PELABELAN TOTAL TITIK AJAIB GRAF HASIL KALI KARTESIUS DARI GRAF SIKEL

Maria Nita Kurniasari[1] dan Robertus Heri[2]
[1,2] Program Studi Matematika F.MIPA UNDIP Semarang
Jl. Prof.Sudarto, S.H, Tembalang-Semarang

Abstract. A vertex-magic total labeling of graph $G(V,E)$, with the vertices v and the edges e is the bijection from $V \cup E$ to the set of integers $\{1,2,\dots,v+e\}$, and for each vertex x in G satisfying $\lambda(x)+\sum\lambda(xy)=k$, y is the vertex that *adjacent* with x, then k named a magic constant in G. The sum of the label of x and the labels of all edges xy *incident* to the x is the same for all vertices of G and G named vertex-magic total graph. Vertex-magic total labeling of cartesian products of cycles, with the type $C_m \times C_n$, with $m,n \geq 3$ and n is odd are the labeling to the $C_m \times C_n$ and the concept used to label C_m is $(a,2)$-vertex antimagic total labeling and to label C_n it is used vertex magic total labeling of cycles, with the cycle is odd.

Keywords : vertex-magic total labeling, cycle, cartesian products.

1. PENDAHULUAN

Pelabelan graf merupakan suatu pemetaan satu-satu yang memetakkan himpunan dari elemen-elemen graf ke himpunan bilangan bulat positif, elemen-elemen graf itu sendiri meliputi himpunan titik, himpunan sisi, himpunan titik dan sisi. Pelabelan titik adalah pelabelan graf dimana domainnya merupakan himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan graf dimana domainnya merupakan himpunan sisi, sedangkan pelabelan total jika domainnya merupakan gabungan himpunan titik dan sisi. Terdapat beberapa jenis pelabelan pada graf, diantaranya adalah pelabelan *gracefull*, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Dalam pelabelan ajaib terdapat beberapa macam pelabelan, diantaranya adalah pelabelan total titik ajaib, pelabelan total sisi ajaib, pelabelan total titik ajaib super, dan pelabelan total sisi ajaib super, sedangkan pada pelabelan anti ajaib terdapat pelabelan total titik anti ajaib dan pelabelan total sisi anti ajaib.

Aplikasi pelabelan graf dapat dijumpai dalam berbagai bidang diantaranya dekomposisi graf, kriptografi, kristalografi *x-ray*, teori koding (*coding theory*), radar, disain sirkuit dan disain jaringan komunikasi.

Pada artikel ini materi yang akan dikaji adalah mengenai pelabelan total titik ajaib pada graf hasil kali kartesius dari graf sikel, dimana graf yang akan dikaji disini adalah graf dengan sifat tidak terbatas, sederhana dan tidak berarah. Kelas graf yang akan dibahas merupakan kelas graf reguler, yaitu graf yang derajat setiap titiknya adalah sama.

2. PEMBAHASAN

a. Pelabelan total titik ajaib

Diberikan graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E. Jika λ merupakan pemetaan bijektif dari $E \cup V$ ke bilangan bulat positif $\{1, 2, \ldots, e+v\}$, maka λ merupakan pelabelan total titik ajaib dengan bobot pada titik $x \in V$ didefinisikan sebagai :

$$w_t(x) = \lambda(x) + \sum \lambda(xy) \qquad (1)$$

dengan titik y adalah titik yang *adjacent* dengan titik x, maka λ merupakan pelabelan total titik ajaib jika terdapat konstanta k, jadi untuk setiap titik x, nilai dari $w_t(x) = k$, dimana k merupakan suatu konstanta ajaib dan G disebut graf total titik ajaib.

b. Batas-batas Konstanta Ajaib k

Lemma 2.1 *Jika G adalah sebuah graf total titik ajaib dengan banyaknya titik v dan banyaknya sisi e, maka*

$$\frac{(v+e)(v+e+1)}{2v} + \frac{\sum \lambda(xy)}{v} = k$$

dengan k adalah suatu konstanta ajaib dan $\sum \lambda(xy)$ adalah jumlah seluruh label sisi pada graf G.

