WEAK CORING

Nikken Prima Puspita[1] dan Indah Emilia Wijayanti[2]

Let A be a ring with unit. An (A,A)- non-unital bimodule C is called weak coring provided it has a weak comultiplication $\underline{\Delta}$ and a weak counit $\underline{\varepsilon}$. As a generalization of coring and coaljabar, weak coring would have some properties like coring and coalgebra. For any coassociative weak A-koring C, linear maps from C to A have ring (dual) structure. In the other hand, it is interesting that from any weak coring we can construct a coring. In this paper will be discussed about weak coring and some properties of weak coring.

Key words : Coalgebra, Comultiplication, Coring, Counit, Weak Coring.

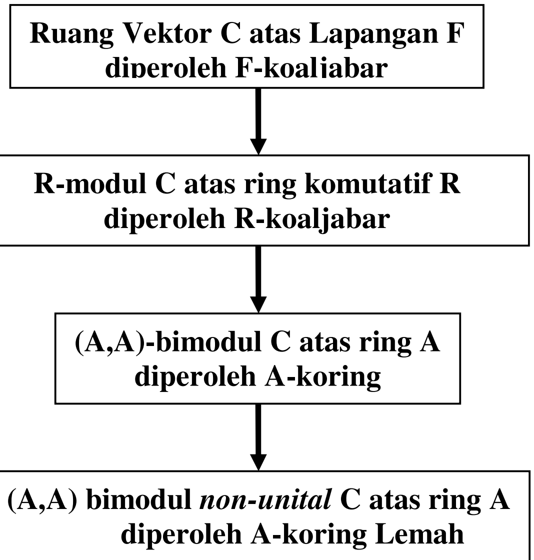
PENDAHULUAN

Penelitian tentang aljabar dan koaljabar dimulai pada tahun 1960-an oleh Sweedler. Sweedler menyatakan bahwa setiap ruang vektor C atas lapangan F yang dilengkapi komultiplikasi $\Delta : C \to C \otimes_F C$ dan kounit $\varepsilon : C \to F$ disebut sebagai F -koaljabar. Kemudian karena sifat lapangan yang dipandang terlalu kuat, didefinisikan kolaljabar atas ring komutatif R. Setiap R -modul C dengan komultiplikasi $\Delta : C \to C \otimes_R C$ dan kounit $\varepsilon : C \to R$ disebut R -koaljabar.

Koring yang dikenalkan pada tahun 1970-an adalah perumuman dari koaljabar yaitu dengan mengganti ring komutatifnya menjadi sebarang ring A. (A,A)-bimodul unital yang dilengkapi dengan komultiplikasi $\Delta : C \to C \otimes_A C$ dan kounit $\varepsilon : C \to A$ disebut koring.

Diberikan ring A dengan elemen satuan 1. Grup Abel C yang memenuhi semua aksioma untuk menjadi bimodul unital kecuali aksioma unit yaitu $(\exists c \in C) 1c \neq c$ atau $c1 \neq c$ disebut sebagai bimodul non-unital. Hal inilah yang menjadi latar belakang munculnya suatu struktur baru yang disebut koring lemah. Untuk mendapatkan gambaran lebih jelas tentang koaljabar dan struktur lainnya perhatikan bagan berikut :

[1] Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Diponegoro, E-mail: nikkenprima@yahoo.com
[2] Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Gadjah Mada, E-mail: ind_wijayanti@yahoo.com



Bagan 1. *Koaljabar, Koring dan Koring lemah*

KORING LEMAH

Koring lemah adalah sebuah struktur seperti koring tetapi himpunan dasar pembentuknya adalah modul non-unital. Secara keseluruhan pembahasan tentang koring lemah ini diangkat berdasarkan tulisan Wisbauer (2001). Pada tulisan ini A diasumsikan sebagai ring (tak harus komutatif) dengan elemen satuan 1, kecuali jika ada keterangan lebih lanjut.

Definisi 1 *Diberikan* (A,A)*-bimodul non-unital* C.

