalnya

5. $\int \tan x dx$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$$

Pada bab 5 telah dibahas, bila $y = \ln x \rightarrow \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$, sehingga $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$

Demikian juga $-\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$

6. $\int \sec x dx$

$$\int \sec x dx = \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

Misalkan $\sec x + \tan x = u \rightarrow du = (\sec x \tan x + \sec^2 x)dx$

Sehingga $\int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$

$$= \int \frac{d(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + C$$

7. $\int \csc x dx$

Analog dengan nomor 6 dengan menggunakan substitusi $u = \csc x + \cot x$, dihasilkan $\int \csc x dx == -\ln|\csc x + \cot x| + C$

Latihan

1. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$
2. $\int \cos^5 x \sin^4 x dx$
3. $\int \sin^3 x \sqrt{\cos x} dx$
4. $\int \cos^2 x \tan^3 x dx$
5. $\int \tan^3 x \sec x dx$
6. $\int \tan^5 x dx$
7. $\int \sin 5x \sin 2x dx$
8. $\int \cos 7x \cos 5x dx$
9. $\int \cot^3 x \csc^4 x dx$
10. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x} dx$
11. $\int \frac{1 - \tan^2 x}{\sec^2 x} dx$
12. $\int \frac{1 - \sin x}{\cos x} dx$

c. Integral Substitusi Trigonometri

Untuk menyelesaikan integral yang memuat bentuk akar kuadrat diperlukan substitusi trigonometri agar bentuk akarnya hilang. Setelah peubahnya diganti dengan fungsi trigonometri yang sesuai, maka bentuknya menjadi fungsi trigonometri yang dapat diselesaikan dengan rumus reduksi atau rumus yang sebelumnya sudah dipelajari.

Bentuk	Substitusi	Kesamaan
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin \theta, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$	$1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec\theta$ dengan $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ atau $\pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2 x - 1 = \tan^2 x$
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = a\tan\theta, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$	$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

Contoh

1. $\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx$

Sesuai dengan bentuknya, substitusikan $x = 3\sin\theta \to dx = 3\cos\theta$

Sehingga $\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx = \int \frac{3\sqrt{1 - \sin^2\theta}}{9\sin^2\theta} 3\cos\theta d\theta = \int \cot^2\theta d\theta$

$$= \int (\csc^2\theta - 1) d\theta$$
$$= -\int d(\cot\theta) - \int d\theta$$
$$= -\cot\theta - \theta + C$$

2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 4}}$

Substitusikan $x = 2\tan\theta \to dx = 2\sec^2\theta$

Sehingga $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{2\tan\theta 2\sec^2\theta d\theta}{2\sec\theta} = \int 2\tan\theta\sec\theta d\theta = 2\int \frac{\sin\theta d\theta}{\cos^2\theta}$

$$= -2\int \frac{d(\cos\theta)}{\cos^2\theta}$$
$$= 2\sec\theta + C$$

Soal ini dapat juga diselesaikan dengan cara sederhana yaitu

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt{x^2+4} + C$$

Dari dua cara di atas, perhatikan bahwa sebelum menjawab soal amati dulu dengan cermat soal itu, karena mungkin soal itu dapat diselesaikan dengan cara yang lebih sederhana.

3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

Sebelum disubstitusi, terlebih nyatakan $3-2x-x^2$ menjadi bentuk kuadrat

$$3+1-1-2x-x^2 = 4-(1+2x+x^2) = 4-(1+x)^2$$

Sehingga $\int \frac{xdx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{4-(1+x)^2}}$.

Kemudian substitusi $1+x = 2\sin\theta \rightarrow dx = 2\cos\theta$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{4-(1+x)^2}} = \int \frac{(2\sin\theta-1)2\cos\theta d\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}} = \int (2\sin\theta-1)d\theta = -2\cos\theta-\theta+C$$

$$= -\sqrt{4-(1+x)^2} - \sin^{-1}\left(\frac{1+x}{2}\right)$$

Latihan

1. $\int \sqrt{x^2-4x+5}dx$
2. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}dx$
3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$
4. $\int \sqrt{x^2-2x+5}dx$
5. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$
6. $\int x\sqrt{25+x^2}dx$
7. $\int \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}dx$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x-8}}$
9. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4x-x^2}}dx$
10. $\int \frac{x}{(x^2+4)^{½}}dx$

d. Integral Fungsi Rasional

Pada subbab ini, akan dibahas, bagaimana mengintegralkan fungsi rasional (hasil bagi polinomial) dengan menyatakannya terlebih dahulu sebagai jumlahan fungsi parsial.

Perhatikan $f(x)=\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3}$. Dengan menyamakan penyebut dapat ditulis $f(x)=\frac{x-5}{x^2-5x+6}$.

Sehingga $\int\frac{x-5}{x^2-5x+6}dx=\int\left(\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3}\right)dx=\int\frac{3}{x-2}dx-\int\frac{2}{x-3}dx$

$$=3\int\frac{d(x-2)}{x-2}-2\int\frac{d(x-3)}{x-3}$$

$$=3\ln|x-2|-2\ln|x-3|+C$$

Bagaimana kita dapat menggunakan integral fungsi rasional ini secara umum?

Ingat kembali bentuk umum fungsi rasional, yaitu

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)} \text{ dengan P dan Q keduanya polinomial}$$

Integral fungsi rasional dapat digunakan bila derajat P lebih kecil dari derajat Q. Bila derajat P lebih besar dari derajat Q, bagilah P dengan Q sampai diperoleh bentuk $f(x)=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$ dengan S dan R keduanya polinomial dan derajat R lebih kecil dari derajat Q. Langkah selanjutnya adalah membahas berbagai kemungkinan bentuk $\frac{R(x)}{Q(x)}$.

1. Bila Q(x) adalah hasil kali n faktor linear yang berbeda

   Berarti Q(x) dapat ditulis sebagai

   $$Q(x)=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)...(a_nx+b_n)$$

   Dalam hal ini teorema fraksi parsial menyatakan bahwa terdapat $A_1, A_2,..., A_n$ sehingga

   $$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+...+\frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

   Contoh

   Tentukan $\int\frac{x^3+x}{x^2-x-2}dx$

Karena derajat pembilang lebih besar dari penyebut maka dilakukan dulu

pembagian yang menghasilkan $\frac{x^3+x}{x^2-x-2} = x+1+\frac{4x+2}{x^2-x-2}$

Perhatikan bahwa penyebut dari suku ketiga ruas kanan mempunyai faktor linear

$(x-2)$ dan $(x+1)$, sehingga dapat ditulis $\frac{4x+2}{x^2-x-2} = \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{(x+1)}$

Untuk menentukan A_1 dan A_2, kalikan kedua ruas dengan $(x-2)(x+1)$

$$\frac{4x+2}{x^2-x-2} = \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{(x+1)} \quad .(x-2)(x+1)$$

$$4x+2 = A_1(x+1) + A_2(x-2)$$

$$4x+2 = (A_1+A_2)x + A_1 - 2A_2$$

Sehingga diperoleh persamaan $A_1 + A_2 = 4$ dan $A_1 - 2A_2 = 2$. Dengan eliminasi dihasilkan $A_2 = \frac{2}{3}$ dan $A_1 = \frac{10}{3}$.

Akhirnya $\int \frac{x^3+x}{x^2-x-2}dx = \int (x+1+\frac{10}{3(x-2)} + \frac{2}{3(x+1)})dx$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{10}{3}\ln|x-2| + \frac{2}{3}\ln|x+1|$$

2. Bila Q(x) adalah hasil kali n faktor linear, beberapa diantaranya berulang.

   Misalkan faktor linear a_1x+b_1 muncul sebanyak k kali, maka $\frac{A_1}{a_1x+b_1}$ dapat

   ditulis sebagai $\frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(a_1x+b_1)^k}$

Contoh

$$\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx$$

Pembagian pembilang dengan penyebut menghasilkan

$$\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1} = x+1+\frac{4x}{x^3-x^2-x+1}$$

Sementara x^3-x^2-x+1 dapat difaktorkan menjadi $(x-1)^2(x+1)$

Sehingga dapat ditulis $\dfrac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} = \dfrac{A_1}{(x-1)^2} + \dfrac{A_2}{x-1} + \dfrac{A_3}{(x+1)}$

$$\frac{\dfrac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} = \dfrac{A_1}{(x-1)^2} + \dfrac{A_2}{x-1} + \dfrac{A_3}{x+1}}{4x = A_1(x+1) + A_2(x-1)(x+1) + A_3(x-1)^2}(x-1)^2(x+1)$$

$$4x = (A_3 + A_2)x^2 + (A_1 - 2A_3)x + A_1 - A_2 + A_3$$

Penyamaan koefisien menghasilkan

$$A_3 + A_2 = 0; A_1 - 2A_2 = 4; A_1 - A_2 + A_3 = 0$$

Dengan eliminasi diperoleh $A_1 = 2; A_2 = 1; A_3 = -1$

Sehingga

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}dx = \int \left(x + 1 + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{2}{x-1} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

3. Bila Q(x) mengandung faktor kuadratik yang tak dapat diuraikan, tak ada yang berulang.

   Jika Q(x) mempunyai faktor $ax^2 + bx + c$ dengan $b^2 - 4ac < 0$, maka selain fraksi parsial seperti pada 1. dan 2., $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ juga mempunyai faktor berbentuk

   $\dfrac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$, dengan A dan B adalah konstanta yang akan dicari.

Contoh

Tentukan $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}dx$

Penyebut dapat ditulis $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$. Selebihnya tidak bisa difaktorkan lagi.

Sehingga dapat ditulis $\dfrac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \dfrac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx + C}{x^2 + 4}$

$$\frac{2x^2-x+4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4} \quad \times x(x^2+4)$$

$$2x^2-x+4=A(x^2+4)+(Bx+C)x$$

$$2x^2-x+4=(A+B)x^2+Cx+4A$$

Dengan menyamakan koefisien diperoleh $A=1, B=1, C=-1$.

Sehingga $\int\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2+4}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+4}-\frac{1}{x^2+4}\right)dx$

$$=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{x}{x^2+4}dx-\int\frac{dx}{x^2+4}$$

Perhatikan integral $\int\frac{dx}{x^2+4}$ yang dapat ditulis $\int\frac{dx}{x^2+4}=\int\frac{dx}{4\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)}$.

Dengan memisalkan $u=\frac{x}{2}\rightarrow du=\frac{dx}{2}$, sehingga $\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+1}=\frac{1}{2}\tan^{-1}u$. dan atau

Jadi $\int\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx=\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

4. Bila Q(x) mengandung faktor kuadratik yang tak bisa diuraikan dan berulang.

Jika Q(x) mempunyai faktor $(ax^2+bx+c)^n$ dengan $b^2-4ac<0$, maka selain fraksi parsial seperti pada 1. dan 2., $\frac{R(x)}{Q(x)}$ juga mempunyai faktor berbentuk

$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}+$, dengan A_i dan B_i i=1,2,...,n adalah konstanta yang akan dicari.