Bukti :

Misalkan $\sum \lambda(x)$ merupakan jumlah seluruh label titik pada graf *G*, maka

$$\sum \lambda(xy) + \sum \lambda(x) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (v+e) = \frac{(v+e)}{2}(1+v+e)$$

Karena setiap sisi *incident* pada dua titik yang berbeda, maka setiap label sisi akan dijumlahkan dengan kedua label titik yang *adjacent* pada sisi tersebut dan label setiap titik berbeda, diperoleh

$$\sum \lambda(xy) + \lambda(x) = k \Leftrightarrow 2\sum \lambda(xy) + \sum \lambda(x) = vk$$
$$\Leftrightarrow \frac{(v+e)(v+e+1)}{2} + \sum \lambda(xy) = vk$$
$$\Leftrightarrow \frac{(v+e)(v+e+1)}{2v} + \frac{\sum \lambda(xy)}{v} = k$$

Teorema 2.2 *Misalkan G sebuah graf dengan v titik dan e sisi. Jika G adalah graf total titik ajaib, maka konstanta ajaib k terbatas dan berlaku*

$$\frac{e(e+1)(v+e+1)(v+e)}{2v} \leq k \leq e + \frac{e(e+1)+(v+e+1)(v+e)}{2v}$$

Bukti :

Dari Lemma 2.1 diperoleh :

$$\sum \lambda(xy) = vk - \frac{(v+e)(v+e+1)}{2}$$

$\sum \lambda(xy)$ minimum akan diperoleh jika 1 sampai e merupakan label sisi, sehingga diperoleh

$$\sum \lambda(xy) \geq 1+2+3+\cdots+e$$
$$=\frac{e}{2}(1+e)$$
$$=\frac{e(e+1)}{2}$$

Sedangkan $\sum \lambda(xy)$ maksimum akan diperoleh apabila $(v+1)$ sampai $(v+e)$ merupakan label sisi, sehingga diperoleh

$$\sum \lambda(xy) \leq (v+1)+(v+2)+\cdots+(v+e)$$
$$=\sum_{i=1}^{e} v+i$$
$$=ve+\frac{e(e+1)}{2}$$

Dengan demikian diperoleh bahwa

$$\frac{e(e+1)}{2} \leq \sum \lambda(xy) \leq ve+\frac{e(e+1)}{2}$$
$$\frac{e(e+1)}{2} \leq vk-\frac{(v+e)(v+e+1)}{2} \leq ve+\frac{e(e+1)}{2}$$
$$\frac{e(e+1)+(v+e)(v+e+1)}{2v} \leq k \leq e+\frac{e(e+1)+(v+e)(v+e+1)}{2v}$$

Jadi diperoleh bahwa konstanta ajaib terbatas pada interval

$$\left[\frac{e(e+1)+(v+e)(v+e+1)}{2v}, e+\frac{e(e+1)+(v+e)(v+e+1)}{2v}\right]$$

c. Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf Sikel dengan n Ganjil

Graf sikel adalah graf yang memuat sikel tunggal. Graf sikel dengan n titik dilambangkan dengan C_n, dengan n bilangan bulat positif. Untuk setiap graf sikel C_n berlaku $e=v=n$.

Untuk suatu graf sikel dengan n ganjil mempunyai bentuk pelabelan sebagai berikut

$$\lambda(v_i) = 2n - i \quad ,$$
untuk $0 \leq i \leq n-1$

$$\lambda(v_i v_{i+1}) = \frac{i}{2} + 1 \quad ,$$
untuk i genap

$$= \frac{n+i}{2} + 1 \quad ,$$
untuk i ganjil

dengan $\lambda(v_i)$ merupakan titik pada graf sikel dan $\lambda(v_i v_{i+1})$ merupakan sisi.