(i). Pemetaan (A,A) *-bilinear* $\underline{\Delta}: C \to C \otimes_A A \otimes_A C$ *dengan definisi* $(\forall c \in C)\,\underline{\Delta}(c) = \sum c_{\underline{1}} \otimes 1 \otimes c_{\underline{2}}$ *disebut* ***komultiplikasi lemah.***

(ii). Pemetaan (A,A)*-bilinear* $\underline{\varepsilon}: C \to A$ *disebut* ***kounit lemah*** *untuk* $\underline{\Delta}$ *jika diagram berikut komutatif*

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "\underline{\Delta}"'] \arrow[dr, "\underline{\Delta}"] \arrow[dd, "1\otimes - \otimes 1"] & \\
C \otimes_A A \otimes_A C \arrow[dr, "\underline{\varepsilon} \otimes I_{AC}"'] & & C \otimes_A A \otimes_A C \arrow[dl, "I_{CA} \otimes \underline{\varepsilon}"] \\
 & C &
\end{tikzcd}$$

Bagan 2

Bagan 2 komutatif artinya $(I_{CA} \otimes \underline{\varepsilon}) \circ \underline{\Delta} = 1 \otimes - \otimes 1 = (\underline{\varepsilon} \otimes I_{AC}) \circ \underline{\Delta}$, yaitu $(\forall c \in C)$ $\sum \underline{\varepsilon}(c_{\underline{1}})c_{\underline{2}} = 1c1 = \sum c_{\underline{1}}\underline{\varepsilon}(c_{\underline{2}})$.

Definisi 2 *Setiap (A,A)-bimodul non-unital C yang dilengkapi dengan komultiplikasi lemah $\underline{\Delta}$ dan kounit lemah $\underline{\varepsilon}$ disebut A* ***-koring lemah.***

Koring lemah atas A merupakan perumuman dari koring. Jika pada koring C mempunyai struktur sebagai (A,A)-bimodul unital, maka pada koring lemah struktur C adalah (A,A)-bimodul non-unital. Selanjutnya A-koring lemah C dengan komultiplikasi lemah $\underline{\Delta}$ dan kounit lemah $\underline{\varepsilon}$ dinotasikan dengan $(C,\underline{\Delta},\underline{\varepsilon})$.

Definisi 3. *Komultiplikasi lemah $\underline{\Delta}: C \to C \otimes_A A \otimes_A C$ dikatakan* ***koasosiatif*** *jika diagram berikut komutatif.*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\underline{\Delta}"] \arrow[d, "\underline{\Delta}"'] & C \otimes_A A \otimes_A C \arrow[d, "I_C \otimes I_A \otimes \underline{\Delta}"] \\ C \otimes_A A \otimes_A C \arrow[r, "\underline{\Delta} \otimes I_A \otimes I_C"] & C \otimes_A A \otimes_A C \otimes_A A \otimes_A C. \end{tikzcd}$$

Bagan 3

Bagan 3 komutatif artinya $(\underline{\Delta} \otimes I_A \otimes I_C) \circ \underline{\Delta} = (I_C \otimes I_A \otimes \underline{\Delta}) \circ \underline{\Delta}$.

Artinya $(\forall c \in C)$ $(\underline{\Delta} \otimes I_A \otimes I_C) \circ \underline{\Delta}(c) = (I_C \otimes I_A \otimes \underline{\Delta}) \circ \underline{\Delta}(c)$

$\Leftrightarrow (\underline{\Delta} \otimes I_A \otimes I_C)\left(\sum c_{\underline{1}} \otimes 1 \otimes c_{\underline{2}}\right) = (I_C \otimes I_A \otimes \underline{\Delta})\left(\sum c_{\underline{1}} \otimes 1 \otimes c_{\underline{2}}\right)$

$\Leftrightarrow \sum \underline{\Delta}(c_{\underline{1}}) \otimes 1 \otimes I_C(c_{\underline{2}}) = \sum I_C(c_{\underline{1}}) \otimes 1 \otimes \underline{\Delta}(c_{\underline{2}})$

$\Leftrightarrow \sum \underline{\Delta}(c_{\underline{1}}) \otimes 1 \otimes c_{\underline{2}} = \sum c_{\underline{1}} \otimes 1 \otimes \underline{\Delta}(c_{\underline{2}})$

$\Leftrightarrow \sum c_{\underline{1}\underline{1}} \otimes 1 \otimes c_{\underline{1}\underline{2}} \otimes 1 \otimes c_{\underline{2}} = \sum c_{\underline{1}} \otimes 1 \otimes c_{\underline{2}\underline{1}} \otimes 1 \otimes c_{\underline{2}\underline{2}}$