Contoh

Tentukan $\int\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}dx$

Perhatikan bahwa suku penyebut $(x^2+1)^2$ tidak bisa difakorkan, dan berulang sehingga

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+1)}+\frac{A_3x+B_3}{(x^2+1)^2} \quad x(x^2+1)^2$$

$$1-x+2x^2-x^3=A_1(x^2+1)^2+(A_2x+B_2)x(x^2+1)+(A_3x+B_3)x$$

$$1-x+2x^2-x^3=(A_1+A_2)x^4+B_2x^3+(2A_1+A_2+A_3)x^2+(B_2+B_3)x+A_1$$

Dengan menyamakan koefisien diperoleh $A_1=1, A_2=-1, A_3=1, B_1=-1, B_2=0$.

Sehingga

$$\int\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{-x-1}{(x^2+1)}+\frac{x}{(x^2+1)^2}\right)dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{(x^2+1)}-\frac{1}{(x^2+1)}+\frac{x}{(x^2+1)^2}\right)dx$$

$$=\ln|x|-\tfrac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|-\tan^{-1}x-\frac{1}{2(x^2+1)}+C$$

Bagaimana bila kita harus menyelesaikan integral $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ **?**

Integral seperti ini adalah integral fungsi rasional dalam bentuk trigonometri. Untuk menyelesaikannya, perhatikan langkah berikut.

Misalkan $t=\tan\frac{1}{2}x \to dt=\frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{2}(t^2+1)dx$.

Kemudian $\sin x=2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x=2\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{2t}{t^2+1}$ dan

$\cos x=2\cos^2\frac{1}{2}x-1=2\frac{1}{t^2+1}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Sehingga $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\int\frac{\frac{2}{(t^2+1)}}{1+\frac{2t}{(t^2+1)}+\frac{(1-t^2)}{(1+t^2)}}dt=\int\frac{2dt}{2t+2}=\int\frac{d(2t+2)}{2t+2}$

$$=\ln|2t+2|+C=\ln\left|2\tan\tfrac{1}{2}x+2\right|+C$$

Bagaimana bila $\int\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}dx$?

Misalkan $t = \tan x \rightarrow dt = \sec^2 x dx = (t^2 + 1)dx$. Langkah selanjutnya, analog (silakan dicoba).

Latihan

1. $\int \frac{x^2}{x+1} dx$
2. $\int \frac{x^2+1}{x^2 - x} dx$
3. $\int \frac{4y^2 - 7y - 12}{y^3 - y^2 - 6y} dy$
4. $\int \frac{x^3}{x^2+1} dx$
5. $\int \frac{x^3}{(x+1)^3} dx$
6. $\int \frac{y}{y+2} dy$
7. $\int \frac{dt}{3 - 5\sin t}$
8. $\int \frac{dk}{3\sin k - 4\cos k} dk$
9. $\int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x}$
10. $\int \frac{1}{2\sin x + \sin 2x} dx$

e. Substitusi yang Merasionalkan

Beberapa fungsi yang tidak rasional dapat diubah menjadi fungsi rasional dengan cara substitusi. Jika sebuah integran berbentuk $\sqrt[n]{f(x)}$, maka substitusi $u = \sqrt[n]{f(x)}$ akan lebih memudahkan penyelesaian

Contoh

Tentukan $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$

Misalkan $u = \sqrt{x+4} \rightarrow u^2 = x + 4 \rightarrow 2udu = dx$

Sehingga $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx = 2\int \frac{u^2 du}{u^2 - 4} = 2\int (1 + \frac{4}{u^2 - 4}) du = 2\int du + 8\int \frac{du}{u^2 - 4}$

Suku kedua dari integral terakhir diselesaikan dengan integral fungsi rasional bentuik pertama, dan dihasilkan $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx = 2\int du + 8\int \frac{du}{u^2 - 4} = 2u + 2(\ln|u-2| - \ln|u+2|) + C$

$$= 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C$$

Integral fungsi Siklometri, fungsi Transenden, fungsi Hiperbolik dan invers fungsi Hiperbolik diperoleh dari turunan fungsi-fungsi tersebut yang sudah dibahas pada pokok bahasan Turunan.

f. Strategi Pengintegralan

Menyelesaikan soal integral tidak semudah menyelesaikan soal diferensial. Bila rumus dasar (baku) integral telah dikuasai, tapi masih belum dapat juga menyelesaikan soal itu, dapat dicoba langkah-langkah berikut.

1. Sederhanakan integran bila mungkin

   Contoh

   - $\int \sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx$ akan lebih mudah diselesaikan bila ditulis $\int(\sqrt{x}+x)dx$
   - $\int(\sin x + \cos x)^2 dx = \int(\sin^2 x + 2\cos x \sin x + \cos^2 x)dx$

     $= \int(1 + 2\sin\cos x)dx = \int dx + 2\int \sin x d(\sin x)$

2. Cari substitusi yang jelas

   Contoh

   $\int x^2 \cos(x^3+4)dx$ lebih mudah diselesaikan bila ditulis

   $\frac{1}{3}\int \cos(x^3+4)d(x^3+4)$ yang diperoleh dengan substitusi $u = x^3 + 4$

3. Bedakan integran menurut bentuknya: fungsi trigonometri, fungsi rasional, integral parsial, ataukah bentuk radikal (bentuk yang diperoleh dari substitusi trigonometri dan substitusi yang merasionalkan). Kemudian lakukan tindakan (langkah-langkah) seperti yang dijelaskan pada penyelesaian masing-masing bentuk integral tersebut.

Latihan

1. $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$

2. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$

3. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} dx$

4. $\int \ln(1+x^2) dx$

5. $\int \frac{3x^2-2}{x^2-2x-8} dx$

6. $\int \frac{1+\cos x}{\sin x} dx$

7. $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^4}} dx$

8. $\int \sqrt{1+x-x^2} dx$

9. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{9-\cos^4 x}} dx$

10. $\int \theta \tan^2 \theta d\theta$

11. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x+1}} dx$

12. $\int \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$

TUJUAN INSTRUKSIONAL

Umum

Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester I), mahasiswa mempunyai pemahaman konseptual yang benar tentang topik-topik utama dalam Kalkulus (limit, kekontinuan, diferensial, integral) beserta teorema dan sifat-sifat serata teknik-teknik penting didalamnya.

Khusus

Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 25), mahasiswa akan dapat menjelaskan pengertian integral tentu, dan hubungannya dengan integral tak tentu dengan teorema dasar kalulus, serta menyelesaikan soal-soal integral tentu. Selain itu, juga mampu menggunakan integral tak tentu untuk menghitung luas daerah, menghitung volume benda putar, menghitung panjang busur suatu kurva, menghitung luas permukaan benda putar.

8. INTEGRAL TENTU DAN PENGGUNAANNYA

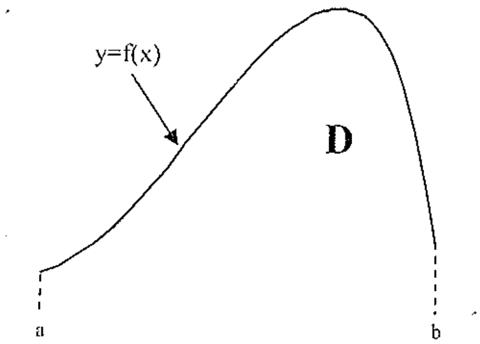
Konsep integral tentu diperkenalkan sebagai limit dari jumlah Riemann sebagai perumuman dari proses perhitungan luas daerah tertutup pada bidang datar. Perhitungan integral tentu dilakukan dengan memanfaatkan hasil perhitungan integral tak tentu. Kaitan integral tentu dan tak tentu dikenal dengan Teorema Dasar Kalkulus. Dalam geometri, integral tentu digunakan untuk menghitung luas daerah, volume benda, panjang busur, dan luas permukaan benda putar.

8.1 Integral Tentu

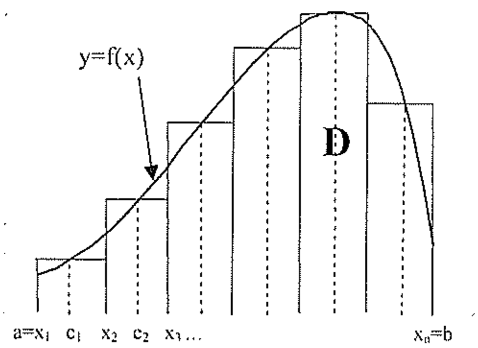
Perhatikan Gambar 1, yang memperlihatkan luas bidang datar D yang dibatasi grafik fungsi f, garis $x = a$, garis $x = b$ dan sumbu x dengan $f(x) \geq 0, x \in [a,b]$. Daerah D dapat dinyatakan dengan:

$$D = \{(x,y)/a \leq x \leq b; 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Untuk menentukan luas daerah D, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:



Gambar 1



Gambar 2

1. Interval tutup [a,b] dibagi dalam n subinterval yang sama panjang, dengan titik-titik partisinya adalah $\{x_1, x_2, x_3,...,x_n\}$, dengan $a = x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ (Gambar 2). Subinterval ke-i adalah $[x_{i-1},x_i]$, i=1,2,3,...,n, dengan panjang subinterval $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Panjang partisi dinotasikan dengan $\|P\|$, dan didefinisikan dengan $\|P\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$

2. Kemudian pilih $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,3,...,n$ dan bentuk persegi panjang dengan alas $= \Delta x_i$ dan tinggi $= f(c_i)$ (Gambar 2).

   Sehingga luas persegi panjang ke-i adalah $\Delta L_i = \Delta x_i . f(c_i)$.

   Bila ada n persegipanjang (n subinterval), maka luas daerah D dapat dihampiri oleh luas n persegi panjang tersebut yaitu $L \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(c_i)$

   ($\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(c_i)$ disebut sebagai jumlah Riemann dari f pada [a,b])

3. Luas yang sebenarnya (luas eksak) dari D dapat diperoleh bila $n \to \infty$ (banyaknya subinterval tak hingga). Hal ini sama saja bila $\|P\| \to 0$.

   Jadi $L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(c_i) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(c_i)$

   (Jika limit ini ada, fungsi f dikatakan terintegralkan Riemann pada interval [a,b] dan ditulis $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(c_i)$)

Definisi 7.2.