Teorema 2.3 *Untuk setiap n ganjil maka graf sikel C_n mempunyai pelabelan total titik ajaib dengan konstanta ajaib* $k=\frac{5n+3}{2}$

Bukti :

Jika n ganjil, akan dibuktikan graf sikel C_n mempunyai pelabelan total titik ajaib.

Diambil n merupakan bilangan bulat positif ganjil. Karena n ganjil, maka k pasti bilangan bulat positif.

Dari Teorema 1 diperoleh

$$k=\frac{e(e+1)+(v+e)(v+e+1)}{2v}$$

maka untuk C_n dimana $v=e=n$ diperoleh

$$k=\frac{n(n+1)+2n(2n+1)}{2n}$$
$$k=\frac{5n+3}{2}$$

$V(C_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ dan $E(C_n) = \{v_{n-1}v_0\} \cup \{v_i\, v_{i+1} | 0 \leq i \leq n-2\}$

Untuk n ganjil, graf sikel C_n mempunyai bentuk pelabelan sebagai berikut :

$\lambda(v_i) = 2n - i$, untuk $0 \leq i \leq n-1$

$\lambda(v_i v_{i+1}) = \frac{i}{2} + 1$, untuk i genap

$= \frac{n+i}{2} + 1$, untuk i ganjil

Akan dibuktikan bahwa bentuk pelabelan diatas memenuhi pemetaan bijektif

$\lambda : V \cup E \to \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$

Sebelumnya akan dibuktikan bahwa bentuk pelabelan diatas memenuhi pemetaan injektif

Diambil $i = 0, 1, \dots, n-1$ dengan $n \geq 3$

1) $\lambda(v_i) = 2n - i$

Untuk $i = 0$

$\lambda(v_0) = 2n - 0$

$\vdots$

Untuk $i = n-1$

$\lambda(v_n) = 2n - (n-1)$

2) $\lambda(v_i v_{i+1}) = \frac{i}{2} + 1$, $i = 0, 2, 4, \dots, n-1$

Untuk $i = 0$

$\lambda(v_0 v_1) = \frac{0}{2} + 1$

$\vdots$

Untuk $i = n - 1$

$\lambda(v_{n-1} v_n) = \frac{n-1}{2} + 1$

3) $\lambda(v_i v_{i+1}) = \frac{n+i}{2} + 1$, untuk $i = 1, 3, \dots, n-2$

Untuk $i = 1$

$\lambda(v_1 v_2) = \frac{n+1}{2} + 1$

Untuk $i = n-2$

$\lambda(v_n v_{n+1}) = \frac{n + (n-2)}{2} + 1$

Dapat dilihat bahwa setiap titik maupun sisi pada graf C_n mempunyai label yang berbeda, sehingga memenuhi pemetaan injektif

Dari hasil diatas telah diketahui bahwa pemetaan λ merupakan injektif dan domain dari pemetaan λ adalah himpunan titik dan sisi, sedangkan kodomain berupa himpunan $\{1, 2, \dots, 2n\}$, dengan n merupakan panjang sikel pada graf C_n, sehingga banyak anggota domain sama dengan banyak anggota kodomain atau dapat ditulis

$\lambda : V \cup E \to \{1, 2, 3, \dots, 2n\} = \{1, 2, \dots, 2n\}$

$|V \cup E \to \{1, 2, \dots, 2n\}| = |\{1, 2, \dots, 2n\}|$, berhingga

Karena pemetaan tersebut injektif dan banyak anggota domain sama dengan banyak anggota kodomain, maka terbukti bahwa pemetaan tersebut adalah pemetaan surjektif maka pelabelannya memenuhi pemetaan surjektif.