Definisi 4 *Setiap A-koring lemah $(C,\underline{\Delta},\underline{\varepsilon})$ disebut* ***A-koring lemah koasosiatif*** *jika $\underline{\Delta}$ koasosiatif.*

Definisi 5 *Diberikan A-koring lemah $(C,\underline{\Delta},\underline{\varepsilon})$. Jika C merupakan (A,A)-bimodul yang unital kanan atau kiri, maka C disebut sebagai* ***pre-koring*** *sedangkan koring lemah C yang mempunyai struktur sebagai (A,A)-bimodul unital disebut sebagai A* ***-koring****.*

Definisi 5 mengatakan bahwa setiap koring pasti merupakan sebuah koring lemah. Sebaliknya, sebuah A-koring lemah dapat menjadi A-koring asalkan C mempunyai struktur sebagai (A,A)-bimodul unital.

Contoh 6 Contoh trivial koring lemah adalah ring A sendiri yang dipandang sebagai (A,A)-bimodul unital. Dengan komultiplikasi lemah $\underline{\Delta}: A \to A \otimes_A A \otimes_A A$,

$(\forall a\in A)\underline{\Delta}(a)=a\otimes 1\otimes a$ dan kounit lemah $\underline{\varepsilon}:A\to A,\ (\forall a\in A)\underline{\varepsilon}(a)=1,$ maka $(A,\underline{\Delta},\underline{\varepsilon})$ merupakan A-koring lemah.

Contoh 7 Diberikan (A,A)-bimodul unital M dan $(A\times A)$-bimodul non-unital M dengan definisi aksinya $(\forall m\in M,\ (a,b)\in A\times A)\ m(a,b)=ma+mb$ dan $(a,b)m=am+bm.$ Dengan komultiplikasi lemah $\underline{\Delta}:M\to M\otimes_A A\times A\otimes_A M,\quad (\forall m\in M)\underline{\Delta}(m)=m\otimes(1,1)\otimes m$ dan kounit lemah $\underline{\varepsilon}:M\to A\times A,\ (\forall m\in M)\underline{\varepsilon}(m)=(1,1),$ maka $(M,\underline{\Delta},\underline{\varepsilon})$ merupakan $A\times A$-koring lemah koasosiatif.

Bukti:

Ambil sebarang $m\in M$, dari definisi aksi $A\times A$ di M diperoleh

(i). pemetaan $\underline{\varepsilon}:M\to A\times A$ kounit lemah sebab

$$\begin{aligned}(I_{MA\times A}\otimes\underline{\varepsilon})\circ\underline{\Delta}(m)&=(I_{MA\times A}\otimes\underline{\varepsilon})(m\otimes(1,1)\otimes m)=m(1,1)\underline{\varepsilon}(m)\\&=(m+m)(1,1)=m+m+m+m,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\underline{\varepsilon}\otimes I_{MA\times A})\circ\underline{\Delta}(m)&=(\underline{\varepsilon}\otimes I_{MA\times A})(m\otimes(1,1)\otimes m)=\underline{\varepsilon}(m)m(1,1)\\&=(1,1)(m+m)=m+m+m+m\end{aligned}$$

dan $((1,1)\otimes-\otimes(1,1))(m)=(1,1)(m+m)=m+m+m+m.$

Jadi $(I_{MA\times A}\otimes\underline{\varepsilon})\circ\underline{\Delta}=(1,1)\otimes-\otimes(1,1)=(\underline{\varepsilon}\otimes I_{MA\times A})\circ\underline{\Delta}.$

(ii). Komultiplikasi lemah $\underline{\Delta}:M\to M\otimes_A(A,A)\otimes_A M$ koasosiatif, sebab untuk setiap $m\in M$

$$\begin{aligned}(I_{M\otimes_A A\times A}\otimes\underline{\Delta})\circ\underline{\Delta}(m)&=(I_{M\otimes_A A\times A}\otimes\underline{\Delta})(m\otimes(1,1)\otimes m)\\&=m\otimes(1,1)\otimes(m\otimes(1,1)\otimes m)\\&=(m\otimes(1,1)\otimes m)\otimes(1,1)\otimes m\\&=\underline{\Delta}\otimes I_{A\times A\otimes_A M}\ (m\otimes(1,1)\otimes m)\\&=(\underline{\Delta}\otimes I_{A\times A\otimes_A M})\circ\underline{\Delta}(m)\end{aligned}$$