Integral tentu dari fungsi f pada interval [a,b] ditulis $\int_a^b f(x)dx$ didefinisikan dengan

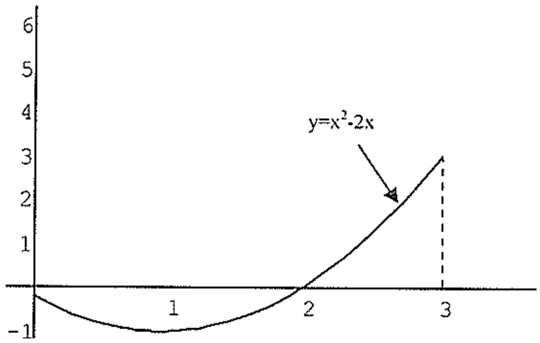
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(c_i), \text{ bila limit ini ada.}$$

Dalam penulisan ε dan δ: limit jumlah Riemann dari f pada [a,b] untuk $\|P\| \to 0$ adalah L, dan ditulis $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(c_i)$, jika

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \ni \|P\| < \delta \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(c_i) - L \right| < \varepsilon, \ \forall c_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Contoh

Akan dicari limit dari julah Riemann $\int_0^3 (x^2 - 2x)dx$



Interval [0,3] kita bagi menjadi n subinterval, sehingga panjang tiap subinterval adalah $\Delta x = \Delta x_i = \frac{3}{n}$, dan titik partisinya adalah $x_0=0$, $x_1=0+{}^3/_n$, $x_2=0+2.{}^3/_n$, ..., $x_n=3$. Bila diambil $c_i=x_i$, maka $f(c_i) = \left(\frac{3i}{n}\right)^2 - 2\left(\frac{3i}{n}\right) = \frac{9i^2}{n^2} - \frac{6i}{n}$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(c_i) \Leftrightarrow \int_0^3 (x^2 - 2x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{9i^2}{n^2} - \frac{6i}{n}\right)\frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{27i^2}{n^3} - \frac{18i}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{18}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{27}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{18}{n^2}n\right) = \frac{54}{6}$$

dengan $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Teorema 7.3

Sifat-sifat integral tentu

1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, dengan c konstanta sembarang.

2. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

3. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, dengan c konstanta sembarang

4. $\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

5. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dxdx = \int_a^c f(x)dx$

6. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

7. Jika $f(x) \geq 0$ untuk $x \in [a,b]$, maka $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

8. Jika $f(x) \geq g(x)$ untuk $x \in [a,b]$, maka $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

9. Jika $m \leq f(x) \leq M$ untuk $x \in [a,b]$, maka $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Contoh

1. $\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}}$

   Misalkan $u = \sqrt{2x+1} \rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$. Kemudian diubah juga batas atas dan batas bawahnya. Jika $x = 0 \rightarrow u = 1$ dan $x = 4 \rightarrow u = 3$

   Sehingga $\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{2}\int_0^4 (u^2 - 1)du = \frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{2}u\Big]_1^3 = \frac{20}{6}$

2. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{1+\cos x}}$

   Soal ini dapat ditulis $\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x \cos xdx}{\sqrt{1+\cos x}}$

Misalkan $1+\cos x = u \rightarrow -\sin x dx = du$. Jika $x = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = 1$, jika $x = 0 \rightarrow u = 2$.

Sehingga

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x \cos x dx}{\sqrt{1+\cos x}} = -2\int_2^1 \frac{(u-1)du}{\sqrt{u}} = 2\int_1^2 \frac{(u-1)du}{\sqrt{u}} = 2\int_1^2 \left(\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right)du = \frac{4}{3}(2-\sqrt{2})$$

Proses penghitungan integral tentu dengan menggunakan limit jumlah Riemann sangatlah rumit. Kita dapat memanfaatkan hasil perhitungan integral tak tentu untuk menghitung integral tentu. Rumus yang mengaitkan integral tentu dan tak tentu dikenal dengan Teorema Dasar Kalkulus.

Teorema 7.3 (Teorema Dasar Kalkulus)

1. Jika f fungsi kontinu pada [a,b] dan fungsi F adalah anti turunan f pada [a,b], maka

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

2. Jika f kontinu pada [a,b], maka fungsi $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ terdeferensialkan pada [a,b] dengan $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$

Bukti.

1. Kita partisi [a,b] dengan titik-titik partisi $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$. Karena $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$, maka untuk $x \in [x_{i-1}, x_i]$ yang panjangnya Δx_i, F juga kontinu dan diferensiabel. Sehingga menurut Teorema Nilai Rata-rata

$$\exists c_i \in [x_{i-1}, x_i] \ni f(c_i) = F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_{i-1} - x_i}$$

Dari hasil ini diperoleh $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i)(x_{i-1} - x_i) = f(c_i)\Delta x_i,\ \ i = 1,2,3,\ldots,n$

Untuk [a,b]

$$F(b) - F(a) = (F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \ldots + F(x_1) - F(x_0))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,\ \ i = 1,2,3,\ldots,n$$

Karena f kontinu pada [a,b], maka jumlah Riemann ini mempunyai limit bila $n \to \infty$, sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(F(x_i) - F(x_{i-1})\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \lim\limits_{n\to\infty} F(b) - F(a)$

Menurut definisi $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ □

2. Jika x dan $x+h$ berada dalam (a,b), maka

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt = \int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^{a} f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

untuk $h \neq 0$ $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt$

Misalkan $h > 0$. Karena f kontinu pada $[x, x+h]$, maka terdapat u dan v dalam $[x, x+h]$ sedemikian sehingga $f(u) = m$ dan $f(v) = M$, dengan m dan M berturut-turut adalah nilai minimum dan maksimum f pada $[x, x+h]$.

Dengan menggunakan sifat integral tentu

$$m < \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt < M \Leftrightarrow f(u) < \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt < f(v) \Leftrightarrow f(u) < \frac{F(x+h) - F(x)}{h} < f(v)$$

Untuk $h \to 0$, maka $u \to x$ dan $v \to x$, karena u dan v terletak antara x dan x+h.

Sehingga $\lim\limits_{h\to 0} f(u) = \lim\limits_{u\to x} f(u) = f(x)$ dan $\lim\limits_{h\to 0} f(v) = \lim\limits_{v\to x} f(v) = f(x)$

Menurut teorema apit

$$f(x) < \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} < f(x) \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x)$$

$$\Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$ □

Dengan notasi Leibniz dapat ditulis

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Contoh

1. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^4} \sec t\,dt$

Langkah pertama misalkan $x^4 = u \rightarrow u' = 4x^3$

Sehingga $\frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec t dt = \frac{d}{du}\left(\int_1^{u} \sec t dt\right)\frac{du}{dx} = \sec u . 4x^3 = (\sec x^4) 4x^3$

2. $\int_0^2 f(x)\, dx$ dengan $f(x) = \begin{cases} x^4; 0 \le x < 1 \\ x^5; 1 \le x \le 2 \end{cases}$

$$\int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^2 f(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 x^4\, dx + \int_1^2 x^5\, dx = \frac{1}{5}x^5\Big]_0^1 + \frac{1}{6}x^6\Big]_1^2 = 10{,}7$$

Latihan

1. $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$
2. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx$
3. $\int_{-\pi/2}^{\pi} x \cos x dx$
4. $\int_{-2}^{2} |x|\sqrt{x^2+5} dx$
5. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$
6. $\int_0^9 \sqrt{1+\sqrt{x}} dx$
7. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}$
8. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos x}} dx$
9. $\int_{1/2}^{1} \cos \pi\sqrt{2x-1} dx$
10. $\int_{-3}^{1} \sqrt{2|x|-1} dx$
11. $\int_{1/2}^{1} \frac{1}{x^4} \sin\frac{\pi}{4} dx$
12. $\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1+x\sqrt{x}} dx$
13. Tunjukkan $\int_0^1 f(1-x)dx = \int_0^1 f(x)dx$

14. Jika f kontinu pada interval $[1,\infty]$ dan $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{x\,dt}{1+\sqrt{3+t^2}}$, tentukan $f'(x)$ dan $f'(1)$

15. Jika a dan b adalah konstanta positif, tunjukkan

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a dx$$

16. Jika f kontinu dan $\int_0^4 f(x)\,dx = 10$, tentukan $\int_0^2 f(2x)\,dx$

17. Jika f kontinu dan $\int_0^9 f(x)\,dx = 4$, tentukan $\int_0^3 xf(x^2)\,dx$

8.2 Penerapan Integral Tentu

a. Menentukan Luas Daerah

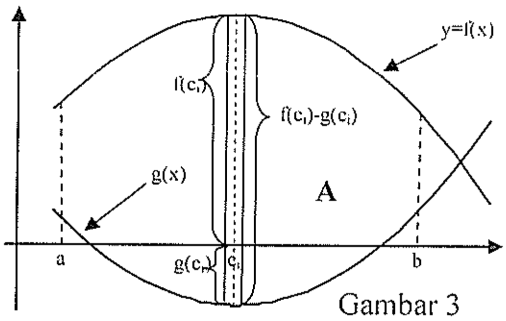
Seperti yang telah dibahas pada sub pokok bahasan 8.1, penggunaan integral tentu untuk menentukan luas daerah di bidang dinyatakan dalam definisi berikut.

Definisi 7.3

Misalkan D daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi kontinu [a,b] dengan $f(x) \geq 0$ pada [a,b], garis $x = a$, garis $x = b$ dan sumbu x. Daerah D dapat ditulis $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b; 0 \leq y \leq f(x)\}$, dengan f kontinu pada [a,b]. Luas D didefinisikan dengan

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Dengan prosedur yang sama dalam menentukan luas daerah di bawah kurva, luas daerah antara dua kurva (Gambar 3) juga merupakan limit jumlahan untuk $n \to \infty$ dari luas persegi panjang yang menghampiri, yaitu $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)]\Delta x_i$



Gambar 3

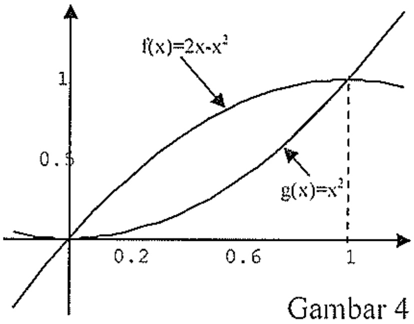
Luas A, daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, $y = g(x)$, garis $x = a$, $x = b$ dengan f dan g kontinu dan $f(x) \geq g(x)\ \forall x$ dalam [a,b] adalah

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Contoh

1. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = x^2$ dan $y = 2x - x^2$.

   Penyelesaian. Soal ini tidak menyebutkan batas bawah dan batas atas. Batas bawah dan batas atas ditentukan oleh titik potong kedua parabola itu, yaitu (0,0) dan (1,1).



Gambar 4

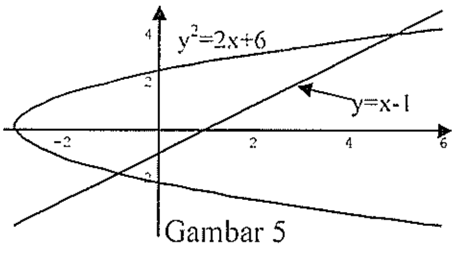
Perhatikan Gambar 4, $f(x) \geq g(x) \forall x$ pada $[0,1]$, sehingga

$$L = \int_0^1 \left((2x - x^2) - x^2\right)dx$$

$$= \int_0^1 (2x - 2x^2)dx = \frac{1}{3}$$

2. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = x - 1$ dan parabola $y^2 = 2x + 6$.