Karena memenuhi pemetaan injektif dan surjektif, maka pemetaan tersebut merupakan pemetaan bijektif. Selanjutnya untuk membuktikan bahwa setiap titik pada pelabelan tersebut mempunyai konstanta ajaib yang sama, maka dengan menggunakan persamaan (1) diperoleh konstanta ajaib pada v_i adalah

- Untuk *i* genap

$$k = \lambda(v_i) + \lambda(v_i v_{i+1}) + \lambda(v_{i-1} v_i) = \frac{5n+3}{2}$$

- Untuk *i* ganjil

$$k = \lambda(v_i) + \lambda(v_i v_{i+1}) + \lambda(v_{i-1} v_i) = \frac{5n+3}{2}$$

- Untuk *i* = 0

$$k = \lambda(v_i) + \lambda(v_i v_{i+1}) + \lambda(v_{n+i-1} v_i) = 2n - i + \frac{i}{2} + 1 + \frac{n+i-1}{2} + 1 = \frac{5n+3}{2}$$

Terlihat bahwa setiap titiknya mempunyai konstanta ajaib yang sama, sehingga pelabelan tersebut merupakan pelabelan total titik ajaib dengan konstanta ajaib

$k = \frac{5n+3}{2}$

d. Pelabelan Total Titik Anti Ajaib

Suatu pemetaan bijektif λ dari $E \cup V$ ke himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, \ldots, h\}$ dengan bobot titik *x* didefinisikan sebagai

$$k = \lambda(x) + \sum \lambda(xy)$$

dimana *y* merupakan titik yang *adjacent* dengan titik *x*. Pemetaan λ disebut sebagai pelabelan total titik anti ajaib jika semua titik mempunyai konstanta ajaib yang berbeda dan himpunan konstanta ajaib dari semua titik membentuk suatu barisan aritmatika dengan suku pertama *a* dan beda *d*. Jadi himpunan konstanta ajaib yang terbentuk adalah $\{a, a+d, \ldots, a+(v-1)d\}$, untuk suatu bilangan bulat positif *a* dan *d*, dimana $a > 0$ dan $d \geq 0$.

Pelabelan total titik anti ajaib (a, d) pada graf G dapat membentuk pelabelan total titik ajaib dengan konstanta ajaib a (atau biasa disebut dengan k) jika nilai $d = 0$.

e. Pelabelan Total Titik Anti Ajaib (*a*,*d*) pada Graf Sikel

Teorema 2.4 *Jika a dan b merupakan bilangan bulat positif, dan* $n \geq 3$ *adalah suatu bilangan bulat, maka terdapat suatu pelabelan total titik anti ajaib* $(a + 2b + 2(n-1), 2)$ *pada* C_n, *dimana* $a, a+2, \ldots, a+2(n-1)$ *merupakan label titik dan* $b, b+2, \ldots, b+2(n-1)$ *merupakan label sisi.*

Bukti :

Misalkan C_n merupakan suatu graf sikel dengan titik $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ dan sisi $v_i v_{i+1}$ dimana $i = 0,1, \ldots, n-1$ dan bentuk pelabelannya sebagai berikut

$$\lambda(v_i) \quad = a$$
untuk $i = 0$

$$= a + 2(n-i)$$
untuk $i = 1,2, \ldots, n-1$

$$\lambda(v_i v_{i+1}) = b + 2i$$
untuk $i = 0,1, \ldots, n-1$

Akan dibuktikan bahwa pelabelan diatas memenuhi $(a + 2b + 2(n-1), 2)$

- Untuk $i = 1, 2, \ldots, n-1$

$$\lambda(v_i) + \lambda(v_{i-1}v_i) + \lambda(v_i v_{i+1}) = a + 2(n-i) + b + 2(i-1) + b + 2i$$
$$= a + 2b + 2(n-1) + 2i$$