Berdasarkan (i)-(ii) terbukti $(M,\underline{\Delta},\underline{\varepsilon})$ adalah $A\times A$-koring lemah koasosiatif.□

Contoh 7 merupakan contoh koring yang diperoleh dari sebuah modul non-unital. Dengan cara yang analog, secara umum untuk $n\in\mathbb{N}$ modul seperti pada Contoh 7 dapat dipandang sebagai A^n-koring lemah koasosiatif. Berdasarkan Contoh 7, berikut diberikan contoh koring lemah dari himpunan yang sudah sering dikenal.

Contoh 8 Diberikan ring $\mathbb{R}$. Terhadap aksi kiri seperti pada Contoh 7, maka ruang vektor $\overline{\mathbb{R}}^2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\middle| x,y\in\mathbb{R}\right\}$ adalah $\mathbb{R}^2$-bimodul non-unital. Didefinisikan komultiplikasi lemah $\underline{\Delta}:\overline{\mathbb{R}}^2\to\overline{\mathbb{R}}^2\otimes_{\mathbb{R}^2}\mathbb{R}^2\otimes_{\mathbb{R}^2}\overline{\mathbb{R}}^2,\ \left(\forall\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\overline{\mathbb{R}}^2\right)\underline{\Delta}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dan kounit lemah

$\underline{\varepsilon}:\overline{\mathbb{R}}^2 \to \mathbb{R}^2, \left(\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \overline{\mathbb{R}}^2\right)\underline{\varepsilon}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (1,1)$. Dengan bukti seperti pada Contoh 7, maka $\overline{\mathbb{R}}^2$ adalah $\mathbb{R}^2$-koring lemah koasosiatif. Secara umum diperoleh bahwa ruang vektor $\overline{\mathbb{R}}^n$ adalah $\mathbb{R}^n$-koring lemah koasosiatif.

Pada dasarnya yang membedakan koring dan koring lemah hanya pada struktur dasar pembentuknya saja. Untuk itu, proposisi dan teorema berikut memberikan gambaran yang lebih jelas tentang kedua struktur tersebut.

Proposisi 9 *Jika* $(C,\underline{\Delta},\underline{\varepsilon})$ *adalah* A*-koring lemah, maka*

(1). $(CA,\underline{\Delta},\underline{\varepsilon})$ *merupakan* A*-pre-koring*

(2). $(AC,\underline{\Delta},\underline{\varepsilon})$ *merupakan* A*-pre-koring*

(3). $(ACA,\underline{\Delta},\underline{\varepsilon})$ *merupakan* A*-koring.*

Bukti:

Diketahui $(C,\underline{\Delta},\underline{\varepsilon})$ adalah A-koring lemah.

(1). Modul CA adalah A-modul kanan unital terhadap aksi kanan $\alpha_{CA}: CA \times A \to CA$, sebab untuk setiap $ca \in CA$ diperoleh $(ca).1 = c(a1) = ca$. Didefinisikan komultiplikasi lemah dan kounit lemah di CA yaitu $\underline{\Delta}_1 : CA \to CA \otimes_A A \otimes_A CA$ dan $\underline{\varepsilon}_1 : CA \to A$. Sebagai A-modul kanan $CA \subseteq C$, maka komultiplikasi lemah dan kounit lemahnya akan menjadi $\underline{\Delta}_1 = \underline{\Delta} : C \to C \otimes_A A \otimes_A C$ dan $\underline{\varepsilon}_1 = \underline{\varepsilon} : C \to A$. Jadi $(CA,\underline{\Delta},\underline{\varepsilon})$ adalah A-koring lemah yang unital kanan atau *pre-coring*.

(2). Bukti analog dengan (1).

(3). Dengan cara seperti pada bagian (1), modul ACA adalah modul yang unital kiri sekaligus kanan. Dengan komultiplikasi dan kounit lemah yang sama dengan $\underline{\Delta}$ dan $\underline{\varepsilon}$, maka ACA merupakan koring lemah. Akibatnya karena sifat unital kanan dan kiri dari ACA, maka terbukti ACA merupakan koring. □

Proposisi 9 menjelaskan bahwa setiap koring lemah dapat membangkitkan sebuah koring yang baru dengan cara mengaitkanya dengan ring dasar pembentuk modulnya. Hal ini bisa diperoleh sebab pada awal pembahasan telah diterangkan bahwa ring yang kita gunakan diasumsikan sebagai ring dengan unit yang sekaligus dapat dipandang sebagai modul atas dirinya sendiri.