   Penyelesaian.



Gambar 5

Perhatikan Gambar 5, pengintegralan terhadap y jauh lebih mudah dibandingkan pengintegralan terhadap x. Titik potong kedua kurva menghasilkan titik potong (-1,-2) dan (5,4).

Sehingga luas daerah yang dicari adalah $L = \int_{-2}^{4} \left((y + 1) - (y^2 - 6)/2\right)dy = 18$

Latihan

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh

1. $y = x^2 + 3;\ y = x;\ x = \pm 1$
2. $y = x^2 - 4x;\ y = 2x$
3. $y = x + 5;\ y^2 = x;\ y = -1;\ y = 2$
4. $y = \sin x;\ y = x;\ x = \pi/2;\ x = \pi$
5. $y = x + 1;\ y = 9 - x^2;\ x = -1;\ x = 2$
6. $y = 4x^2;\ y = x^2 + 3$

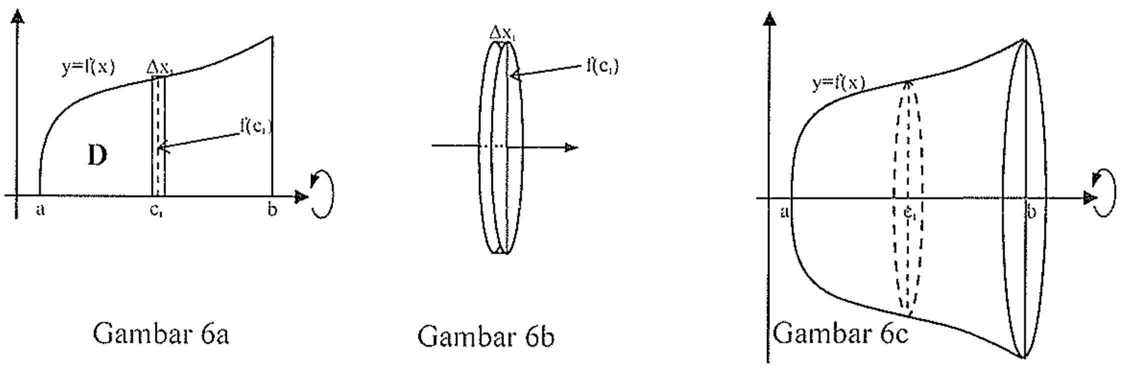
b. Menentukan Volume Daerah

Jika daerah $D = \{(x,y) : a \le x \le b, 0 \le y \le f(x), f \text{ kontinu}\}$ (Gambar 6a) diputar terhadap sumbu x, akan terjadi bangun ruang seperti pada Gambar 6c. Akan dicari volume hasil perputaran itu.

Analog dengan luas bidang di bawah kurva y=f(x), interval [a,b] dibagi dalam n subinterval, dengan lebar Δx_i. Bila diambil titik $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, dan persegi panjang dengan luas $L_i = f(c_i)\Delta x_i$ diputar mengelilingi sumbu x, maka dihasilkan suatu cakram dengan jari-jari $f(c_i)$ dengan luas $\pi f^2(c_i)$. Sehingga volume cakram itu adalah $V_i = \pi f^2(c_i)\Delta x_i$.

Hampiran untuk volume hasil perputaran y=f(x) terhadap sumbu x adalah $V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i$.

Volume eksak diperoleh jika banyaknya persegi panjang yang diputar adalah tak hingga ($n \to \infty$), yaitu $V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi f(c_i)\Delta x_i$



Gambar 6a Gambar 6b Gambar 6c

Definisi 7.4 (Metode Cakram)

Volume benda putar yang terjadi bila daerah $D = \{(x, y) : a \le x \le b, 0 \le y \le f(x),$ f kontinu$\}$ diputar terhadap sumbu x adalah

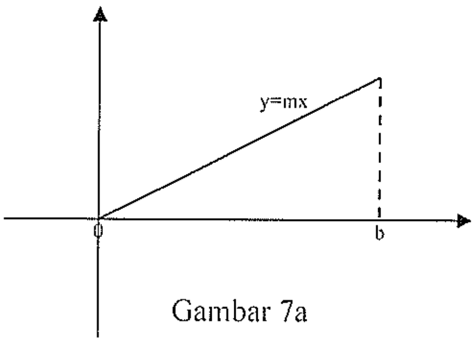
$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(c_i)\Delta x_i = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Contoh

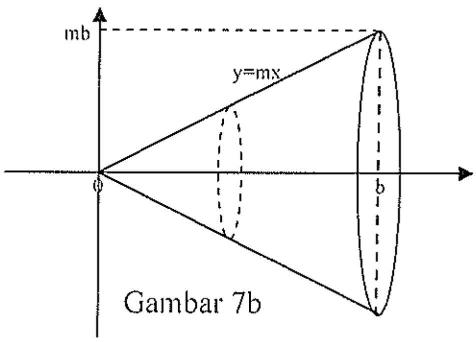
1. Tunjukkan bahwa volume kerucut adalah $\frac{1}{3}\pi r^2 t$ ($\frac{1}{3}$ luas lingkaran alas tinggi)

   Penyelesaian.

   Kerucut merupakan hasil perputaran garis $y = mx$ dari x=0 sampai x=b terhadap sumbu x (Gambar 7a dan 7b)



Gambar 7a



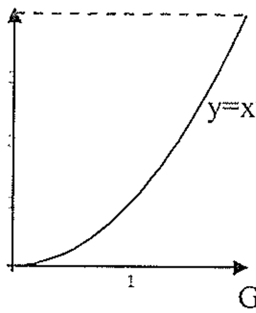
Gambar 7b

   Sehingga $V = \pi \int_0^b (mx)^2 dx = \pi \frac{m^2}{3} x^3 \Big]_0^b = \frac{\pi}{3} m^2 b^3 = \frac{\pi}{3}\left(m^2 b^2\right)b$, dengan jari-jari alas mb dan tinggi b.

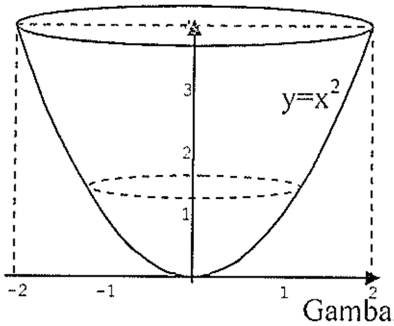
2. Tentukan volume yang terjadi bila $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 2, x^2 \le y \le 4\}$ diputar terhadap sumbu y

   Volume yang terjadi adalah paraboloida dengan jari-jari $x = y^2$. Sehingga

$$V = \pi \int_0^4 y dy = \tfrac{1}{2}\pi y^2 \Big]_0^4 = 8\pi$$



Gambar 8a



Gambar 8b

Bila D adalah daerah antara dua kurva f(x) dan g(x) dengan f dan g kontinu, yaitu $D = \{(x, y) : a \le x \le b, g(x) \le y \le f(x), \text{f dan g kontinu}\}$, maka volume benda yang terjadi bila D diputar terhadap sumbu x dirumuskan dengan

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi\left(f^2(c_i) - g^2(c_i)\right) \Delta x_i = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right) dx$$

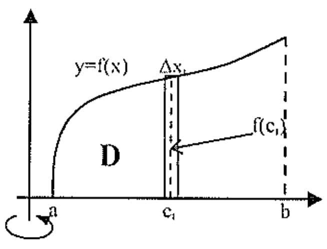
Contoh

Tentukan volume yang terjadi bila $D = \{(x, y) : 1 \le x \le 4, \frac{1}{2}x + 1 \le y \le \sqrt{x} + 2\}$, diputar terhadap sumbu x.

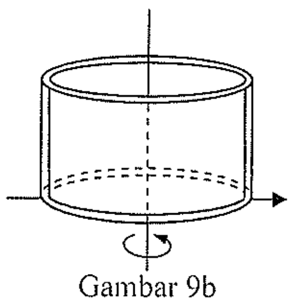
Penyelesaian.

$$V = \int_1^4 \left(\left(\sqrt{x} + 2\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}x + 1\right)^2 \right) dx = 28\pi$$

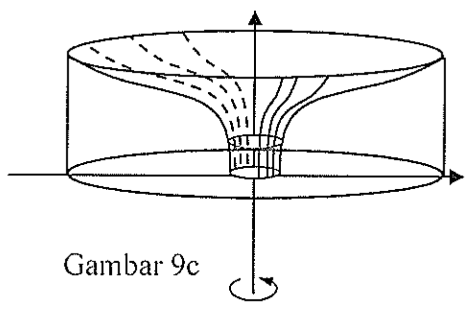
Bagaimana bila $D = \{(x, y) : a \le x \le b, 0 \le y \le f(x), \text{f kontinu}\}$ diputar terhadap sumbu y? Perhatikan Gambar 9a, 9b, 9c berikut ini



Gambar 9a



Gambar 9b



Gambar 9c

Definisi 7.5 (Metode Kulit Tabung)

Volume benda putar yang terjadi bila $D = \{(x, y) : a \le x \le b, 0 \le y \le f(x), \text{f kontinu}\}$ diputar terhadap sumbu y adalah

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi c_i f(c_i)\, \Delta x_i = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

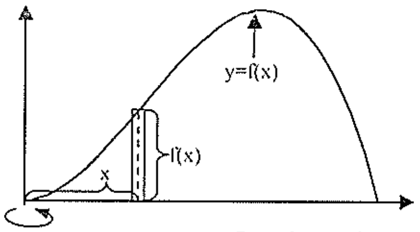
Contoh

Tentukan volume benda yang terjadi bila daerah yang dibatasi oleh $y = 2x^2 - x^3$ dan $y = 0$ diputar terhadap sumbu y.

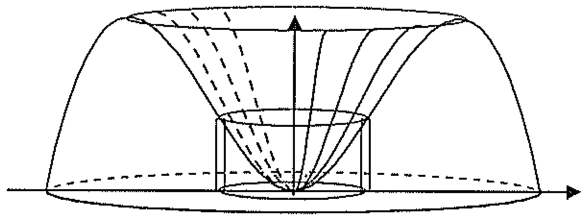
Penyelesaian.