- Untuk $i = 0$

$$\lambda(v_0) + \lambda(v_{n-1}v_0) + \lambda(v_0 v_1) = a + b + 2(n-1) + b$$

$$= a + 2b + 2(n-1) + 0$$

Sehingga diperoleh pelabelan total titik anti ajaib dengan konstanta ajaib $a + 2b + 2(n-1) + 2i$ untuk $i = 0,1, \ldots, n-1$

∎

f. Graf Hasil Kali Kartesius dari Graf Sikel

Graf hasil kali kartesius merupakan suatu graf yang dibentuk dari dua buah graf sikel, dimana graf sikel yang pertama disimbolkan dengan C_m, dengan $m \geq 3$, m merupakan himpunan bilangan bulat positif dan graf sikel yang kedua disimbolkan dengan C_n, dengan $n \geq 3$, n merupakan himpunan bilangan bulat positif ganjil, sehingga bentuk umum dari graf hasil kali kartesius dari graf sikel adalah $C_m \times C_n$. Istilah lain dari graf $C_m \times C_n$ adalah *Torus Grids* atau biasa disebut juga *Toroidal Grids.*

g. Pelabelan Total Titik Ajaib Graf Hasil Kali Kartesius dari graf sikel

Pada pelabelan total titik ajaib graf hasil kali kartesius dari graf sikel, yaitu graf dengan bentuk umum $C_m \times C_n$ untuk $m, n \geq 3$ dan n ganjil digunakan konsep pelabelan total titik anti ajaib $(a, 2)$ untuk melabeli titik $v_{i,j}$ dan sisi $v_{i,j}v_{i+1,j}$ untuk $i = 0, 1, \ldots, m-1$ dan $j = 0, 1, \ldots, n-1$ pada graf sikel pertama, yaitu graf C_m, sedangkan untuk melabeli sisi $v_{i,j}v_{i,j+1}$ untuk $i = 0, 1, \ldots, m-1$ dan $j = 0, 1, \ldots, n-1$ pada graf sikel yang kedua yaitu graf C_n digunakan konsep pelabelan total titik ajaib pada graf sikel dengan n ganjil, dan jumlah dari label titik $v_{i,j}$, sisi $v_{i,j}v_{i+1,j}$, dan sisi $v_{i,j}v_{i,j+1}$ yang *adjacent* dengan titik $v_{i,j}$ akan memenuhi konsep pelabelan total titik ajaib pada graf sikel, dengan *n* ganjil.

Teorema 2.5 *Untuk setiap* $m,n \geq 3$ *dan* n *ganjil, terdapat pelabelan total titik ajaib pada graf* $C_m \times C_n$ *dengan konstanta ajaib*

$$k = \frac{1}{2}m(15n+1)+2$$

Bukti :

Graf $C_m \times C_n$ mempunyai titik $v_{i,j}$, sisi $v_{i,j}v_{i+1,j}$ dan sisi $v_{i,j}v_{i,j+1}$, dimana $i = 0, 1, \ldots, m-1$ dan $j = 0, 1, \ldots, n-1$ untuk $m, n \geq 3$ dan n ganjil. Diberikan label graf sebagai berikut .

$\lambda(v_{i,j}) = 3mj + 2$,

untuk $i = 0$

$= 3mj + 2m - 2[i-1]$

, untuk $i = 1, \ldots, m-1$

$\lambda(v_{i,j}v_{i+1,j}) = 3m[n-(j+1)] + 2i + 1$

$\lambda(v_{i,j}v_{i,j+1}) = 3m\left(\frac{j}{2}+1\right) - i$,

untuk j genap

$= 3m\left(\frac{n+j}{2}+1\right) - i$

untuk j ganjil

Dari bentuk pelabelan yang diperoleh langkah pertama adalah membuktikan bahwa pemetaan $\lambda : V \cup E \to \{1, 2, 3, \ldots, 3mn\}$ merupakan pemetaan yang bijektif.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa setiap titik pada graf tersebut mempunyai bobot yang sama.