Pada A-koring lemah himpunan homomorfisma A-modul kanan (A-linear kanan) $f : C \to A$ dinotasikan dengan $C^* := Hom_A(C,A) \simeq Hom_A(CA,A)$. Himpunan homomorfisma A-modul kiri $f : C \to A$ dinotasikan dengan ${}^*C := {}_A Hom(C,A) \simeq {}_A Hom(AC,A)$ dan ${}^*C^* = C^* \cap {}^*C$. Himpunan $C^*, {}^*C,$ dan ${}^*C^*$ disebut sebagai dual dari C. Struktur dari dual C ini dijelaskan dalam teorema berikut.

Teorema 10 *Jika* $(C,\underline{\Delta},\underline{\varepsilon})$ *adalah* A*-koring lemah koasosiatif, maka*

(1). C^* *adalah ring asosiatif terhadap operasi* $*_r$ *dengan definisi untuk setiap* $f, g \in C^*$,

$f *_r g = f \circ (g \otimes I_{AC}) \circ \underline{\Delta}$ *dan* $\underline{\varepsilon}$ *adalah idempoten sentralnya,*

(2). ${}^*C$ *adalah ring asosiatif terhadap operasi* $*_l$ *dengan definisi untuk setiap* $f, g \in {}^*C$, $f *_l g = g \circ (I_{CA} \otimes f) \circ \underline{\Delta}$ *dan* $\underline{\varepsilon}$ *adalah idempoten sentralnya,*

(3). ${}^*C^*$ *adalah ring asosiatif terhadap operasi* $*$ *dengan definisi untuk setiap* $f, g \in {}^*C^*$, $f * g = (g \otimes I_A \otimes f) \circ \underline{\Delta}$ *dan* $\underline{\varepsilon}$ *adalah unit di* ${}^*C^*$.

Bukti:

Struktur C dan A sebagai grup Abel menyebabkan $C^* := Hom_A(C, A)$ dan ${}^*C := {}_A Hom(C, A)$ adalah grup Abel terhadap operasi penjumlahan fungsi.

(1). Ditunjukkan C^* ring asosiatif terhadap operasi $*_r$ dengan definisi seperti pada ketentuan. Operasi $*_r$ tersebut dapat digambarkan pada skema berikut

$$f *_r g : C \xrightarrow{\Delta} CA \otimes_A C \xrightarrow{g \otimes I_{AC}} A \otimes_A C \simeq AC \xrightarrow{f} A.$$

Ambil sebarang $f, g, h \in C^*$ dan $c \in C$,

(i). $(C^*, *_r)$ tertutup sebab

$$\begin{aligned} f *_r g(c) &= f \circ (g \otimes I_{AC}) \circ \underline{\Delta}(c) \\ &= f \circ (g \otimes I_{AC}) \left(\sum c_{\underline{1}} \otimes 1 \otimes c_{\underline{2}} \right) \\ &= f \left(\sum g(c_{\underline{1}}) c_{\underline{2}} \right) \\ &= \sum f \left(g(c_{\underline{1}}) c_{\underline{2}} \right) \in A, \end{aligned}$$

jadi $f *_r g \in C^*$

(ii). $(C^*, *_r)$ *well defined,* sebab jika diambil sebarang $f_1 = f_2$, $g_1 = g_2 \in C^*$ diperoleh

$$\sum f_1 \left(g_1(c_{\underline{1}}) c_{\underline{2}} \right) = \sum f_2 \left(g_2(c_{\underline{1}}) c_{\underline{2}} \right) \Leftrightarrow f_1 *_r g_1(c) = f_2 *_r g_2(c).$$