Perhatikan Gambar 10a dan 10b, dengan jari-jari=x dan tinggi=f(x), volume benda putar yang terjadi adalah

$$V = 2\pi \int_0^2 x f(x) dx = 2\pi \int_0^2 x(2x^2 - x^3) dx = 2\pi \left[\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^2 = \tfrac{16}{5}\pi$$



Gambar 10a


Gambar 10b

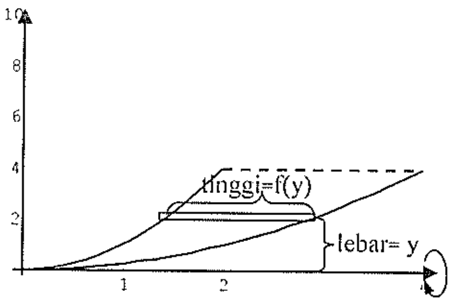
Bila D adalah daerah antara dua kurva f(x) dan g(x) dengan f dan g kontinu, yaitu $D = \{(x, y) : a \le x \le b, g(x) \le y \le f(x), \text{f dan g kontinu}\}$, maka volume benda yang terjadi bila D diputar terhadap sumbu y dirumuskan dengan

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi c_i \big(f(c_i) - g(c_i)\big) \Delta x_i = 2\pi \int_a^b x\big(f(x) - g(x)\big)\, dx$$

Contoh

Bila D daerah di kuadran pertama yang dibatasi oleh parabola $y = x^2$, parabola $y = \frac{1}{4}x^2$ dan garis $y = 4$. Tentukan volume yang terjadi jika D diputar terhadap sumbu x.

Penyelesaian.



Gambar 11

Perhatikan dengan seksama daerah D yang diperlihatkan pada Gambar 11. Perhitungan volume yang terjadi bila D diputar terhadap sumbu x, lebih mudah dikerjakan dengan menggunakan metode kulit tabung. Dengan lebar y, dan tinggi= $2\sqrt{y}-\sqrt{y}=\sqrt{y}$, diperoleh

$$V=2\pi\int_0^4 yf(y)dy=2\pi\int_0^4 y\sqrt{y}dy=\tfrac{4}{5}\pi y^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4=\frac{128\pi}{5}$$

Latihan

Tentukan luas dari daerah berikut ini

1. $D=\{(x,y)/0\le x\le 2,\ x^2\le y\le \frac{3}{2}x+1\}$
2. $D=\{(x,y)/0\le y\le 4,\ \frac{2}{3}(y-1)\le x\le \sqrt{y}\}$
3. $D=\{(x,y)/0\le x\le 4,\ \frac{1}{8}y^2\le x\le 2\sqrt{y}\}$
4. Daerah yang dibatasi oleh parabola $x=4y-y^2$, garis y=x dan sumbu y.
5. Daerah yang dibatasi oleh parabola $x=4y-y^2$, garis y=x dan sumbu y.
6. Daerah yang dibatasi oleh parabola $y=x^2$, sumbu y, dan $y=4x-x^2$.

c. Menentukan Panjang Busur Suatu Kurva

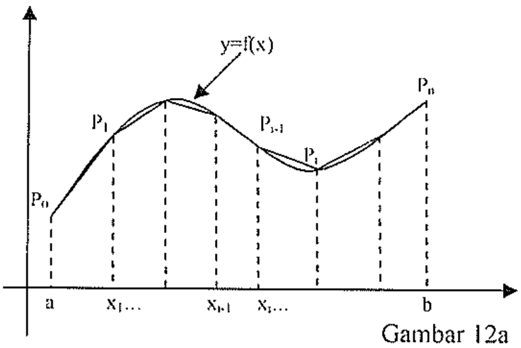
Analog dengan prosedur untuk menghitung luas dan volume benda, prosedur untuk mendefinisikan panjang busur juga dilakukan dengan membagi kurva menjadi bagian yang lebih kesil, kemudian mencari hampiran panjang dari bagian-bagian kecil tersebut dan menjumlahkannya. Ukuran eksak dari panjang busur diperoleh bila bagian-bagian yang kecil tersebut adalah tak hingga $(n\to\infty)$ (Gambar 12a dan 12b)

Misalkan $P_i=(x_i,y_i)$, maka jarak antara P_{i-1} dan P_i adalah

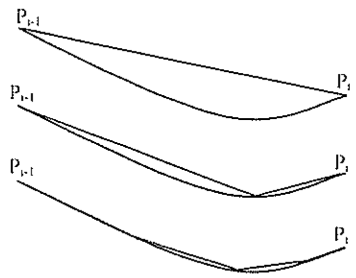
$$|P_{i-1}P_i|=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}$$

Dengan menggunakan teorema nilai rata-rata untuk turunan pada interval $[x_{i-1},x_i]$, terdapat bilangan x_i^* sedemikian sehingga

$$f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(x_i^*)(x_i-x_{i-1})\Leftrightarrow \Delta y_i=f'(x_i^*)\Delta x_i$$



Gambar 12a



Gambar 12b

Bila persamaan terakhir disubstitusi dalam $|P_iP_{i-1}|$ dihasilkan

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(x_i^*)\Delta x)^2}$$
$$= \Delta x_i \sqrt{1 + \left(f'(x_i^*)\right)^2}$$

Panjang eksak busur P_0P_n dirumuskan dengan

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sqrt{1 + f^2(x_i^*)} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Definisi 7.6

Bila f' kontinu pada [a,b], maka panjang busur kurva $y = f(x)$, $a \le x \le b$ adalah

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Contoh

1. Tentukan panjang busur dari parabola $y^2 = x$ dari (0,0) ke (1,1).

   Penyelesaian

   $$y^2 = x \to 2y dy = dx \to \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}.$$

   Sehingga $s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4y^2}}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}\,dx$

   Gunakan substitusi trigonometri $\tan\theta = 2\sqrt{x}$, kemudian integralkan parsial, diperoleh

$$s=\int_0^1 \frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}dx=\frac{1}{4}\left(\sec\theta\tan\theta+\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}(2\sqrt{5}+\sin^{-1}(2))$$

Perhatikan bahwa perhitungan panjang busur dapat juga dilakukan dengan pengintegralan terhadap y, yaitu $s=\int_a^b\sqrt{1+(f'(y))^2}dy=\int_0^1\sqrt{1+4y^2}dy$ (silakan dicoba untuk dibandingkan hasil akhirnya dengan pengintegralan terhadap x).

2. Hitung panjang busur fungsi parameter $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$, $0\le t\le 2\pi$

   Panjang busur untuk fungsi parameter dapat dicari dengan cara sebagai berikut.

$$s=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy\,\frac{1}{dt}}{dx\,\frac{1}{dt}}\right)^2}dx$$

$$=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}dx=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$$

   $x'(t)=1-\cos t$, $y'(t)=\sin t$ sehingga

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos 2.(\tfrac{1}{2}t)}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2(1-2\sin^2\tfrac{1}{2}t)}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\tfrac{1}{2}t}dt=2\int_0^{2\pi}\sin\tfrac{1}{2}t\,dt=-4\cos\tfrac{1}{2}t\Big|_0^{2\pi}=8$$

Latihan

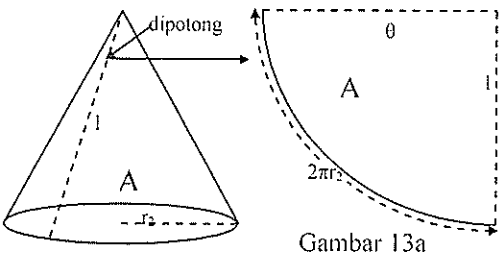
Hitung panjang kurva dari fungsi berikut

1. $y=\frac{2}{3}(x^2-1)^{3/2}$, $1\le x\le 3$
2. $y=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{\ln x}{4}$, $2\le x\le 4$
3. $y=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{1}{8x^2}$, $1\le x\le 3$
4. $x=\dfrac{\sqrt{y}(y-3)}{3}$, $0\le x\le 9$
5. Busur kurva $(y+1)^2=4x^3$ dari (0,-1) k3 (1,-3)
6. Busur kurva $9x^2=4y^3$ dari (0,0) ke $(2\sqrt{3},3)$

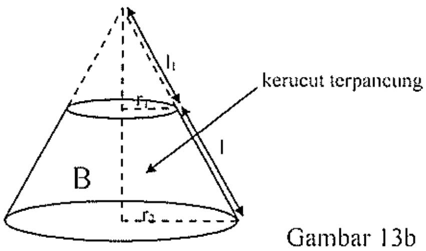
d. Menentukan Luas Permukaan Benda Putar

Suatu permukaan benda putar terbentuk ketika sebuah kurva diputar mengelilingi sebuah sumbu tertentu. Akan didefinisikan luas benda putar sehingga sesuai dengan intuisi kita. Akan digunakan teknik panjang busur untuk menghampiri kurva dengan suatu poligon. Bila poligon ini diputar mengelilingi sumbu tertentu, akan terbentuk permukaan sederhana yang luasnya menghampiri luas eksak permukaan yang diinginkan. Dengan mengambil limitnya akan dihasilkan luas eksak dari permukaan tersebut. Luas permukaan hampiran, terdiri dari sejumlah pita yang terbentuk dengan memutar ruas garis mengelilingi suatu sumbu putar. Hasil perputaran pita ini adalah suatu kerucut lingkaran (kerucut terpancung/frustum kerucut) (Gambar 13c).

Sebelum membahas lebih lanjut, perhatikan Gambar ?.



Gambar 13a



Gambar 13b

Perpotongan kerucut sepanjang garis l menghasilkan juring lingkaran (Gambar 13a).

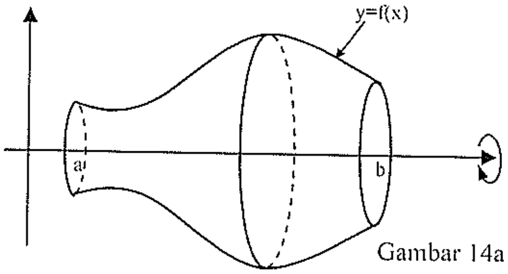
Juring lingkaran dengan jari-jari l dan sudut pusat θ adalah $A = \frac{1}{2} l^2 \theta$. Jika $\theta = \frac{2\pi r_2}{l}$,

maka $A = \frac{1}{2} l^2 \theta = \pi r l$. Luas selimut kerucut terpancung B (Gambar 13b) diperoleh dengan mengurangi juring lingkaran A dengan selimut kerucut berjari-jari r_1, yaitu $B = \pi r_2 (l + l_1) - \pi r_1 l_1 = \pi r_2 l + \pi (r_2 - r_1) l_1$. Dari segitiga sebangun pada Gambar 13c diperoleh hubungan $\frac{l_1}{r_1} = \frac{l + l_1}{r_2} \Leftrightarrow l_1 (r_2 - r_1) = r_1 l$.

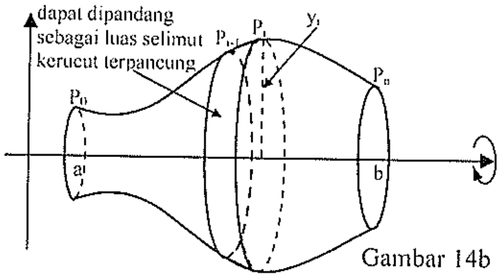
Sehingga $B = \pi l (r_2 + r_1) = 2\pi r l$ dengan $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$.

Sekarang, akan diterapkan perhitungan yang sudah diperoleh, yaitu luas selimut kerucut terpancung B.