(i) Untuk $i = 0$, dan j genap

$$k = \lambda(v_{i,j}) + \lambda(v_{i-1,j}v_{i,j}) + \lambda(v_{i,j}v_{i+1,j}) + \lambda(v_{i,j-1}v_{i,j}) + \lambda(v_{i,j}v_{i,j+1})$$

$$= 3mj + 2 + 3m[n-(j+1)] + 2(m-1) + 1 + 3m[n-(j+1)] + 1$$

$$+ 3m\left(\frac{n+j-1}{2}+1\right) + 3m\left(\frac{j}{2}+1\right)$$

$$= \frac{1}{2}m(15n+1) + 2$$

(ii) Untuk $i = 1, \ldots, m-1$ dan j genap

$$k = \lambda(v_{i,j}) + \lambda(v_{i-1,j}v_{i,j}) + \lambda(v_{i,j}v_{i+1,j}) + \lambda(v_{i,j-1}v_{i,j}) + \lambda(v_{i,j}v_{i,j+1})$$

$$= 3mj + 2m - 2[i-1] + 3m[n-(j+1)] + 2(i-1) + 1 + 3m[n-(j+1)]$$

$$+2i + 1 + 3m\left(\frac{n+j-1}{2}+1\right) - i + 3m\left(\frac{j}{2}+1\right) - i$$

$$= \frac{1}{2}m(15n+1) + 2$$

(iii) Untuk $i = 0$ dan j ganjil

$$k = \lambda(v_{i,j}) + \lambda(v_{i-1,j}v_{i,j}) + \lambda(v_{i,j}v_{i+1,j}) + \lambda(v_{i,j-1}v_{i,j}) + \lambda(v_{i,j}v_{i,j+1})$$

$$= 3mj + 2 + 3m[n-(j+1)] + 2(m-1) + 1 + 3m[n-(j+1)] + 1$$

$$+3m\left(\frac{j-1}{2}+1\right) + 3m\left(\frac{n+j}{2}+1\right)$$

$$= \frac{1}{2}m(15n+1) + 2$$

(iv) Untuk $i = 1, \ldots, m-1$ dan j ganjil

$$k = \lambda(v_{i,j}) + \lambda(v_{i-1,j}v_{i,j}) + \lambda(v_{i,j}v_{i+1,j}) + \lambda(v_{i,j-1}v_{i,j}) + \lambda(v_{i,j}v_{i,j+1})$$

$$= 3mj + 2m - 2[i-1] + 3m[n-(j+1)] + 2(i-1) + 1 + 3m[n-(j+1)]$$

$$+2i + 1 + 3m\left(\frac{j-1}{2} + 1\right) - i + 3m\left(\frac{n+j}{2} + 1\right) - i$$

$$= \frac{1}{2}m(15n+1) + 2$$

Teorema 2.6 *Untuk setiap* $m, n \geq 3$ *dan* n *ganjil, terdapat pelabelan total titik ajaib pada graf* $C_m \times C_n$ *dengan konstanta ajaib*

$$k = \frac{1}{2}m(15n+1) + 3$$

Teorema 2.7 *Untuk setiap* $m, n \geq 3$ *dan* n *ganjil, terdapat pelabelan total titik ajaib pada graf* $C_m \times C_n$ *dengan konstanta ajaib*

$$k = \frac{1}{2}m(15n-1) + 2$$

Teorema 2.8 *Untuk setiap* $m, n \geq 3$ *dan* n *ganjil, terdapat pelabelan total titik ajaib pada graf* $C_m \times C_n$ *dengan konstanta ajaib*

$$k = \frac{1}{2}m(15n-1) + 3$$

Bukti untuk Teorema 2.6, Teorema 2.7 dan Teorema 2.8 analog dengan bukti Teorema 2.5, dan jika diberikan dalam bentuk tabel, maka pelabelan total titik ajaib graf hasil kali kartesius dari graf sikel diperoleh suatu interval label titik $\lambda(v_{i,j})$, sisi $\lambda(v_{i,j}v_{i+1,j})$, dan sisi $\lambda(v_{i,j}v_{i,j+1})$ beserta nilai konstanta ajaib yang bersesuaian sebagai berikut.