(iii). $(C^*, *_r)$ asosiatif sebab

$$\begin{aligned} (f *_r g) *_r h(c) &= \sum (f *_r g)\left(h(c_{\underline{1}}) c_{\underline{2}} \right) \\ &= \sum f \circ (g \otimes I_{AC}) \circ \underline{\Delta}\left(\left(h(c_{\underline{1}}) c_{\underline{2}} \right) \right) \\ &= \sum f \circ (g \otimes I_{AC}) \left(h(c_{\underline{1}}) \underline{\Delta}(c_{\underline{2}}) \right) \\ &= \sum \sum f \circ (g \otimes I_{AC}) \left(h(c_{\underline{1}}) \left(c_{\underline{21}} \otimes 1 \otimes c_{\underline{22}} \right) \right) \\ &= \sum \sum f \left(\left(g\left(h(c_{\underline{1}}) c_{\underline{21}} \right) c_{\underline{22}} \right) \right) \\ &= \sum \sum f \left(\left(g\left(h(c_{\underline{11}}) c_{\underline{12}} \right) c_{\underline{2}} \right) \right), \text{ karena } \underline{\Delta} \text{ koassosiatif} \end{aligned}$$

$$= \sum f\left(\left(g \circ (h \otimes I_{AC})\left(\sum c_{\underline{1}\underline{1}} \otimes 1 \otimes c_{\underline{1}\underline{2}}\right)\right) c_{\underline{2}}\right)$$
$$= \sum f\left(g *_r h\left(c_{\underline{1}}\right) c_{\underline{2}}\right)$$
$$= f\left(\sum\left(g *_r h\left(c_{\underline{1}}\right) c_{\underline{2}}\right)\right)$$
$$= f *_r (g *_r h)(c)$$

(iv). $\left(C^*, +, *r\right)$ memenuhi hukum distributif kiri dan kanan, sebab

$$(f+g) *_r h(c) = \sum f + g\left(h\left(c_{\underline{1}}\right) c_{\underline{2}}\right)$$
$$= \sum f\left(h\left(c_{\underline{1}}\right) c_{\underline{2}}\right) + \sum g\left(h\left(c_{\underline{1}}\right) c_{\underline{2}}\right)$$
$$= (f *_r h + g *_r h)(c)$$

$$f *_r (g+h)(c) = \sum f\left(g + h\left(c_{\underline{1}}\right) c_{\underline{2}}\right)$$
$$= \sum f\left(\left(g\left(c_{\underline{1}}\right) + h\left(c_{\underline{1}}\right)\right) c_{\underline{2}}\right)$$
$$= \sum f\left(\left(g\left(c_{\underline{1}}\right) c_{\underline{2}} + h\left(c_{\underline{1}}\right) c_{\underline{2}}\right)\right)$$
$$= \sum f\left(g\left(c_{\underline{1}}\right) c_{\underline{2}}\right) + \sum f\left(h\left(c_{\underline{1}}\right) c_{\underline{2}}\right)$$
$$= (f *_r g + f *_r h)(c)$$

Dari (i)-(iv) terbukti C^* ring asosiatif,

(v). $\underline{\varepsilon} \in C^*$ idempoten sentral, sebab

$$\underline{\varepsilon} *_r f(c) = \sum \underline{\varepsilon}\left(f\left(c_{\underline{1}}\right) c_{\underline{2}}\right)$$
$$= \sum f\left(c_{\underline{1}}\right) \underline{\varepsilon}\left(c_{\underline{2}}\right)$$
$$= \sum f\left(c_{\underline{1}} \underline{\varepsilon}\left(c_{\underline{2}}\right)\right)$$
$$= f \sum\left(c_{\underline{1}} \underline{\varepsilon}\left(c_{\underline{2}}\right)\right)$$
$$= f(1c1)$$
$$= f\left(\sum \underline{\varepsilon}\left(c_{\underline{1}}\right) c_{\underline{2}}\right) \text{ dari sifat kounit lemah}$$
$$= \sum f\left(\underline{\varepsilon}\left(c_{\underline{1}}\right) c_{\underline{2}}\right)$$
$$= f *_r \underline{\varepsilon}(c)$$

dan $\underline{\varepsilon} *_r \underline{\varepsilon}(c) = \sum \underline{\varepsilon}\left(\underline{\varepsilon}\left(c_{\underline{1}}\right) c_{\underline{2}}\right) = \underline{\varepsilon}\left(\sum \underline{\varepsilon}\left(c_{\underline{1}}\right) c_{\underline{2}}\right) = \underline{\varepsilon}(1c1) = 1\underline{\varepsilon}(c)1 = \underline{\varepsilon}(c)$.