Perhatikan Gambar 14, permukaan yang diperoleh dengan memutar terhadap sumbu x kurva $y = f(x)$ $a \le x \le b$.



Gambar 14a



Gambar 14b

Interval [a,b] dipartisi dengan titik-titik ujung partisi $x_0, x_1, ..., x_n$ dan lebar partisi Δx, seperti yang dilakukan dalam menentukan panjang busur. Jika $y_i = f(x_i)$, maka titik $P(x_i, y_i)$ terletak pada kurva. Bagian luas permukaan antara x_{i-1} dan x_i dihampiri dengan ruas garis $P_{i-1}P_i$ dan memutarnya terhadap sumbu x. Hasil perputaran $P_{i-1}P$ adalah sebuah kerucut terpancung dengan panjang sisi miring $l = |P_{i-1}P_i|$ dan rata-rata jari-jari $r = \frac{y_{i-1} + y_i}{2}$. Sehingga menurut rumus kerucut terpancung yang sudah diperoleh, dihasilkan $2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} |P_{i-1}P_i|$. Bila Δx kecil, $y_i = f(x_i) \approx f(x_i^*)$ dan $y_{i-1} = f(x_{i-1}) \approx f(x_{i-1}^*)$. Kemudian seperti pada penentuan panjang busur (teorema nilai rata-rata untuk turunan) $|P_{i-1}P_i| = \Delta x_i \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2}$.

Sehingga $2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} |P_{i-1}P_i| = 2\pi f(x_i^*) \Delta x_i \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2}$

Analog dengan penerapan integral sebelumnya, luas permukaan eksak diperoleh sebagai $\lim n \to \infty$ dari jumlah Riemann $\sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^*) \Delta x_i \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2}$.

Jadi luas permukaan yang diperoleh akibat perputaran $y = f(x)$, $a \le x \le b$ terhadap sumbu x didefinisikan dengan $S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

Menurut teorema dasar kalkulus, fungsi panjang busur dapat dinyatakan dengan $s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt \Leftrightarrow ds(x) = d\left(\int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt \right) = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. Sehingga rumus luas permukaan benda putar dapat ditulis $S = 2\pi \int_a^b y ds$

Bila $y = f(x)$, $a \le x \le b$ diputar terhadap sumbu y, maka rumus untuk luas permukaan hasil perputaran adalah $S = 2\pi \int_a^b x ds$.

Rumus luas permukaan ini mudah diingat dengan membayangkan $2\pi y$ atau $2\pi x$ sebagai keliling lingkaran yang ditempuh oleh titik (x,y) pada kurva y=f(x) ketika diputar terhadap sumbu x atau sumbu y.

Contoh

1. Tentukan luas permukaan yang dihasilkan dari perputaran busur kurva $y = \sqrt{4 - x^2}$, $-1 \le x \le 1$ terhadap sumbu x.

   Penyelesaian

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}},\ ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \Rightarrow ds = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4-x^2}}dx = \sqrt{\frac{4}{4-x^2}}dx$$

   $$S = 2\pi \int_{-1}^{1} y ds = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2}\sqrt{\frac{4}{4 - x^2}}dx = 2\pi \int_{-1}^{1} 2dx = 8\pi$$

2. Busur parabola $y = x^2$ dari (1,1) sampai (2,4) diputar mengelilingi sumbu y. Tentukan luas permukaan yang terjadi.

   Penyelesaian

   $$x = \sqrt{y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}},\ ds = \sqrt{1 + (f'(y))^2}dy = \sqrt{1 + \frac{1}{4y}}dy$$

   $$S = 2\pi \int_1^4 x ds = 2\pi \int_1^4 \sqrt{y}\sqrt{\frac{4y+1}{4y}}dy = \pi \int_1^4 \sqrt{4y+1}dy = \frac{\pi}{4}\int_1^4 \sqrt{4y+1}d(4y+1)$$

   $$= \frac{\pi}{6}(4y+1)^{3/2}\Big|_1^4$$

   $$= \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$$

Latihan

Tentukan luas permukaan yang diperoleh dari perputaran fungsi berikut terhadap sumbu yang ditentukan

1. $y = x^3,\ 0 \le x \le 2$, sumbu x
2. $y^2 = 4x + 4,\ 0 \le x \le 8$, sumbu x
3. $x = 1 + 2y^2,\ 1 \le y \le 2$, sumbu x
4. $y = \sqrt[3]{x},\ 1 \le y \le 2$, sumbu y
5. $y = 1 - x^2,\ 0 \le x \le 1$, sumbu y
6. $x = \sqrt{2y - y^2},\ 0 \le y \le 1$, sumbu y

DAFTAR PUSTAKA

[1] Edwin J Purcell, Dale Varberg, Calculus With Analitic Geometry, Prentice-Hall. Inc, New York, 1987

[2] Frank Ayres, Calculus, Mac. Graw Hills, 1964

[3] Louis Leithold, Calculus With Analytic Geometri, Harper and Row Publisher, New York

[4] K.A. Stroud, Engeenering Mathematics, MacMillan Press Ltd, 1987.

[5] James Stewart, Calculus, Fourth Edition, Brooks/Cole Publishing Company, 1999

SATUAN ACARA PENGAJARAN
(SAP)

Mata Kuliah : Kalkulus I
Kode Mata Kuliah : MAT 103
Bobot SKS : 4 SKS
Pertemuan ke : 1
Waktu Pertemuan : 100 menit

A. Tujuan Instruksional

1. Umum : Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester), mahasiswa akan mempunyai pemahaman konseptual yang benar tentang topik-topik utama dalam kalkulus (limit, diferensial, integral) beserta teorema-teorema dan sifat-sifat penting yang ada di dalamnya.

2. Khusus : Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 3), mahasiswa akan dapat menjelaskan definisi himpunan dan operasi-operasi antar himpunan

B. Pokok Bahasan : Himpunan

C. Sub Pokok Bahasan
1. Definisi himpunan
2. Relasi dan operasi antar himpunan

D. Kegiatan Pembelajaran

TAHAP	KEGIATAN PENGAJAR	KEGIATAN MAHASISWA	MEDIA/ALAT	METODE
Pendahuluan	1. Membahas tugas pertemuan ke 1 dan 2	Memperhatikan dan membahas	OHP, Transparan, Papan Tulis kapur, kapur, whiteboard dan spidol	Ceramah
Penyajian	2. Menjelaskan defunisi himpunan a. Memberikan contoh suatu himpunan. b. Menjelaskan cara penyajian suatu himpunan 3. Menjelaskan relasi dan operasi antara himpunan a. Menggambarkan hubungsn antara	 Mengingat dan berdiskusi Memperhatikan Memperhatikan	OHP, Transparan, Papan Tulis kapur, kapur, whiteboard dan spidol	Ceramah

	himpunan dengan diagram Venn b. Menjelaskan relasi yang mungkin antara dua himpunan	Memperhatikan		
Penutup	4. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya. 5. Memberikan gambaran umum untuk perkuliahan yang akan datang	Bertanya Memperhatikan	OHP, Transparan, Papan Tulis kapur, kapur, whiteboard dan spidol	Ceramah

E. Evaluasi : Memberi tugas kepada mahasiswa untuk dikerjakan di rumah

F. Daftar Pustaka

1. Edwin J Purcell, Dale Varberg, Calculus With Analitic Geometry, Prentice-Hall. Inc, New York, 1987
2. Frank Ayres, Calculus, Mac. Graw Hills, 1964
3. Louis Leithold, Calculus With Analytic Geometri, Harper and Row Publisher, New York
4. K.A. Stroud, Engeenering Mathematics, MacMillan Press Ltd, 1987.
5. James Stewart, Calculus, Fourth Edition, Brooks/Cole Publishing Company, 1999

SATUAN ACARA PENGAJARAN
(SAP)

Mata Kuliah : Kalkulus I
Kode Mata Kuliah : MAT 103
Bobot SKS : 4 SKS
Pertemuan ke : 2,3,4
Waktu Pertemuan : 3 x 100 menit

A. Tujuan Instruksional

1. Umum : Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester), mahasiswa akan mempunyai pemahaman konseptual yang benar tentang topik-topik utama dalam kalkulus (limit, diferensial, integral) beserta teorema-teorema dan sifat-sifat penting yang ada di dalamnya.

2. Khusus : Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 4), mahasiswa akan dapat menjelaskan sistem bilangan real dan aksioma-aksioma di dalamnya, serta menyelesaikan soal-soal pertidaksamaan biasa maupun pertidaksamaan dalam harga mutlak..

B. Pokok Bahasan : Sistem Bilangan Real

C. Sub Pokok Bahasan

1. Aksioma Lapangan.
2. Komponen Bilangan real
3. Aksioma Urutan.
4. Aksioma Kelengkapan
5. Bentuk Umum Pertidaksamaan.
6. Harga Mutlak
7. Pertidaksamaan dalam Harga Mutlak.

D. Kegiatan Pembelajaran

TAHAP	KEGIATAN PENGAJAR	KEGIATAN MAHASISWA	MEDIA/ALAT	METODE
Pendahuluan	1. Menjelaskan materi yang akan dibahas dalam pertemuan ke 1 dan 2 2. Memberikan penjelasan tentang kegunanaan materi ini untuk mempelajari materi selanjutnya	Memperhatikan Memperhatikan	OHP, Transparan, Papan Tulis kapur, kapur, whiteboard dan spidol	Ceramah
Penyajian	3. Menjelaskan aksioma lapangan			Ceramah

	4. Mengingatkan kembali tentang definisi penjumlahan dan perkalian di R 5. Menjelaskan aksioma-aksioma yang berlaku pada operasi penjumlahan dan perkalian di R. 1. Menjelaskan komponen-komponen bilangan real a. Menyebutkan komponen bilangan real dengan diagram b. Menyebutkan definisi dari tiap-tiap komponen bilangan real. 2. Menjelaskan aksioma urutan a. Mengingatkan kembali konsep lebih besar dan lebih kecil. b. Memberikan contoh bilangan yang merupakan bentuk akar dan tidak. 3. Menjelaskan aksioma kelengkapan a. Mengingatkan kembali tentang garis bilangan, dan titik-titik pada garis bilangan b. Memberi contoh bentuk-bentuk interval pada bilangan real 9. Menjelaskan bentuk umum pertidaksamaan a. Mengingatkan kembali pengertian pembuat nol b. Memberi contoh-contoh soal pertidaksamaan c. Menjelaskan prosedur baku untuk menyelesaikan pertidaksamaan 10. Menjelaskan definisi harga mutlak dan menyelesaikan pertidaksamaan dalam harga mutlak a. Menjelaskan definisi harga mutlak b. Memberikan contoh dan menyelesaikan pertidaksamaan harga mutlak	Mengingat dan memperhatikan Memperhatikan Memperhatikan Memperhatikan Mengingat dan memperhatikan Menjawab pertanyaan dan diskusi Mengingat dan menjawab pertanyaan Memperhatikan Mengingat dan menjawab pertanyaan Memperhatikan Memperhatikan dan mengerjakan latihan soal. Memperhatikan Memperhatikan dan mengerjakan latihan soal	OHP, Transparan, Papan Tulis kapur, kapur, whiteboard dan spidol	
Penutup	8. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya.	Bertanya	OHP, Transparan, Papan Tulis kapur, kapur, whiteboard dan	Ceramah