1	$\lambda(v_{i,j})$	$3mj+2, 3mj+4, \ldots, 3mj+2m$	$k = \frac{1}{2}m(15n+1)+2$
	$\lambda(v_{i,j}v_{i+1,j})$	$3mj+1, 3mj+3, \ldots, 3mj+2m-1$	
	$\lambda(v_{i,j}v_{i,j+1})$	$3mj+2m+1, 3mj+2m+2, \ldots, 3mj+3m$	
2	$\lambda(v_{i,j})$	$3mj+1, 3mj+3, \ldots, 3mj+2m-1$	$k = \frac{1}{2}m(15n+1)+3$
	$\lambda(v_{i,j}v_{i+1,j})$	$3mj+2, 3mj+4, \ldots, 3mj+2m$	
	$\lambda(v_{i,j}v_{i,j+1})$	$3mj+2m+1, 3mj+2m+2, \ldots, 3mj+3m$	
3	$\lambda(v_{i,j})$	$3mj+m+2, 3mj+m+4, \ldots, 3mj+3m$	$k = \frac{1}{2}m(15n-1)+2$
	$\lambda(v_{i,j}v_{i+1,j})$	$3mj+m+1, 3mj+m+2, \ldots, 3mj+3m-1$	
	$\lambda(v_{i,j}v_{i,j+}$	$3mj+1, 3mj+2, \ldots, 3mj+m$	
4	$\lambda(v_{i,j})$	$3mj+m+1, 3mj+m+2, \ldots, 3mj+3m-1$	$k = \frac{1}{2}m(15n-1)+3$
	$\lambda(v_{i,j}v_{i+1,j})$	$3mj+m+2, 3mj+m+4, \ldots, 3mj+3m$	
	$\lambda(v_{i,j}v_{i,j+}$	$3mj+1, 3mj+2, \ldots, 3mj+m$	

3. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan dapat disimpulkan bahwa graf hasil kali kartesius dari graf sikel atau graf $C_m \times C_n$, dengan m menyatakan banyaknya baris, n menyatakan banyaknya kolom dan n harus ganjil merupakan graf total titik ajaib.

Pelabelan total titik ajaib graf hasil kali kartesius dari graf sikel ganjil pada dasarnya adalah mencari label titik $\lambda(v_{i,j})$, sisi $\lambda(v_{i,j}v_{i+1,j})$, yang merupakan titik dan sisi pada C_m dan sisi $\lambda(v_{i,j}v_{i,j+1})$, yang merupakan sisi pada C_n. Pada pelabelan ini, konsep yang digunakan untuk melabeli graf sikel pertama, yaitu C_m adalah dengan menggunakan konsep pelabelan total titik anti ajaib $(a,2)$ dan untuk melabeli graf sikel kedua, yaitu C_n dengan menggunakan konsep pelabelan total titik ajaib pada graf sikel dengan jumlah sikel ganjil, oleh sebab itu nilai n harus ganjil.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Cunningham, Daisy. "*Vertex Magic*". *Electronic Journal of Undergraduate Mathematics*. *Volume* 9, 1 – 20 (2004). Furman University.

[2] Gallian, J.A. "*A Dynamic Survey of Graph Labeling". The Electronic Journal of Combinatorics 15* (2008). Minnesota. United State Of America.

[3] Froncěk, D, Kovar, P and Kovarova, T. " *Vertex Magic Total Labeling of Products of Cycles*". *Australian Journal of Combinatorics*. *Volume* 33,169-181(2005).United State of America.

[4] Kovarova, Tereza. Tanpa tahun. "*on vertex-magic total labeling of products of cycles* " . Ostrava-Poruba.