(2). Ditunjukkan ${}^*C$ ring asosiatif terhadap operasi $*_l$ dengan definisi seperti pada ketentuan. Hal ini dapat digambarkan dalam bagan berikut.

$$f *_l g : C \xrightarrow{\Delta} C \otimes_A AC \xrightarrow{I_{CA} \otimes f} C \otimes_A A \simeq CA \xrightarrow{g} A.$$

Ambil sebarang $f, g, h \in {}^* C$ dan $c \in C$

(i). $\left({}^*C, *_l\right)$ tertutup sebab

$$f *_l g(c) = g \circ (I_{CA} \otimes f) \circ \underline{\Delta}(c)$$
$$= g \circ (I_{CA} \otimes f)\left(\sum c_{\underline{1}} \otimes 1 \otimes c_{\underline{2}}\right)$$
$$= g\left(\sum c_{\underline{1}} f(c_{\underline{2}})\right)$$
$$= \sum g\left(c_{\underline{1}} f(c_{\underline{2}})\right) \in A$$

jadi $f *_l g \in C^*$

(ii). $\left({}^*C, *_l\right)$ *well defined,* sebab jika diambil sebarang $f_1 = f_2$, $g_1 = g_2 \in {}^*C$ diperoleh $\sum g_1\left(c_{\underline{1}} f_1(c_{\underline{2}})\right) = \sum g_2\left(c_{\underline{1}} f_2(c_{\underline{2}})\right) \Leftrightarrow f_1 *_l g_1(c) = f_2 *_l g_2(c)$. Dengan definisi pemetaan seperti diatas dan dengan cara yang analog terbukti $\left({}^*C, +, *_l\right)$ ring asosiatif

(3). Ditunjukkan ${}^*C^* = C^* \cap {}^*C$ ring asosiatif terhadap operasi $*$. Definisi perkalian konvolusinya dapat digambarkan dalam bagan berikut:

$$f * g : C \xrightarrow{\underline{\Delta}} C \otimes_A A \otimes_A C \xrightarrow{g \otimes I_A \otimes f} A.$$

Untuk menunjukkan ${}^*C^*$ ring asosiatif maka cukup ditunjukkan operasi $*$ tertutup sebab aksioma ringnya diwariskan dari C^* dan ${}^*C$. Ambil sebarang $f, g \in {}^*C^*$ dan $c \in C$ diperoleh

$$f * g(c) = (g \otimes I_A \otimes f) \circ \underline{\Delta}(c)$$
$$= (g \otimes I_A \otimes f)\left(\sum c_{\underline{1}} \otimes 1 \otimes c_2\right)$$
$$= \sum g(c_{\underline{1}}) f(c_{\underline{2}}) \in A$$

Selanjutnya $\underline{\varepsilon}$ merupakan unit di ${}^*C^*$ sebab

$$\underline{\varepsilon} * f(c) = \sum \underline{\varepsilon}(c_{\underline{1}}) f(c_{\underline{2}})$$
$$= \sum f\left(\underline{\varepsilon}(c_{\underline{1}}) c_{\underline{2}}\right)$$
$$= \sum f(1c1)$$
$$= f(c)$$

$$f * \underline{\varepsilon}(c) = \sum f(c_{\underline{1}}) \underline{\varepsilon}(c_{\underline{2}})$$
$$= \sum f\left(c_{\underline{1}} \underline{\varepsilon}(c_{\underline{2}})\right)$$
$$= \sum f(1c1)$$
$$= f(c). \ \square$$

Himpunan pemetaan dari setiap A-koring lemah koasosiatif C ke A mempunyai struktur sebagai ring dan disebut juga sebagai ring dual. Untuk setiap A-koring lemah koasosiatif C dapat dibentuk sebuah struktur baru yaitu ring dual asosiatif C^*, ${}^*C$ dan ${}^*C^*$.

KESIMPULAN

Koring lemah merupakan perumuman dari koaljabar dan koring. Sebuah bimodul non-unital atas ring dengan elemen satuan yang dilengkapi dengan komultiplikasi lemah dan kounit lemah disebut sebagai koring lemah. Jika himpunan dasar yang membentuknya adalah bimodul unital, maka strukturnya disebut sebagai koring. Sedangkan koaljabar merupakan koring atas ring komutatif. Sebagai perumuman dari koring, sifat-sifat pada koring lemah selalu dipenuhi oleh koring dan koaljabar. Sebaliknya butuh suatu kondisi tertentu agar sifat pada koring dapat dipenuhi juga oleh koring lemah.