	9. Memberikan gambaran umum untuk perkuliahan yang akan datang	Memperhatikan	spidol	

E. Evaluasi : Memberi tugas kepada mahasiswa untuk dikerjakan di rumah

F. Daftar Pustaka

1. Edwin J Purcell, Dale Varberg, Calculus With Analitic Geometry, Prentice-Hall. Inc, New York, 1987
2. Frank Ayres, Calculus, Mac. Graw Hills, 1964
3. Louis Leithold, Calculus With Analytic Geometri, Harper and Row Publisher, New York
4. K.A. Stroud, Engeenering Mathematics, MacMillan Press Ltd, 1987.
5. James Stewart, Calculus, Fourth Edition, Brooks/Cole Publishing Company, 1999

SATUAN ACARA PENGAJARAN
(SAP)

Mata Kuliah : Kalkulus I
Kode Mata Kuliah : MAT 103
Bobot SKS : 4 SKS
Pertemuan ke : 5, 6, 7
Waktu Pertemuan : 3 x 100 menit

A. Tujuan Instruksional

2. Umum : Setelah Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester), mahasiswa akan mempunyai pemahaman konseptual yang benar tentang topik-topik utama dalam kalkulus (limit, diferensial, integral) beserta teorema-teorema dan sifat-sifat penting yang ada di dalamnya.

3. Khusus : Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 7) mahasiswa akan dapat menjelaskan perbedaan sistem koordinat kartesius dan koordinat kutub, serta menjelaskan definisi fungsi dan mengetahui jenis-jenis fungsi.

B. Pokok Bahasan : Sistem Koordinat dan Fungsi

C. Sub Pokok Bahasan

1. Sistem Koordinat Kartesius
2. Sistem Koordinat Kutub
3. Definisi Fungsi
4. Jenis-jenis Fungsi
5. Operasi pada Fungsi
6. Fungsi Invers.

D. Kegiatan Pembelajaran

TAHAP	KEGIATAN PENGAJAR	KEGIATAN MAHASISWA	MEDIA/ALAT	METODE
Pendahuluan	1. Membahas tugas pertemuan ke 4	Memperhatikan dan membahas	OHP, Transparan, Papan Tulis kapur, kapur, whiteboard dan spidol	Ceramah
Penyajian	2. Menjelaskan pengertian sistem koordinat kartesius dan koordinat kutub a. Memberi contoh secara teori dan grafis b. Menjelaskan perhitungan-perhitu-ngan	Memperhatikan	OHP, Transparan, Papan Tulis kapur, kapur, whiteboard dan spidol	Ceramah

	dalam sistem koordinat kartesius dan kutub 3. Menjelaskan definisi dan pengertian fungsi secara matematis dan grafis a. Memberi contoh fungsi dalam kehidupan sehari-hari b. Memberi contoh fungsi secara matematis 4. Menjelaskan jenis-jenis fungsi a. Memberi contoh jenis-jenis fungsi beserta grafiknya b. Menjelaskan cara menggambar fungsi baru dari fungsi lama dan memberikan contoh 5. Menjelaskan komposisi fungsi dan sifat-sifatnya serta syarat untuk fungsi invers a. Memberikan contoh fungsi baru dari gabungan dua fungsi atau lebih b. Mengingatkan definisi fungsi satu-satu untuk menjelaskan fungsi invers dan memberikan contoh	Memperhatikan dan mengerjakan latihan Memperhatikan Memperhatikan Memperhatikan dan mengerjakan Memperhatikan dan mengerjakan Memperhatikan dan mengerjakan Memperhatikan dan mengerjakan		
Penutup	6. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya. 7. Memberikan gambaran umumperkuliahan yang akan datang	Bertanya Memperhatikan	OHP, Transparan, Papan Tulis kapur, kapur, whiteboard dan spidol	Ceramah

E. Evaluasi : Memberi tugas kepada mahasiswa untuk dikerjakan di rumah

F. Daftar Pustaka

1. Edwin J Purcell, Dale Varberg, Calculus With Analitic Geometry, Prentice-Hall. Inc, New York, 1987
2. Frank Ayres, Calculus, Mac. Graw Hills, 1964
3. Louis Leithold, Calculus With Analytic Geometri, Harper and Row Publisher, New York
4. K.A. Stroud, Engeenering Mathematics, MacMillan Press Ltd, 1987.
5. James Stewart, Calculus, Fourth Edition, Brooks/Cole Publishing Company, 1999

SATUAN ACARA PENGAJARAN
(SAP)

Mata Kuliah	: Kalkulus I
Kode Mata Kuliah	: MAT 103
Bobot SKS	: 4 SKS
Pertemuan ke	: 7, 8, 9, 10
Waktu Pertemuan	: 4 x 100 menit

A. Tujuan Instruksional

7. Umum : Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester), mahasiswa akan mempunyai pemahaman konseptual yang benar tentang topik-topik utama dalam kalkulus (limit, diferensial, integral) beserta teorema-teorema dan sifat-sifat penting yang ada di dalamnya.

8. Khusus : Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 10), mahasiswa akan dapat menjelaskan konsep yang tepat tentang limit dan kekontinuan suatu fungsi, serta hubungan limit dan kekontinuan.

B. Pokok Bahasan : Limit dan Kekontinuan Fungsi

C. Sub Pokok Bahasan

1. Konsep Limit Fungsi
2. Definisi Limit Fungsi
3. Limit Fungsi Trigonometri
4. Limit Tak Hingga.
5. Kekontinuan Fungsi

D. Kegiatan Pembelajaran

TAHAP	KEGIATAN PENGAJAR	KEGIATAN MAHASISWA	MEDIA/ALAT	METODE
Pendahuluan	1. Membahas tugas pertemuan ke 5, 6	Memperhatikan dan membahas	OHP, Transparan, Papan Tulis kapur, kapur, whiteboard dan spidol	Ceramah
Penyajian	2. Menjelaskan definisi limit secara intuitif, secara matematis dan secara geometris a. Memberi contoh fungsi dengan domain bilangan real. b. Memberi contoh fungsi yang mempunyai	 Memperhatikan Memperhatikan	OHP, Transparan, Papan Tulis kapur, kapur, whiteboard dan spidol	Ceramah

	titik pembuat nol pada penyebut c. Menentukan hasil limit dari kegiatan a dan b 3. Menjelaskan limit kiri dan limit kanan suatu fungsi di satu titik a. Membuat contoh fungsi yang memiliki kurva mulus disetiap titiknya b. Membuat contoh fungsi yang memiliki lompatan di satu titik c. Menjelaskan perbedaan antara a dan b 4. Menjelaskan sifat limit fungsi a. Membuat contoh fungsi dan mencari limitnya dengan menggunakan sifat limit 5. Menjelaskan limit fungsi trigonometri a. Mengingatkan kembali fungsi trigonometri b. Memberikan contoh soal limit fungsi trigonometri 6. Menjelaskan bentuk-bentuk limit a. Memberikan contoh soal tentang limit di suatu titik, limit di tak hingga. 7. Menjelaskan definisi kekontinuan fungsi a. Memberikan contoh fungsi yang kontinu di satu titik dengan menggunakan konsep limit. 8. Menjelaskan definisi kekontinuan fungsi pada suatu interval. h. Memberikan contoh soal	Memperhatikan dan mengerjakan Memperhatikan Memperhatikan Memperhatikan Memperhatikan Memperhatikan Memperhatikan dan mengerjakan Memperhatikan Memperhatikan dan mengerjakan Memperhatikan dan mengerjakan		
Penutup	1. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya. 2. Memberikan gambaran umumperkuliahan yang akan datang	Bertanya Memperhatikan	OHP, Transparan, Papan Tulis kapur, kapur, whiteboard dan spidol	Ceramah

E. Evaluasi : Memberi tugas kepada mahasiswa untuk dikerjakan di rumah

F. Daftar Pustaka

1. Edwin J Purcell, Dale Varberg, Calculus With Analitic Geometry, Prentice-Hall. Inc, New York, 1987

2. Frank Ayres, Calculus, Mac. Graw Hills, 1964
3. Louis Leithold, Calculus With Analytic Geometri, Harper and Row Publisher, New York
4. K.A. Stroud, Engeenering Mathematics, MacMillan Press Ltd, 1987.
5. James Stewart, Calculus, Fourth Edition, Brooks/Cole Publishing Company, 1999

SATUAN ACARA PENGAJARAN
(SAP)

Mata Kuliah : Kalkulus I
Kode Mata Kuliah : MAT 103
Bobot SKS : 4 SKS
Pertemuan ke : 15, 16, 17
Waktu Pertemuan : 3 x 100 menit

A. Tujuan Instruksional

1. Umum : Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester), mahasiswa akan mempunyai pemahaman konseptual yang benar tentang topik-topik utama dalam kalkulus (limit, diferensial, integral) beserta teorema-teorema dan sifat-sifat penting yang ada di dalamnya.

2. Khusus : Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 17), mahasiswa akan dapat menjelaskan penggunanaan turunan untuk menentukan nilai maksimum/minimum, kecekungan fungsi, teorema Rolle, penggambaran fungsi, bentuk tak tentu limit fungsi, masalah laju yang berkaitan, dan masalah ekstrem

B. Pokok Bahasan : Penerapan Turunan

C. Sub Pokok Bahasan

1. Nilai Max/Min
2. Fungsi Naik/Turun
3. Kecekungan Fungsi
4. Penggambaran Grafik Fungsi
5. Gerak Rektilinear
6. Masalah Laju yang Berkaitan
7. Bentuk Tak Tentu dan Aturan L'Hospital
8. Penerapan Masalah Ekstrim
9. Penerapan di Bidang Ekonomi

D. Kegiatan Pembelajaran

TAHAP	KEGIATAN PENGAJAR	KEGIATAN MAHASISWA	MEDIA/ALAT	METODE
Pendahuluan	1. Membahas tugas pertemuan 12, 13, 14	Memperhatikan dan membahas	OHP, Transparan, Papan Tulis kapur, kapur, whiteboard dan spidol	Ceramah