Jika ditinjau lebih jauh, perbedaan antara koring dan koring lemah sebenarnya hanya pada struktur dasar pembentuknya. Mengingat struktur dasar pada A-koring lemah adalah bimodul non-unital, maka definisi komultiplikasinya sedikit berbeda dengan koring. Untuk setiap A-koring lemah C dapat dikonstruksikan suatu koring yaitu ACA. Sebuah sifat yang menarik bahwa pada koring himpunan semua pemetaan dari A-koring C ke ring A akan membentuk sebuah struktur ring (dual ring), sifat ini masih dapat dipertahankan pada A-koring lemah C dengan definisi perkalian yang sedikit berbeda.

Pada makalah ini diperoleh sebuah kesimpulan penting bahwa sifat non-unital pada sebuah modul tidak menghalangi pembentukan struktur baru yang menyerupai koring. Struktur ini disebut sebagai koring lemah. Dalam kondisi tertentu struktur ini masih dapat mempertahankan sifat pada koring.

SARAN

Makalah ini merupakan sebagian dari Tesis dengan judul Koring Lemah. Pada Tesis banyak hal yang dapat dipelajari dan dikembangkan berkaitan dengan koring lemah seperti bimodul lemah atas koring lemah dan sifat lain dari koring yang masih dipertahankan oleh koring lemah.

Selain itu, pengkajian tentang koring lemah masih dapat dikembangkan, misalnya tentang bikomodul lemah. Seperti pada saat mempelajari koring, di koring lemah juga dapat dibentuk sebuah komodul lemah atas koring lemah melalui sebuah aksi. Selanjutnya, jika M adalah C-komodul lemah kiri sekaligus D-komodul lemah kanan, maka M dapat menjadi (C,D)-bikomodul lemah. Penulis berharap semoga hal-hal yang belum berhasil diungkapkan secara terstruktur dan sistematis dapat dilengkapi dan dikembangkan oleh rekan-rekan yang tertarik dalam mempelajari struktur koring dan komodul.

UCAPAN TERIMAKASIH

Makalah ini merupakan sebagian dari Tesis yang telah selesai diujikan pada tanggal 12 Februari 2009 di Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada. Untuk itu saya mengucapkan terimakasih kepada :

1. Dosen Pembimbing Tesis Dr. Indah Emilia Wijayanti, M.Si.
2. Tim Penguji Tesis Prof. Sri Wahyuni, Dr. Budi Surodjo, M.Si., dan Dr. Fajar Adi Kusumo, M.Si.
3. Rekan-rekan di Program Pascasarjana Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada Angkatan 2007/2008.
4. Rekan-rekan Pengajar di Jurusan Matematika Universitas Diponegoro.

REFERENSI

[1] Adkins,W.,A., and Weintroub, SH., "Algebra : *An Approach Module Theory*," Springer-Verlag, New York, 1992.

[2] Anderson, F.W. and Fuller, K.R., "*Graduate Texts in Mathematics*," Mathematical Method of classical Mechanics, 2nd Ed., Springer – Verlag, New York, 1992.

[3] Artin, M., "*Noncommutative Rings*, " Lecture Notes, Berkeley, Fall, 1999.

[4] Brzeziński, T., and Wisbauer, R., "*Coring and comodules*, " Germany, 2003.

[5] Fraleigh, J., "*A first Course in Abstract Algebra*, " 6th Ed., Singapore : Addison - Wesley Publishing Company, 1994.

[6] Hungerford, T.W., "*Algebra, Graduate text in Mathematics,* " Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1974.

[7] Puspita, N. P., " *Koring Lemah*, " tesis, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta, 2009.

[8] Schubert, H., "*Categories*, Springer-Verlag,Berlin, Heidelberg, " New York, 1972.

[9] Wisbauer, R., "*Foundation of Module and Ring Theory*, " Gordon and Breach Science Publishers, 1991.

[10] Wisbauer, R., "Weak Coring," in *Jurnal of Algebra 245*," 2001, pp. 123 – 160.