Penyajian	1. Menjelaskan penerapan turunan untuk mencari nilai maksimum dan minimum dari suatu fungsi dan contoh-contohnya dalam kehidupan nyata. a. Menjelaskan definisi titik kritis dan jenisnya b. Membuat contoh suatu fungsi dan mencari nilai max/min nya 2. Menjelaskan penerapan turunan untuk menggambar grafik a. Membuat contoh fungsi polinomial berderajat 3 atau lebih dan fungsi rasional dan menggambarkannya dengan konsep turunan 3. Menjelaskan masalah laju yang berkaitan dengan penerapan turunan. a. Memberikan contoh soal. 4. Menjelaskan penerapan turunan untuk menghitung limit (aturan de L'hopital) a. Mengingatkan kembali cara menghitung limit suatu fungsi dan membandingkan hasilnya dengan aturan L'Hopital 5. Menjelaskan penggunaan turunan untuk menyelesaikan masalah nyata, dan penggunaannya di bidang ekonomi	Memperhatikan Memperhatikan dan mengerjakan Memperhatikan dan mengerjakan Memperhatikan dan mengerjakan Memperhatikan dan mengerjakan Memperhatikan dan mengerjakan latihan soal	OHP, Transparan, Papan Tulis kapur, kapur, whiteboard dan spidol	Ceramah
Penutup	6. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya. 7. Memberikan gambaran umumperkuliahan yang akan datang	Bertanya Memperhatikan	OHP, Transparan, Papan Tulis kapur, kapur, whiteboard dan spidol	Ceramah

E. Evaluasi : Memberi tugas kepada mahasiswa untuk dikerjakan di rumah

F. Daftar Pustaka

Edwin J Purcell, Dale Varberg, Calculus With Analitic Geometry, Prentice-Hall. Inc, New York, 1987
Frank Ayres, Calculus, Mac. Graw Hills, 1964
Louis Leithold, Calculus With Analytic Geometri, Harper and Row Publisher, New York
K.A. Stroud, Engeenering Mathematics, MacMillan Press Ltd, 1987.
James Stewart, Calculus, Fourth Edition, Brooks/Cole Publishing Company, 1999

SATUAN ACARA PENGAJARAN
(SAP)

Mata Kuliah : Kalkulus I
Kode Mata Kuliah : MAT 103
Bobot SKS : 4 SKS
Pertemuan ke : 18, 19, 20, 21
Waktu Pertemuan : 4 x 100 menit

A. Tujuan Instruksional

1. Umum : Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester), mahasiswa akan mempunyai pemahaman konseptual yang benar tentang topik-topik utama dalam kalkulus (limit, diferensial, integral) beserta teorema-teorema dan sifat-sifat penting yang ada di dalamnya.

2. Khusus : Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 21), mahasiswa akan dapat memahami pengertian integral tak tentu sebagai suatu anti turunan, menyelesaikan soal integral fungsi aljabar, fungsi trigonometri, fungsi eksponensial, fungsi logaritma dengan teknik integral parsial, integral sunstitusi trigonometri, integral fungsi rasional, serta menguasai startegi pengintegralam.

B. Pokok Bahasan : Integral Tak Tentu dan Teknik Pengintegralan

C. Sub Pokok Bahasan

1. Integral Tak Tentu
2. Rumus Integral Tak Tentu
3. Integral Parsial
4. Integral Fungsi Trigonometri
5. Integral Substitusi Trigonometri
6. Integral Fungsi Rasional
7. Substitusi yang Merasionalkan.

D. Kegiatan Pembelajaran

TAHAP	KEGIATAN PENGAJAR	KEGIATAN MAHASISWA	MEDIA/ALAT	METODE
Pendahuluan	1. Membahas tugas pertemuan ke 15, 16	Memperhatikan dan membahas	OHP, Transparan, Papan Tulis kapur, kapur, whiteboard dan spidol	Ceramah
Penyajian	2. Menjelaskan definisi integral tak tentu. a. Mengingatkan kembali rumus turunan dan menggunakannya untuk menjelaskan	Memperhatikan	OHP, Transparan, Papan Tulis kapur, kapur, whiteboard dan spidol	Ceramah

	integral tak tentu b. Menjelaskan rumus-rumus integral tak tentu dengan mengerjakan contoh-contoh soal	Memperhatikan dan mengerjakan		
	3. Menjelaskan definisi integral tentu a. Mengingatkan kembali konsep limit tak hingga (jumlahan parsial tak hingga) b. Menjelaskan definisi terintegral dengan menggunakan a.	Memperhatikan Memperhatikan		
	4. Menjelaskan teknik pengintegralan parsial a. Memberikan contoh soal integral yang sederhana b. Memberikan contoh soal integral yang diselesaikan dengan metode parsial dan membandingkannya dengan a.	Memperhatikan Memperhatikan dan mengerjakan		
	5. Mengingatkan kembali fungsi trigonometri, kemudian memberikan contoh soal integral trigonometri dan membahasnya.	Memperhatikan dan mengerjakan		
	6. Menjelaskan teknik substitusi trigonometri dan menjelaskan perbedaannya dengan teknik integral parsial.	Memperhatikan dan mengerjakan		
	7. Menjelaskan pengintegralan fungsi rasional a. Mengingatkan kembali contoh-contoh fungsi rasional b. Menjelaskan langkah-langkah untuk membentuk fungsi rasional menjadi jumlahan fungsi yang lebih sederhana c. Menyelesaikan contoh soal integral fungsi rasional d. Menjelaskan startegi pengintegralan	Memperhatikan dan mengerjakan Memperhatikan Memperhatikan dan mengerjakan Memperhatikan dan mengerjakan		
	8. Memberikan contoh-contoh soal yang berbeda dan menyelesaikannya			
Penutup	9. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya. 10. Memberikan gambaran umum perkuliahan yang akan datang	Bertanya Memperhatikan	OHP, Transparan, Papan Tulis kapur, kapur, whiteboard dan spidol	Ceramah

E. Evaluasi : Memberi tugas kepada mahasiswa untuk dikerjakan di rumah

F. Daftar Pustaka

1. Edwin J Purcell, Dale Varberg, Calculus With Analitic Geometry, Prentice-Hall. Inc, New York, 1987
2. Frank Ayres, Calculus, Mac. Graw Hills, 1964
3. Louis Leithold, Calculus With Analytic Geometri, Harper and Row Publisher, New York
4. K.A. Stroud, Engeenering Mathematics, MacMillan Press Ltd, 1987.
5. James Stewart, Calculus, Fourth Edition, Brooks/Cole Publishing Company, 1999

SATUAN ACARA PENGAJARAN
(SAP)

Mata Kuliah : Kalkulus I
Kode Mata Kuliah : MAT 103
Bobot SKS : 4 SKS
Pertemuan ke : 22, 23, 24, 25
Waktu Pertemuan : 4 x 100 menit

A. Tujuan Instruksional

6. Umum : Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester), mahasiswa akan mempunyai pemahaman konseptual yang benar tentang topik-topik utama dalam kalkulus (limit, diferensial, integral) beserta teorema-teorema dan sifat-sifat penting yang ada di dalamnya.

7. Khusus : Setelah mengikuti kuliah ini (pada akhir pertemuan ke 25), mahasiswa akan dapat menjelaskan pengertian integral tentu, dan hubungannya dengan integral tak tentu dengan teorema dasar kalulus, serta menyelesaikan soal-soal integral tentu. Selain itu, juga mampu menggunakan integral tak tentu untuk menghitung luas daerah, menghitung volume benda putar, menghitung panjang busur suatu kurva, menghitung luas permukaan benda putar.

B. Pokok Bahasan : Penerapan Integral

C. Sub Pokok Bahasan

1. Integral Tentu
2. Teorema Dasar Kalkulus
3. Penggunaan Integral tentu untuk Menentukan Luas Daerah
4. Penggunaan Integral tentu untuk Menentukan Volume Daerah
5. Penggunaan Integral tentu untuk Menentukan Panjang Busur
6. Penggunaan Integral tentu untuk Menentukan Luas Volume Benda Putar.

D. Kegiatan Pembelajaran

TAHAP	KEGIATAN PENGAJAR	KEGIATAN MAHASISWA	MEDIA/ALAT	METODE
Pendahuluan	1. Membahas tugas pertemuan ke 18, 19, 20	Memperhatikan dan membahas	OHP, Transparan, Papan Tulis kapur, kapur, whiteboard dan spidol	Ceramah
Penyajian	2. Menentukan luas daerah di bawah kurva		OHP, Transparan, Papan Tulis	Ceramah

	a. Menggambarkan kurva dari suatu fungsi b. Menentukan interval tertutup dari kurva tersebut c. Mencari luas daerah di bawah kurva dalam intervel tertutup tersebut d. Analog dengan a-c, untuk luasan daerah antara dua kurva e. Memberikan contoh dan membahas. 3. Menentukan volume benda putar a. Menggambarkan kurva dari suatu fungsi b. Menjelaskan dan menggambarkan bentuk yang terjadi bila kurva tersebut diputar mengelilingi suatu sumbu tertentu. c. Kemudian dari bentuk yang terjadi tersebut dapat dicari volumenya dengan konsep integral yang sudah dikuasai. d. Memberikan contoh dan menyelesaikannya 4. Menentukan luas permukaan benda putar a. Menggambarkan kurva dari suatu fungsi b. Menjelaskan dan menggambarkan bentuk yang terjadi bila kurva tersebut diputar mengelilingi suatu sumbu tertentu. c. Kemudian dari bentuk yang terjadi tersebut dapat dicari luas permukaannya dengan konsep integral yang sudah dikuasai.. d. Memberikan contoh dan menyelesaikannya 5. Menentukan banjang busur a. Menjelaskan panjang tali busur yang merupakan partisi dari suatu kurva dengan konsep pitagoras b. Mencari panjang busur dengan definisi integral c. Memberikan contoh dan menyelesai-	Memperhatikan Memperhatikan Memperhatikan Memperhatikan Memperhatikan dan mengerjakan Memperhatikan Memperhatikan Memperhatikan Memperhatikan dan mengerjakan Memperhatikan Memperhatikan Memperhatikan Memperhatikan dan mengerjakan Memperhatikan Memperhatikan Memperhatikan dan	kapur, kapur, whiteboard dan spidol	

	kannya 6. Menjelaskan penggunaan integral untuk menyelesaikan soal dari bidang ilmu lain. a. Membuat contoh soal, misalnya dalam bidang fisika atau biologi atau ilmu lain kemudian diselesaikan dengan integral	mengerjakan Memperhatikan dan mengerjakan		
Penutup	7. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya. 8. Memberikan gambaran umum perkuliahan yang akan datang	Bertanya Memperhatikan	OHP, Transparan, Papan Tulis kapur, kapur, whiteboard dan spidol	Ceramah

E. Evaluasi : Memberi tugas kepada mahasiswa untuk dikerjakan di rumah

F. Daftar Pustaka

1. Edwin J Purcell, Dale Varberg, Calculus With Analitic Geometry, Prentice-Hall. Inc, New York, 1987
2. Frank Ayres, Calculus, Mac. Graw Hills, 1964
3. Louis Leithold, Calculus With Analytic Geometri, Harper and Row Publisher, New York
4. K.A. Stroud, Engeenering Mathematics, MacMillan Press Ltd, 1987.
5. James Stewart, Calculus, Fourth Edition, Brooks/Cole Publishing Company, 1999